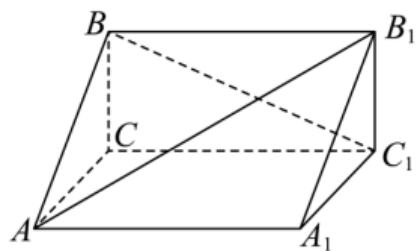


专题 19 立体几何中的角度与截面问题

一、单选题

1. (2024 届) 四川省仁寿高三上学期模拟) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BC \perp$ 面 ACC_1A_1 , $CA = CC_1 = 2CB$, 则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 ()



A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】C

【解析】在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC, AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $CC_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$,

$BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BC \perp AC$,

所以 CA, CC_1, CB 互相垂直,

以 C 为原点, 分别以 CA, CC_1, CB 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

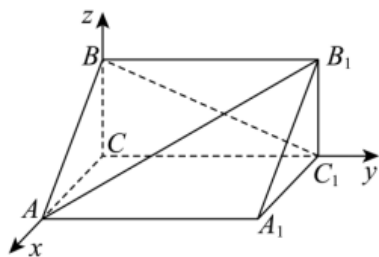
设 $CA = CC_1 = 2CB = 2$,

则 $C(0,0,0), A(2,0,0), B_1(0,2,1), B(0,0,1), C_1(0,2,0)$,

可得 $\overrightarrow{AB_1} = (-2, 2, 1), \overrightarrow{BC_1} = (0, 2, -1)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{BC_1}| \cdot |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{|4-1|}{\sqrt{9} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

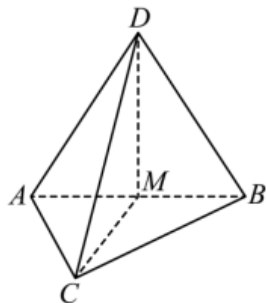


2. (2024 届内蒙古呼和浩特市高三第一次质量监测) 在四面体 $ABCD$ 中, 已知 $\triangle ABD$ 为等边三角形,

$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，斜边 $AB = 4$ ， $CD = 2\sqrt{7}$ ，则二面角 $C-AB-D$ 的大小为（ ）

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】D



【解析】

如图，取 AB 中点 M ，连接 CM ， DM

因为 $\triangle ABD$ 为等边三角形， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形

所以 $CM \perp AB$ ， $DM \perp AB$

故 $\angle CMD$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角.

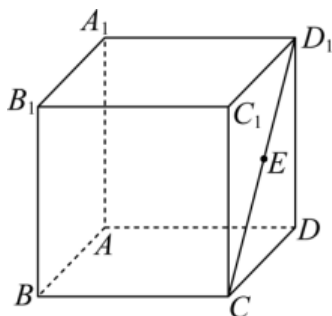
因为 $AB = 4$ ，所以 $CM = 2$ ， $DM = 2\sqrt{3}$

$$\text{所以 } \cos \angle CMD = \frac{CM^2 + DM^2 - CD^2}{2 \cdot CM \cdot DM} = \frac{4 + 12 - 28}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以 $\angle CMD = \frac{5\pi}{6}$ 即二面角 $C-AB-D$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

3. (2023 届山西省百师联盟高三下学期联考) 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 CD_1 上的动点,

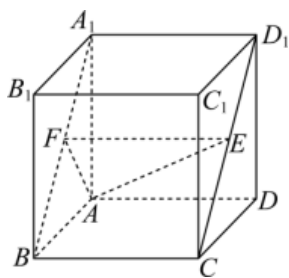
则 AE 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值不可能为（ ）



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】如图，



在 A_1B_1 上取点 F ，使得 $A_1F = D_1E$ ，连接 EF ，

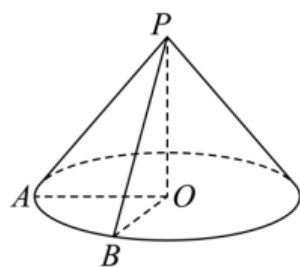
由 $BF = CE$ ， $BF \parallel CE$ 可知四边形 $FBCE$ 为平行四边形，则 $EF = BC = 2$ ，

因为 $BC \perp$ 平面 AA_1B_1B ， $BC \parallel EF$ ，所以 $EF \perp$ 平面 AA_1B_1B ，

所以 AE 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle EAF$ ， $\tan \angle EAF = \frac{EF}{AF} = \frac{2}{AF}$ ，而 $AF \in [\sqrt{2}, 2]$ 。

