

河南省平顶山许昌济源 2025 届高三数学第一次质量检测试题 理（含解析）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 复数 $\frac{(1+i)^4}{1-\sqrt{3}i}$ 等于 ()

- A. $1+\sqrt{3}i$ B. $-1+\sqrt{3}i$ C. $1-\sqrt{3}i$ D. $-1-\sqrt{3}i$

【答案】D

【解析】

【分析】

利用复数的四则运算法则对原式进行化简计算可得答案.

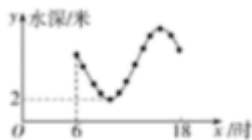
【详解】解： $\frac{(1+i)^4}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+2i+i^2)^2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(2i)^2(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-4(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = -1-\sqrt{3}i$ ，

故选：D.

【点睛】本题主要考查复数的四则运算法则，相对简洁.

2. 如图，某港口一天 6 时到 18 时的水深改变曲线近似满足函数关系式 $y = 3\sin(\omega x + \varphi) + k$ ，

据此可知，这段时间水深(单位： m)的最大值为 ()



- A. 5 B. 6 C. 8 D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】

由题意和最小值易得 k 的值，进而可得最大值.

【详解】由题意可得当 $\sin(\omega x + \varphi)$ 取得最小值 -1 时，函数取最小值 $y_{\min} = -3 + k = 2 \therefore k = 5$ ，

$\therefore y = 3\sin(\omega x + \varphi) + 5$

因此当 $\sin(\omega x + \varphi)$ 取得最大值 1 时, 函数取最小值 $y_{\min} = 3 + 5 = 8$.

故选: C

【点睛】本题考查了三角函数的应用问题, 考查了学生实际应用, 综合分析, 数学运算实力, 属于中档题.

3. $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ 则 $\vec{CD} =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ D. $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

【答案】A

【解析】

【分析】

依据三角形的内角平分线定理, 得到 $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, 再由 $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD}$, 将各个向量用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示出来, 即可求解.

【详解】由题意, 因为 CD 平分 $\angle ACB$, 可得 $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$,

又因为 $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA} = \vec{a} - \vec{b}$, 所以 $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$,

所以 $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

故选: A.

【点睛】本题主要考查了向量的线性运算, 其中解答中熟记三角形的内角平分线定理, 娴熟应用向量的运算法则是解答的关键, 着重考查了推理与运算实力, 属于基础题.

4. 干支纪年历法 (农历), 是矗立于世界民族之林的科学历法之一, 与国际公历历法并存. 黄帝时期, 就有了运用六十花甲子的干支纪年历法. 干支是天干和地支的总称, 把干支依次相配正好六十为一周期, 周而复始, 循环记录. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸十个符号叫天干; 子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥十二个符号叫地支. 受此周期律的启发, 可以求得函数 $f(x) = \sin \frac{2x}{3} + \cos 3x$ 的最小正周期为 ()

- A. 15π B. 12π C. 6π D. 3π

【答案】C

【解析】

【分析】

由天干为 10 个，地支为 12 个，其周期为其公倍数 60，可得 $y = \sin \frac{2x}{3}$ 与 $y = \cos 3x$ 的周期，可得 $f(x)$ 的最小正周期.

【详解】解：由天干为 10 个，地支为 12 个，其周期为其公倍数：60

故可得： $y = \sin \frac{2x}{3}$ 的周期 $T_1 = 3\pi$ ，

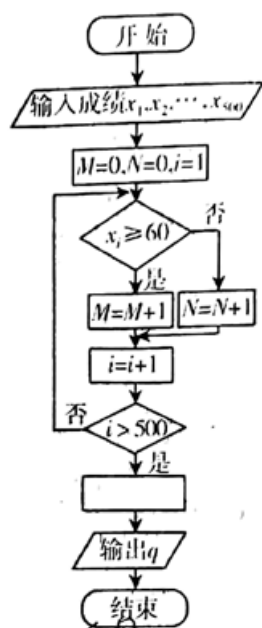
$y = \cos 3x$ 的周期 $T_2 = \frac{2}{3}\pi$ ，

T_1 、 T_2 的最小公倍数为 6π ，故 $f(x)$ 的最小正周期为 6π .

