河南大学附属中学 2023 年高考压轴数学试题试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 $p:\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)$，$q:x=y$ 则 **p** 是 **q** 的（　　）

A．充分而不必要条件　　**B**．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　**D**．既不充分也不必要条件

2．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，直线 l 经过点 F 且与双曲线的一条渐近线垂直，直线 l 与双曲线的左支交于不同的两点 A，B，若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则该双曲线的离心率为（　　）.

A．$\frac{\sqrt{10}}{3}$　　**B**．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　**C**．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　**D**．$\sqrt{3}$

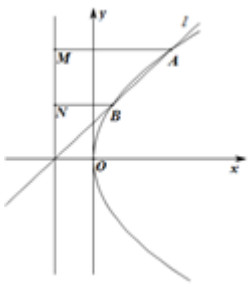
3．若复数 $\frac{2a+2i}{1+i}$（$a\in R$）是纯虚数，则复数 $2a+2i$ 在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　**B**．第二象限　　**C**．第三象限　　**D**．第四象限

4．关于圆周率 π，数学发展史上出现过许多很有创意的求法，如著名的蒲丰实验和查理斯实验.受其启发，某同学通过下面的随机模拟方法来估计 π 的值：先用计算机产生 2000 个数对 (x,y)，其中 x，y 都是区间 $(0,1)$ 上的均匀随机数，再统计 x，y 能与 1 构成锐角三角形三边长的数对 (x,y) 的个数 m；最后根据统计数 m 来估计 π 的值.若 $m=435$，则 π 的估计值为（　　）

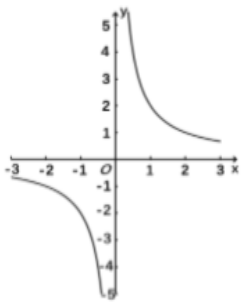
A．3.12　　**B**．3.13　　**C**．3.14　　**D**．3.15

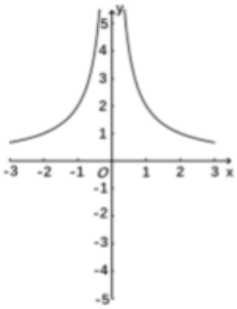
5．如图，已知直线 $l:y=k(x+1)(k>0)$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 ***A***，***B*** 两点，且 ***A***、***B*** 两点在抛物线准线上的投影分别是 ***M***，***N***，若 $|AM|=2|BN|$，则 k 的值是（　　）

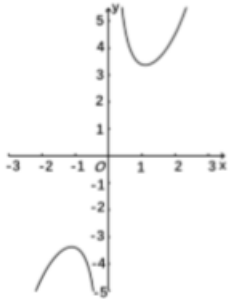


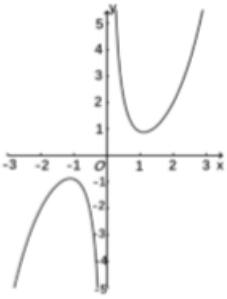
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$2\sqrt{2}$

6．函数 $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(x^{2}+1)}$ 在 $[-3,3]$ 的图象大致为(　　)

A．

B．

C．

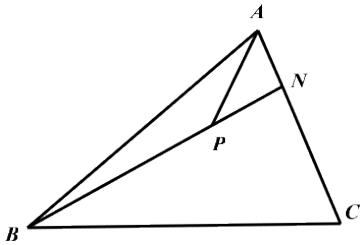
D．

7．双曲线 $\frac{□^{2}}{6}-\frac{□^{2}}{3}=1$ 的渐近线与圆$(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$相切，则 r 等于(　　)

A．$\sqrt{3}$　　B．2

C．3　　D．6

8．如图，在 ΔABC 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，则实数 m 的值为（　　）



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．1　　D．2

9．复数 z 满足 $z-1=(z+1)i$ (i 为虚数单位),则 z 的值是(　　)

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．i　　D．$-i$

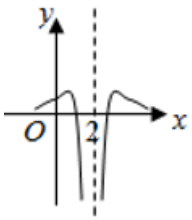
10.在 $\vee ABC$ 中，$AB=3$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$，点 D，E 分别在线段 AB，CD 上，且 $BD=2AD$，$CE=2ED$，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=$（　　）.

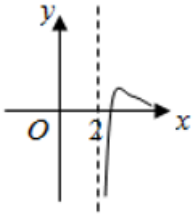
A．-3　　B．-6　　C．4　　D．9

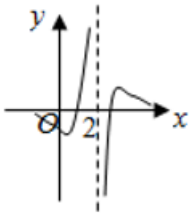
11．若复数z满足$|z|=1$，则$|z-i|$（其中i为虚数单位）的最大值为（　　）

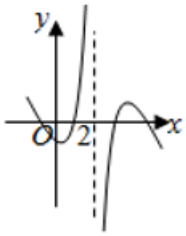
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

12．函数$□(□)=\frac{\ln(□^2-4□+4)}{(□-2)^3}$的图象可能是下面的图象(　　)

A．

B．

C．

D．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

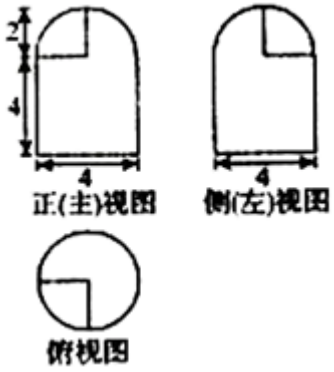
13．对定义在$[0,1]$上的函数$f(x)$，如果同时满足以下两个条件：

（1）对任意的$x\in[0,1]$总有$f(x)\geq 0$；

（2）当$x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，$x_1+x_2\leq 1$时，总有$f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)$成立.