所以 $\tan \angle EAF \in [1, \sqrt{2}]$ 。显然 $\sqrt{3} \notin [1, \sqrt{2}]$ ，故 D 不可能。故选 D

4. (2024 届湖南省衡阳市高三上学期阶段性测试) 如图所示，圆锥底面半径为 2， O 为底面圆心， A ， B 为底面圆 O 上的点，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle PAO = \frac{\pi}{4}$ ，则直线 OA 与 PB 所成角的余弦值为 ()



A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

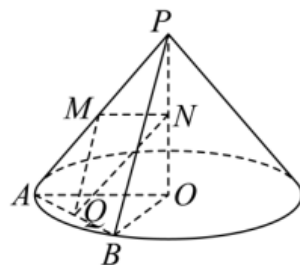
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】连接 AB ，取 AP ， AB ， PO 的中点分别为 M ， Q ， N ，连接 OQ ，



则 $MN \parallel OA$ ， $MQ \parallel PB$ ， $PO \perp$ 平面 AOB ，

所以 $\angle NMQ$ (或其补角) 为直线 OA 与 PB 所成的角，

又 $OA \subset$ 平面 AOB ， $OB \subset$ 平面 AOB ，所以 $OP \perp OA$ ， $OP \perp OB$ ，

因为 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $\angle PAO = \frac{\pi}{4}$, $OA = OB = 2$,

所以 $PO = OA = 2$, $ON = \frac{1}{2}OP = 1$, $PB = \sqrt{2}OP = 2\sqrt{2}$, $OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$,

所以 $MQ = \frac{1}{2}PB = \sqrt{2}$, $NQ = \sqrt{OQ^2 + ON^2} = 2$, $MN = \frac{1}{2}OA = 1$,

则由余弦定理得: $\cos \angle NMQ = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times 1 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以直线 OA 与 PB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 故选 A.

5. (2023 届河南省五市高三下学期第二次联考) 已知底面边长为 1 的正三棱柱既有外接球也有内切球, 圆锥 SO 是三棱柱的外接圆锥, 且三棱柱的一个底面在该圆锥的底面上, 则该外接圆锥的轴截面面积的最小值是 ()

A. $\frac{2}{3}$

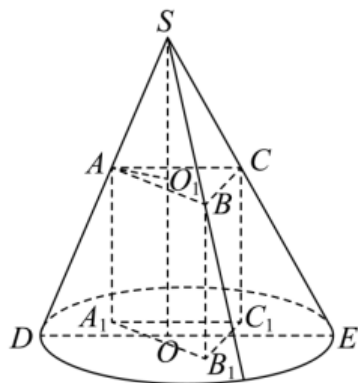
B. $\frac{\sqrt{2}+2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】C

【解析】正三棱柱内切球半径即为 $\triangle ABC$ 内切圆半径 r ,



由等面积法可知, $\frac{1}{2} \times 1 \times r \times 3 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ$, 所以 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 所以 $AA_1 = 2r = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

设 O, O_1 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心, 则 $OO_1 = AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

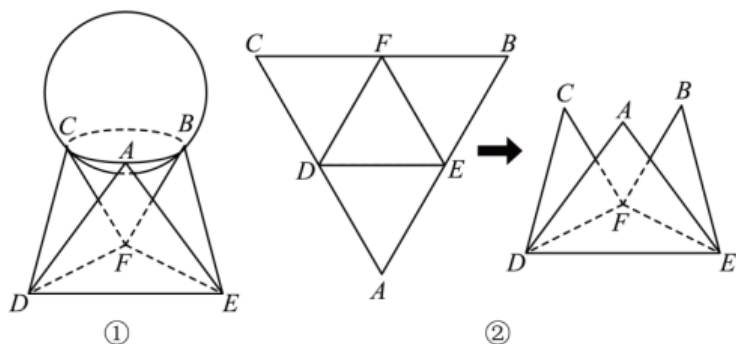
由正弦定理可得 $2AO_1 = \frac{1}{\sin 60^\circ}$, 所以 $AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