故选：C.

【点睛】本题主要考查周期的相关学问及学问迁移与创新的实力，属于中档题.

5. 下图是计算某年级 500 名学生期末考试（满分为 100 分）及格率 q 的程序框图，则图中空白框内应填入（ ）



A. $q = \frac{N}{M}$
 $q = \frac{M}{M+N}$

B. $q = \frac{M}{N}$

C. $q = \frac{N}{M+N}$

D.

【答案】D

【解析】

【分析】

通过题意与框图进行分析推断，可得空白框内应填入的表达式.

【详解】解：由题意结合框图可得：程序执行的过程时，假如输入的成果不小于 60 分就及格，就把变量 M 加 1，即变量 M 为统计成果及格的人数，否则，由变量 N 统计成果不及格的人数，总人数由变量 i 进行统计，不超过 500 就接着输入成果，直到输入完 500 个成果终止循环，

由 q 表示及格率，可得 $q = \frac{M}{M+N}$ ，

故选：D.

【点睛】本题主要考查程序框图的相关学问，娴熟程序框图并结合题意进行推断时解题的关键.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right), & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right), & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(a) > f(-a)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, +\infty \right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, +\infty \right)$
C. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$

【答案】A

【解析】

【分析】

依据函数的解析式和已知条件 $f(a) > f(-a)$ ，分 $a > 0$ 和 $a < 0$ ，两种状况探讨，即可求解.

【详解】由题意，函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right), & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right), & x < 0 \end{cases}$ ，

不妨设 $x > 0$ ，则 $-x < 0$ ，

可得 $f(-x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) = -\log_2 \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为定义域上的奇函数，

又由 $f(a) > f(-a)$ ，可得 $f(a) > -f(a)$ ，即 $2f(a) > 0$ ，即 $f(a) > 0$ ，

当 $a > 0$ 时, 可得 $\log_2(a^2 + a + \frac{1}{2}) > 0$, 即 $a^2 + a + \frac{1}{2} > 1$, 解得 $a > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$;

当 $a < 0$ 时, 可得 $\log_{\frac{1}{2}}(a^2 - a + \frac{1}{2}) > 0$, 即 $0 < a^2 - a + \frac{1}{2} < 1$, 解得 $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < a < 0$,

综上可得实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, +\infty\right)$.

故选: A.

【点睛】本题主要考查了对数函数的图象与性质, 以及函数的奇偶性的应用, 其中解答中熟记对数函数的图象与性质, 合理应用函数的奇偶性, 精确运算是解答的关键, 着重考查了推理与运算实力, 属于基础题.

7. 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(2, 1)$, 则 $2a + b$ 的最小值为 ()

A. 10 B. 9 C. 8 D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意可得 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 再利用“乘1法”与基本不等式可得答案.

【详解】解: 由题意得: 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(2, 1)$, 可得 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$,

可得: $2a + b = (2a + b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) = 4 + \left(\frac{2b}{a} + \frac{2a}{b}\right) + 1 \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \times \frac{2a}{b}} = 5 + 4 = 9$,

故选: B.

【点睛】本题主要考查基本不等式的应用, 娴熟利用“乘1法”是解题的关键.

8. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左,

右顶点. P 为 C 上一点, 且 $PF \perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M , 与 y 轴交于点 E . 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

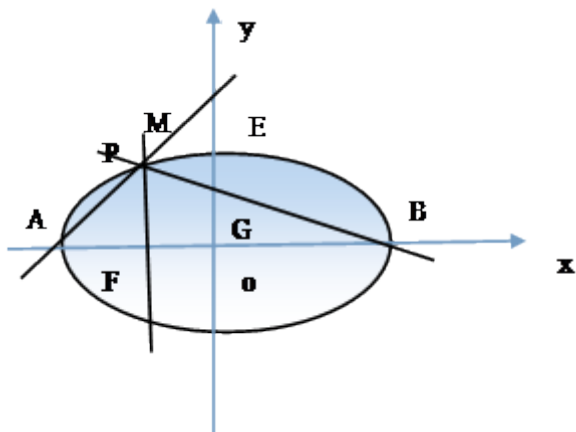
【答案】A

【解析】

试题分析: 如图取 P 与 M 重合, 则由 $A(-a, 0), M(-c, \frac{b^2}{a}) \Rightarrow$ 直线

$$AM: y = \frac{\frac{b^2}{a}}{-c+a}(x+a) \Rightarrow E(0, \frac{b^2}{a-c}) \quad \text{理} \quad \text{由}$$