则称函数$f(x)$称为*G*函数.若$h(x)=a\cdot 2^x-1$是定义在$[0,1]$上*G*函数，则实数*a*的取值范围为_____.

14．如图是某几何体的三视图，俯视图中圆的两条半径长为2且互相垂直，则该几何体的体积为_____.



15．设$f(x)$，$g(x)$分别是定义在R上的奇函数和偶函数，且$f(x)+g(x)=(x+1)^2-2^{x+1}$，则$f(1)-g(1)=$_____

16．已知抛物线$C:y^2=4x$，点P为抛物线C上一动点，过点P作圆$M:(x-3)^2+y^2=4$的切线，切点分别为A,B，则线段AB长度的取值范围为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）记无穷数列$\{a_n\}$的前n项中最大值为M_n，最小值为m_n，令$b_n=\frac{M_n-m_n}{2}$，则称$\{b_n\}$是$\{a_n\}$“极差数列”.

（1）若 $a_n=3n-2$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和；

（2）证明：$\{b_n\}$ 的“极差数列”仍是 $\{b_n\}$；

（3）求证：若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 也是等差数列.

18.（12 分）设函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$，其中 $a\in R$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，求 a 的值；

(Ⅱ)已知导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,\ e)$ 上存在零点，证明:当 $x\in(1,\ e)$ 时，$f(x)>-e^2$.

19.（12 分）在平面直角坐标系 *xOy* 中，直线 *l* 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+t\\ y=-\sqrt{3}t\end{cases}$（*t* 为参数），以坐标原点为极点，*x* 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，已知曲线 *C* 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

（1）求直线 *l* 的普通方程与曲线 *C* 的直角坐标方程；

（2）设点 $M(0,3)$，直线 *l* 与曲线 *C* 交于不同的两点 *A*、*B*，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

20.（12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$，左右焦点分别为 F_1，F_2，点 B 是椭圆上位于第一象限的任一点，且当 $\overrightarrow{BF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$ 时，$\left|\overrightarrow{BF_2}\right|=\frac{3}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若椭圆 C 上点 A 与点 B 关于原点 O 对称，过点 B 作 BD 垂直于 x 轴，垂足为 D，连接 AD 并延长交 C 于另一点 M，交 y 轴于点 N.

（ⅰ）求 $\triangle ODN$ 面积最大值；

（ⅱ）证明：直线 AB 与 BM 斜率之积为定值.

21.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足，$a_1=1$，$a_2=4$，且 $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求证：数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等比数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2n\cdot a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22.（10 分）若 $a>0,b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$

（1）求 a^3+b^3 的最小值；

（2）是否存在 a,b，使得 $2a+3b=6$？并说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B

【解析】

根据诱导公式化简$\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=\cos y$再分析即可.

【详解】

因为$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=\cos y$,所以 ***q*** 成立可以推出 ***p*** 成立,但 ***p*** 成立得不到 ***q*** 成立,例如$\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{3}$,而$\frac{\pi}{3}\neq\frac{5\pi}{3}$,所以 ***p*** 是 ***q*** 的必要而不充分条件.

故选：B

【点睛】

本题考查充分与必要条件的判定以及诱导公式的运用,属于基础题.

2．A

【解析】

直线l的方程为$x=\frac{b}{a}y-c$，令$a=1$和双曲线方程联立，再由$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$得到两交点坐标纵坐标关系进行求解即可.

【详解】

由题意可知直线l的方程为$x=\frac{b}{a}y-c$,不妨设$a=1$.

则$x=by-c$，且$b^2=c^2-1$

将$x=by-c$代入双曲线方程$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$中，得到$\left(b^4-1\right)y^2-2b^3cy+b^4=0$

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$

则$y_1+y_2=\frac{2b^3c}{b^4-1},y_1\cdot y_2=\frac{b^4}{b^4-1}$

由$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，可得$y_1=-2y_2$，故$\begin{cases}-y_2=\dfrac{2b^3c}{b^4-1}\\-2y_2^2=\dfrac{b^4}{b^4-1}\end{cases}$

则$8b^2c^2=1-b^4$，解得$b^2=\dfrac{1}{9}$

则$c=\sqrt{b^2+1}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

所以双曲线离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

故选：A

【点睛】

此题考查双曲线和直线相交问题，联立直线和双曲线方程得到两交点坐标关系和已知条件即可求解，属于一般性题目.

3．B

【解析】

化简复数$\dfrac{2a+2i}{1+i}$，由它是纯虚数，求得a，从而确定$2a+2i$对应的点的坐标.