设 $SO_1 = h, DO = x$, 则 $\frac{AO_1}{DO} = \frac{SO_1}{SO}$, 所以 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{x} = \frac{h}{h + \frac{\sqrt{3}}{3}}$, 解得 $x = \frac{1}{3h} + \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以, 圆锥轴截面面积 $S_{\triangle SDE} = \frac{1}{2} DE \cdot SO = \frac{1}{2} \times 2DO \cdot SO = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9h} + \frac{\sqrt{3}h}{3} \geq \frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{9h} \times \frac{\sqrt{3}h}{3}} = \frac{4}{3}$,

当且仅当 $\frac{\sqrt{3}}{9h} = \frac{\sqrt{3}h}{3}$ ，即 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，即轴截面面积的最小值是 $\frac{4}{3}$. 故选 C

6. (2023 届江西省景德镇市高三第三次质量检测) 某地举办数学建模大赛，本次大赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成，如图①，已知球的表面积为 $\frac{32\pi}{3}$ ，托盘由边长为 8 的等边三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠形成，即面 ADE ，面 CDF ，面 BEF 都与面 DFE 垂直，如图②，则经过三个顶点 A, B, C 的球的截面圆的面积为 ()



- A. π B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{3}$ D. 2π

【答案】B

【解析】设三点 A, B, C 在底面上的射影分别为 M, P, N ,

因为面 ADE ，面 CDF ，面 BEF 都与面 DFE 垂直，

所以 M, P, N 是 DE, EF, DF 三边中点，

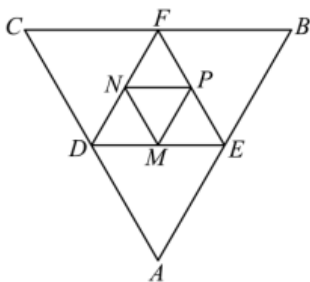
所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MPN$ 全等，且所在平面互相平行，

所以经过三个顶点 A, B, C 的球的截面圆与 $\triangle MPN$ 的外接圆相同，

由题意 $DF = EF = DE = 4$ ， $MN = MP = PN = 2$ ，

所以 $\triangle MPN$ 的外接圆的半径为 $r = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

则经过三个顶点 A, B, C 的球的截面圆的面积为 $\pi r^2 = \pi \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4\pi}{3}$. 故选 B.



7. (2024 届广东省阳江市高三上学期调研) 三棱锥 $A-BCD$ 中，

即 $\frac{1}{2} \times (4\sqrt{2})^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot h$ ，解得 $h = 4$ ，

所以直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{h}{AD} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ ，故选 A.

8. (2023 届陕西省西安市高三高考综合测试) 在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 是等边三角形，底面 ABC 是等腰直角三角形， $AB \perp BC$ ， $AC = PB = 10$ ，点 M, N, E 分别是棱 PA, PC, AB 的中点，过 M, N, E 三点的平面 α 截三棱锥 $P-ABC$ 所得截面为 Ω ，给出下列结论：

- ① 截面 Ω 的形状为正方形；
- ② 截面 Ω 的面积等于 $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ ；
- ③ 异面直线 PA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ；
- ④ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积等于 $\frac{400}{3}\pi$.

其中所有正确结论的序号是 ()

A. ①④

B. ②③

C. ①③④

D. ②③④

【答案】C

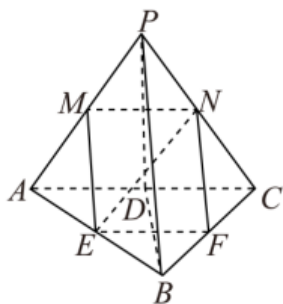
【解析】取 BC 的中点为 F ，连接 EF, NF ，

因为点 M, N, E 分别是棱 PA, PC, AB 的中点，所以 $MN \parallel AC$ ， $EF \parallel AC$ ，可得 $MN \parallel EF$ ；

又 $MN = \frac{1}{2}AC = 5$ ， $EF = \frac{1}{2}PB = 5$ ，即 $MN = EF$ ；

所以 M, N, E, F 四点共面，且四边形 $MNEF$ 为平行四边形，

取 AC 的中点为 D ，连接 PD, BD ，如下图所示：



易知 $PD \perp AC$ ，又 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 $AB \perp BC$ ，所以 $AB = BC$ ，可得 $BD \perp AC$ ；