$$B(a, 0), M(-c, \frac{b^2}{a}) \Rightarrow G(0, \frac{b^2}{a+c}) \Rightarrow \frac{b^2}{a-c} = \frac{2b^2}{a+c} \Rightarrow a = 3c \Rightarrow e = \frac{1}{3}, \text{ 故选 A.}$$



考点：1、椭圆及其性质；2、直线与椭圆。

【方法点睛】本题考查椭圆及其性质、直线与椭圆，涉及特别与一般思想、数形结合思想和转化化归思想，考查逻辑思维实力、等价转化实力、运算求解实力，综合性较强，属于较难

题型。如图取 P 与 M 重合，则由 $A(-a, 0), M(-c, \frac{b^2}{a}) \Rightarrow$ 直线

$$AM: y = \frac{\frac{b^2}{a}}{-c+a}(x+a) \Rightarrow E(0, \frac{b^2}{a-c}) \quad \text{同理由 } B(a, 0), M(-c, \frac{b^2}{a}) \Rightarrow G(0,$$

$$\frac{b^2}{a+c}) \Rightarrow \frac{b^2}{a-c} = \frac{2b^2}{a+c} \Rightarrow a = 3c \Rightarrow e = \frac{1}{3}.$$

9. 对于复数 a, b, c, d ，若集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 具有性质“对随意 $x, y \in S$ ，必有 $xy \in S$ ”，则

$$a = 1$$

当 $\{b^2 = 1\}$ 时， $b + c + d$ 等于()

$$c^2 = b$$

A. 1

B. -1

C. 0

D. i

【答案】B

【解析】

试题分析：集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 中 a, b, c, d 各不相同

由 $a = 1, b^2 = 1 \therefore b = -1 \therefore c^2 = -1 \therefore c = \pm i$ ，由已知“对随意 $x, y \in S$ ，必有 $xy \in S$ ”可知 $c = i$

时 $d = -i$, $c = -i$ 时 $d = i \therefore b + c + d = -1$

考点: 复数运算

点评: 在计算 b, c, d 的值时要留意验证已知中的对随意 $x, y \in S$, 必有 $xy \in S$ 是否成立和集合元素的互异性

10. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB // CD$, $AD \perp CD$, $AB = AD = 1$, $CD = 2$. 沿 BD 将 $ABCD$ 折成 60° 的二面角 $A-BD-C$, 则折后直线 AC 与平面 BCD 所成角的正弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】

取 CD 的中点 E , 连接 AE, BD 交于点 O , 推得 $\angle AOE$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角, 即 $\angle AOE = 60^\circ$, 再由面面垂直的性质定理, 推得 $AF \perp$ 平面 BCD , 得到 $\angle ACF$ 为 AC 与平面 BCD 所成的角, 在直角 $\triangle CEF$ 中, 即可求解.

【详解】由题意, 取 CD 的中点 E , 连接 AE, BD 交于点 O ,

在图 (1) 中, 正方形 $ABCD$, 则 $AC \perp BD$,

即在图 (2) 中, $AO \perp BD, EO \perp BD$,

所以 $\angle AOE$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角, 即 $\angle AOE = 60^\circ$,

又在 $\triangle AOE$ 中, $AO = EO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle AOE = 60^\circ$, 所以 $\triangle AOE$ 等边三角形,

取 EO 的中点 F , 则 $AF \perp EO$, 且 $AF = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