【详解】

$\dfrac{2a+2i}{1+i}=\dfrac{2(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=a+1+(1-a)i$是纯虚数，则$\begin{cases}a+1=0\\1-a\neq 0\end{cases}$，$a=-1$，

$2a+2i=-2+2i$，对应点为$(-2,2)$，在第二象限.

故选：B.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查复数的概念与几何意义．本题属于基础题.

4．B

【解析】

先利用几何概型的概率计算公式算出x，y能与1构成锐角三角形三边长的概率，然后再利用随机模拟方法得到x，y能与1构成锐角三角形三边长的概率，二者概率相等即可估计出π.

【详解】

因为x，y都是区间$(0,1)$上的均匀随机数，所以有$0<x<1$，$0<y<1$，若x，y能与1构成锐角三角形三边长，

则$\begin{cases}x+y>1\\x^2+y^2>1\end{cases}$，由几何概型的概率计算公式知$P=\dfrac{1\times 1-\dfrac{\pi}{4}}{1\times 1}=1-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{435}{2000}$，

所以 $\pi = 4 \times (1 - \frac{435}{2000}) = 3.13$.

故选：B.

【点睛】

本题考查几何概型的概率计算公式及运用随机数模拟法估计概率，考查学生的基本计算能力，是一个中档题.

5．C

【解析】

直线 $y = k(x+1)(k > 0)$ 恒过定点 $P(-1,0)$，由此推导出 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$，由此能求出点 B 的坐标，从而能求出 k 的值.

【详解】

设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 $l: x = -1$，

直线 $y = k(x+1)(k > 0)$ 恒过定点 $P(-1,0)$，

如图过 *A*、*B* 分别作 $AM \perp l$ 于 *M*，$BN \perp l$ 于 *N*，

由 $|AM| = 2|BN|$，则 $|FA| = 2|FB|$，

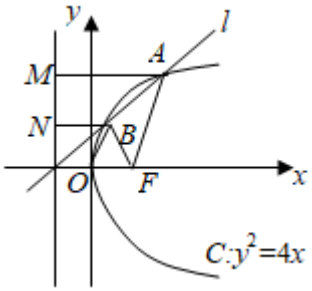
点 *B* 为 *AP* 的中点、连接 *OB*，则 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$，

$\therefore |OB| = |BF|$，点 *B* 的横坐标为 $\frac{1}{2}$，

$\therefore$点 *B* 的坐标为 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$，把 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 代入直线 $y = k(x+1)(k > 0)$，

解得 $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故选：C.



【点睛】

本题考查直线与圆锥曲线中参数的求法，考查抛物线的性质，是中档题，解题时要注意等价转化思想的合理运用，属于中档题.

6．C

【解析】

先根据函数奇偶性排除 B，再根据函数极值排除 A；结合特殊值即可排除 D，即可得解.

【详解】

函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(x^{2}+1)}$，

则 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{\ln(x^{2}+1)}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 B 选项；

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\approx\dfrac{e^{x}}{\ln x^{2}}\to+\infty$，所以排除 A 选项；

当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{e-e^{-1}}{\ln(1+1)}=\dfrac{e-e^{-1}}{\ln 2}\approx\dfrac{2.72-0.37}{0.69}\approx3.4$，排除 D 选项；

综上可知，C 为正确选项，

故选：C.

【点睛】

本题考查根据函数解析式判断函数图像，注意奇偶性、单调性、极值与特殊值的使用，属于基础题.

7．A

【解析】

由圆心到渐近线的距离等于半径列方程求解即可.

【详解】

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，圆心坐标为(3,0)．由题意知，圆心到渐近线的距离等于圆的半径 r，即 $r=$

$$\frac{\left|\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\times3-0\right|}{\sqrt{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}+1}}=\sqrt{3}.$$

答案：A

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线方程及直线与圆的位置关系，属于基础题.

8．B

【解析】

$m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 变形为 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，由 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$，转化在$\triangle ABN$中，利用$B$、$P$、$N$三点共线可得.

【详解】

解：依题：$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=3m\overrightarrow{AN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

又B，P，N三点共线，

$\therefore 3m+\frac{2}{3}=1$，解得$m=\frac{1}{9}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查平面向量基本定理及用向量共线定理求参数. 思路是(1)先选择一组基底，并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式，再通过向量的运算来解决.利用向量共线定理及向量相等的条件列方程(组)求参数的值. (2)直线的向量式参数方程：A、P、B 三点共线$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (O为平面内任一点,$t\in R$)

9．C

【解析】

直接利用复数的除法的运算法则化简求解即可.

【详解】

由$z-1=(z+1)i$得：$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=i$

本题正确选项：C

【点睛】

本题考查复数的除法的运算法则的应用，考查计算能力.

10．B

【解析】

根据题意，分析可得$AD=1$,由余弦定理求得DC的值，由

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}$可得结果.

【详解】

根据题意，$AB=3,BD=2AD$，则$AD=1$

在$\triangle ADC$中，又$AC=2$,$\angle BAC=60°$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/888021011112006136