又 $PD \cap BD = D$ ， $PD, BD \subset$ 平面 PBD ，所以 $AC \perp$ 平面 PBD ；

易知 $PB \subset$ 平面 PBD ，可得 $AC \perp PB$ ；

又 $ME \parallel PB$ ， $EF \parallel AC$ ，所以 $ME \perp EF$ ，

且 $ME = NF = \frac{1}{2}PB = 5$ ，所以四边形 $MNEF$ 为正方形，

即截面 Ω 的形状为正方形，所以①正确；

由正方形面积公式可知，四边形 $MNEF$ 的面积为 $5 \times 5 = 25$ ，即②错误；

设 $\vec{PA} = \vec{a}, \vec{PB} = \vec{b}, \vec{PC} = \vec{c}$ ，可得 $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ ，

所以 $\vec{PA} \cdot \vec{BC} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}$ ，

易知 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 10 \times 10 \times \cos 60^\circ = 50$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \times 10 \times \cos \angle APB$ ，

在 $\triangle PAB$ 中， $PA = 10, PB = 10, AB = 5\sqrt{2}$ ，所以 $\cos \angle APB = \frac{10^2 + 10^2 - (5\sqrt{2})^2}{2 \times 10 \times 10} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$ ，可得

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \times 10 \times \cos \angle APB = 75$ ；

所以 $\cos \langle \vec{PA}, \vec{BC} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c} - \vec{b}|} = \frac{50 - 75}{10 \times 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，

所以异面直线 PA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，即③正确；

易知 $PD = 5\sqrt{3}, BD = 5$ ， $PB = 10$ ，所以可得 $PD \perp BD$ ；

又 $PD \perp AC$ ，且 $BD \cap AC = D$ ， $BD, AC \subset$ 平面 ABC ，

所以 $PD \perp$ 平面 ABC ，

又 $PD \subset$ 平面 PAC ，所以平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ；

所以可得外接球球心 O 在 PD 上，设 $OD = h$ ，半径为 R ，

则 $h^2 + 5^2 = (5\sqrt{3} - h)^2 = R^2$ ，解得 $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ， $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ；

所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积等于 $4\pi R^2 = \frac{400}{3}\pi$ ，即④正确；

所有正确结论的序号是①③④. 故选 C

9. (2023 届河南省 TOP 二十名校高三下学期 3 月调研) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ， M 为 A_1B_1 中

点， P 为平面 $ABCD$ 内一动点，若平面 MPC_1 与平面 ABB_1A_1 和平面 $ABCD$ 所成锐二面角相等，则点 P 到 C 的

最短距离是 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

B. $\frac{1}{2}a$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$

D. a

【答案】C

【解析】先证明一个结论：若平面 ABC 与平面 PBC 所成二面角为 θ ，且 $PA \perp$ 平面 ABC ，则

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PBC} \cdot \cos \theta.$$

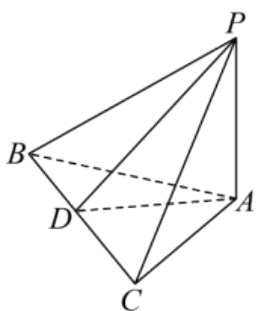
证明：作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，连 PD ，

因为 $PA \perp$ 平面 ABC ， $BC \subset$ 平面 ABC ，所以 $PA \perp BC$ ，

又 $PA, AD \subset$ 平面 PAD ， $PA \cap AD = A$ ，所以 $BC \perp$ 平面 PAD ，

因为 $PD \subset$ 平面 PAD ，所以 $BC \perp PD$ ，所以 $\angle PDA = \theta$ ，

$$\text{在直角三角形 } PAD \text{ 中, } \cos \theta = \frac{AD}{PD} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot BC}{\frac{1}{2}PD \cdot BC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PBC}}, \text{ 即 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PBC} \cdot \cos \theta.$$



设平面 MPC_1 与平面 ABB_1A_1 和平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ ，取 AB 的中点 N ，作 $PH \perp AB$ ，垂足为 H ，