由面面垂直的性质定理, 可得 $AF \perp$ 平面 BCD ,

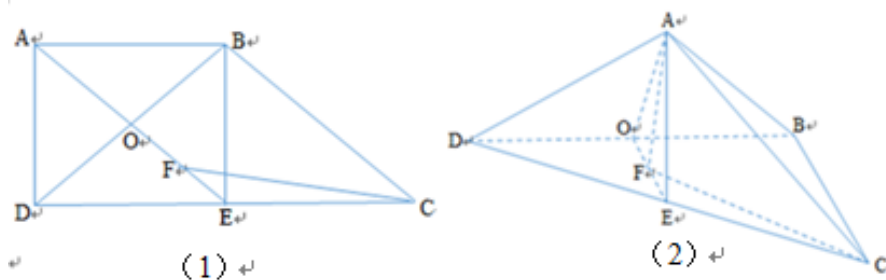
所以 $\angle ACF$ 为 AC 与平面 BCD 所成的角, 设 $\angle ACF = \theta$,

在 $\triangle CEF$ 中, $EF = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $CE = 1$, $\angle CEF = 135^\circ$,

由余弦定理可得 $|CF|^2 = |EF|^2 + |CE|^2 - 2|EF||CE|\cos 135^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 1^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{13}{8}$,

解得 $CF = \frac{\sqrt{26}}{4}$, 所以 $\tan \theta = \frac{AF}{CF} = \frac{\sqrt{39}}{13}$, 所以 $\cos \theta = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

故答案为: B.



【点睛】本题主要考查了二面角的平面角的概念及应用, 以及直线与平面所成角的求解, 其中解答中熟记二面角的平面角和直线与平面所成角的定义, 精确计算是解答的关键, 着重考查了推理与论证实力, 以及计算实力, 属于中档试题.

11. 现支配甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参与上海世博会志愿者服务活动, 每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一, 每项工作至少有一人参与. 甲、乙不会开车但能从事其他三项工作, 丙丁戊都能胜任四项工作, 则不同支配方案的种数是

- A. 152 B. 126 C. 90 D. 54

【答案】B

【解析】

试题分析: 依据题意, 按甲乙的分工状况不同分两种状况探讨, ①甲乙一起参与除了开车的三项工作之一, ②甲乙不同时参与一项工作; 分别由排列、组合公式计算其状况数目, 进而由分类计数的加法公式, 计算可得答案.

解: 依据题意, 分状况探讨, ①甲乙一起参与除了开车的三项工作之一: $C_3^1 \times A_3^3 = 18$ 种;

②甲乙不同时参与一项工作, 进而又分为 2 种小状况;

1° 丙、丁、戊三人中有两人担当同一份工作, 有 $A_3^2 \times C_3^2 \times A_2^2 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$ 种;

2° 甲或乙与丙、丁、戊三人中的一人担当同一份工作: $A_3^2 \times C_3^1 \times C_2^1 \times A_2^2 = 72$ 种;

由分类计数原理, 可得共有 $18 + 36 + 72 = 126$ 种,

故选 B.

考点: 排列、组合的实际应用.

12. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 则 k 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. e D. $\frac{e}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

先判定 $k \leq 0$ 时不符合题意, 再由 $k > 0$ 时, 令 $g(x) = f(x) - kx^2 = x - \ln(x+1) - kx^2$, 求得

$$g'(x) = \frac{-x \cdot [2kx - (1-2k)]}{x+1}, \text{ 分类探讨求得函数 } g(x) \text{ 的单调性与最值, 即可求解.}$$

【详解】由题意, 函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立,

当 $k \leq 0$ 时, 取 $x=1$ 时, 可得 $f(1) = 1 - \ln 2 > 0$, 所以 $k \leq 0$ 不符合题意, 舍去;

当 $k > 0$ 时, 令 $g(x) = f(x) - kx^2 = x - \ln(x+1) - kx^2$,

$$\text{则 } g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - 2kx = \frac{-x \cdot [2kx - (1-2k)]}{x+1},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 可得 } x_1 = 0 \text{ 或 } x_2 = \frac{1-2k}{2k} > -1,$$

(1) 当 $k \geq \frac{1}{2}$ 时, 则 $\frac{1-2k}{2k} \leq 0$, 则 $g'(x) < 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

因此 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调减, 从而对任意 $x \in [0, +\infty)$, 总有 $g(x) \leq g(0) = 0$,

即对任意 $x \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 所以 $k \geq \frac{1}{2}$ 符合题意;

(2) 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-2k}{2k} > 0$, 对于 $x \in (0, \frac{1-2k}{2k})$, $g'(x) > 0$, 因此 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1-2k}{2k})$ 内

单调递增,

所以当 $x \in (0, \frac{1-2k}{2k})$ 时, $g(x_0) > g(0) = 0$, 即存在 $f(x_0) > kx_0^2$ 不成立,

所以 $0 < k < \frac{1}{2}$ 不符合题意, 舍去,

综上可得, 实数 k 的取值范围是 $k \geq \frac{1}{2}$, 即实数 k 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了利用导数求解函数的单调性与最值，以及不等式的恒成立问题的求解，其中解答中依据题意，构造新函数，分类探讨得出函数的单调性与最值是解答的关键，着重考查了分析问题和解答问题的能力，属于中档试题。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在区域 $\{(x, y) | x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ 内任取一点 $P(x, y)$ ，能满足 $y \leq \sqrt{2x - x^2}$ 的概率为 _____。

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】

先求得区域 $\{(x, y) | x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ 表示面积 $S = 1$ ，再求得 $y \leq \sqrt{2x - x^2}$ ，表示面积为 $S_1 = \frac{1}{4}\pi$ ，利用面积比的几何概型，即可求解。

【详解】由题意，区域 $\{(x, y) | x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ 表示一个边长为 1 的正方形，其面积 $S = 1$ ，

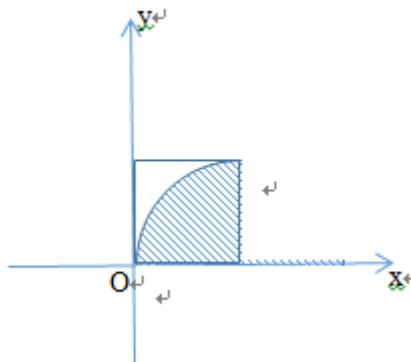
又由 $y \leq \sqrt{2x - x^2}$ ，即 $x^2 - 2x + y \leq 0$ ，即 $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ ，

表示以 $(1, 0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆在正方形内部的部分，

如图所示，其面积为 $S_1 = \frac{1}{4}\pi$ ，

由面积比的几何概型，可得概率为 $P = \frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{4}$ ，

故答案为： $\frac{\pi}{4}$ 。



【点睛】本题主要考查了几何概型的概率的计算问题，解决此类问题的步骤：求出满意条件 A

的基本领件对应的“几何度量 $N(A)$ ”，再求出总的基本领件对应的“几何度量 N

”，然后依据 $P = \frac{N(A)}{N}$ 求解，着重考查了分析问题和解答问题的能力，属于基础题.

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $2a \sin A = (2b + c) \sin B + (2c + b) \sin C$ ，其中 a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边，则角 A 的大小为_____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】

【分析】

由正弦定理和题设条件，化简得 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ，再由余弦定理，求得 $\cos A = -\frac{1}{2}$ ，即可求解.

【详解】由题意，因为 $2a \sin A = (2b + c) \sin B + (2c + b) \sin C$

由正弦定理化简得 $2a^2 = (2b + c)b + (2c + b)c$ ，整理得 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ，

又由余弦定理，可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$ ，

又因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

故答案为： $\frac{2\pi}{3}$.

【点睛】本题主要考查了正弦定理、余弦定理的应用，其中利用正弦、余弦定理可以很好地解决三角形的边角关系，娴熟驾驭定理、合理运用是解本题的关键. 通常当涉及两边及其中一边的对角或两角及其中一角对边时，运用正弦定理求解；当涉及三边或两边及其夹角时，运用余弦定理求解.

15. 平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与抛物线

$C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 交于点 O, A, B ，且 $\triangle OAB$ 的垂心为 C_2 的焦点，则 C_1 的离心率为

_____；假如 C_1 与 C_2 在第一象限内有且只有一个公共点，且 $a = \sqrt{5}$ ，那么 C_2 的方程为

_____.

【答案】 (1). $\frac{3}{2}$ (2). $x^2 = 4y$

【解析】

【分析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/888017116070006132>