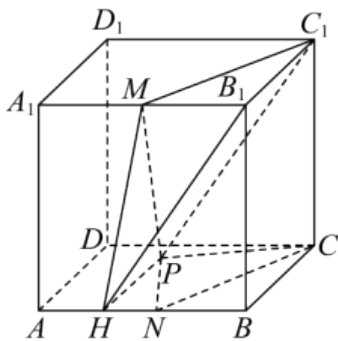
则三角形 MPC_1 在平面 $ABCD$ 内的射影是三角形 NPC ，在平面 ABB_1A_1 内的射影是三角形 MHB_1 ，

$$\text{根据以上结论得 } \frac{S_{\triangle PNC}}{S_{\triangle MPC_1}} = \cos \theta = \frac{S_{\triangle B_1MH}}{S_{\triangle MPC_1}}, \therefore S_{\triangle PNC} = S_{\triangle B_1MH} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a \times a = \frac{1}{4} a^2,$$

在 $\triangle PNC$ 中，设 NC 边上高为 h ，

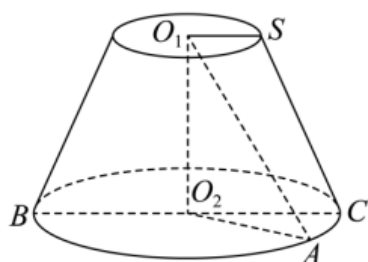
$$Q NC = \frac{\sqrt{5}}{2} a, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} a \times h = \frac{1}{4} a^2, \therefore h = \frac{\sqrt{5}}{5} a,$$

所以 P 点轨迹为与 NC 平行且距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5} a$ 的两条直线，所以 P 点到 C 的最短距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5} a$ 。



故选 C

10. (2023 届四川省成都市玉林中学高三适应性考试) 如图, 圆台 O_1O_2 的上、下底面圆半径分别为 1、2, 高 $O_1O_2 = 2\sqrt{2}$, 点 S 、 A 分别为其上、下底面圆周上一点, 则下列说法中错误的是 ()



- A. 该圆台的体积为 $\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$
- B. 直线 SA 与直线 O_1O_2 所成角最大值为 $\frac{\pi}{3}$
- C. 该圆台有内切球, 且半径为 $\sqrt{2}$
- D. 直线 AO_1 与平面 SO_1O_2 所成角正切值的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】对于 A 选项, $V = \frac{\pi}{3}(1+2+4) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$, 则 A 选项正确.

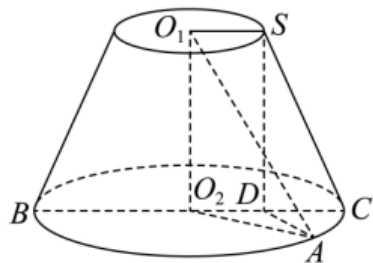
对于 B 选项, 如图 (1), 过 S 作 SD 垂直于下底面于点 D , 则 $O_1O_2 \parallel SD$,

所以直线 SA 与直线 O_1O_2 所成角即为直线 SA 与直线 SD 所成角, 即 $\angle ASD$ 为所求,

而 $\tan \angle ASD = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{2\sqrt{2}}$, 由圆的性质得, $1 \leq AD \leq 3$,

所以 $\tan \angle ASD = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{2\sqrt{2}} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4} \right]$,

因为 $\frac{3\sqrt{2}}{4} < \sqrt{3}$, $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$, 则 B 选项错误.



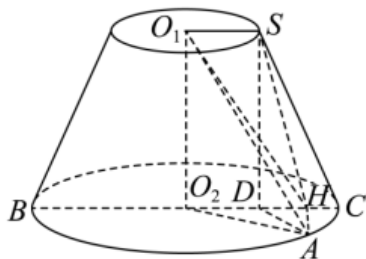
图(1)

对于 C 选, 设上底面半径为 R_1 , 下底面半径为 R_2 , 若圆台存在内切球,

则必有轴截面的等腰梯形存在内切圆, 如图 (2) 所示, 梯形的上底和下底分别为 2, 4,

高为 $2\sqrt{2}$, 易得等腰梯形的腰为 $\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$, 假设等腰梯形有内切圆,

且内切球的半径为 $\sqrt{2}$ ，则 C 选项正确；



11. (2024 届辽宁省十校联合体高三上学期调研) 已知一个棱长为 2 的正方体, 点 A, C 是其内切球上两点,

B, D 是其外接球上两点, 连接 AB, CD , 且线段 AB, CD 均不穿过内切球内部, 当四面体 $A-BCD$ 的体积取得最大值时, 异面直线 AD 与 BC 的夹角的余弦值为 () .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{13}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

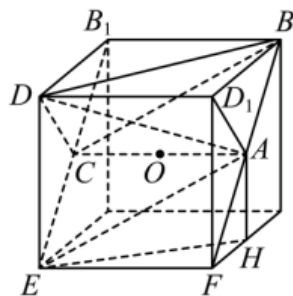
【答案】D

【解析】由正方体棱长为 2, 知其内切球的半径为 1, 外接球的半径 $\frac{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}{2} = \sqrt{3}$,

依题意知, AB, CD 最长为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1} = \sqrt{2}$, AC 最长为内切球的直径 2,

由三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, 若 a, b 为定值时, $C = \frac{\pi}{2}$ 时面积最大,

画出图形如图所示, 其中 A, C 分别是所在正方形的中心, O 是内切球与外接球的球心,



由正方体性质知 $CD \parallel AD_1$, $CD = AD_1$, $CB_1 \parallel AB$, $CB_1 = AB$,

又 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}V_{ABD_1-CB_1D} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD_1} \cdot AC$, 故此时四面体 $A-BCD$ 的体积取得最大,

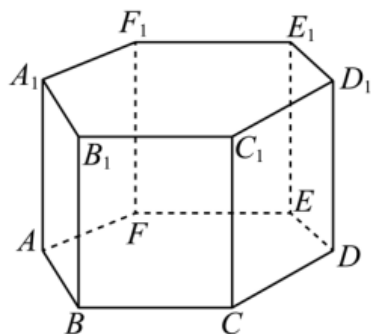
因为 $CE \parallel AB$, $CE = AB$, 所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形,

所以 $BC \parallel AE$, 所以 $\angle DAE$ 异面直线 AD 与 BC 所成的角,

在 $\triangle DAE$ 中, $DA = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$, $EA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

由余弦定理得 $\cos \angle DAE = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3}$, 故选 D

12. (2023 届河北省承德市高三下学期 4 月高考模拟) 如图, 正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的各棱长均为 1, 下列选项错误的是 ()



A. 过 A, C_1, E_1 三点的平面 α 截该六棱柱的截面面积为 $\frac{5\sqrt{39}}{12}$

B. 过 A, C_1, E_1 三点的平面 α 将该六棱柱分割成体积相等的两部分

C. 以 A 为球心, 1 为半径的球面与该六棱柱的各面的交线总长为 $\frac{5}{3}\pi$

D. 以 A 为球心, 2 为半径的球面与该六棱柱的各面的交线总长为 $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$

【答案】B

【详解】对于 A: 过点 A 作 $GH \parallel C_1E_1$, 设 $GH \cap BC = G, GH \cap EF = H$,

连接 C_1G, E_1H , 设 $C_1G \cap BB_1 = M, E_1H \cap FF_1 = N$,

则过 A, C_1, E_1 三点的平面 α 截该六棱柱的截面即为 AMC_1E_1N ,

可得 $BC \perp AG, AG = AH = \frac{1}{2}C_1E_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, GB = \frac{1}{2}, C_1G = \sqrt{GC^2 + C_1C^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

因为 $GB = \frac{1}{3}GC$, 且 $BB_1 \parallel CC_1$, 则 $MB = \frac{1}{3}CC_1 = \frac{1}{3}, C_1M = \frac{2}{3}C_1G = \frac{\sqrt{13}}{3}$,

可得 $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$,

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCDEF$, $GH \subset$ 平面 $ABCDEF$,

所以 $BB_1 \perp GH$,

$BC \cap BB_1 = B$, $BC, BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 可得 $GH \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

$C_1G \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 则 $GH \perp C_1G$,

由 $GH \parallel C_1E_1$, 则 $C_1E_1 \perp C_1G$,

连接 BF, MN , 则 $MN = BF = \sqrt{3}$,

故截面面积 $S = S_{\triangle AMN} + S_{MNE_1C_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{13}}{6} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{5\sqrt{39}}{12}$, 故 A 正确;

对于 B: 连接 CE ,

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCDEF$, $GB \subset$ 平面 $ABCDEF$,

所以 $BB_1 \perp BG$,

$BF \perp BG$, $BF \cap BB_1 = B$, $BF, BB_1 \subset$ 平面 BFF_1B_1 , 可得 $GB \perp$ 平面 BFF_1B_1 ,

则四棱锥 $A-BFNM$ 的高为 $GB = \frac{1}{2}$, 则其体积 $V_{A-BFNM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{18}$,

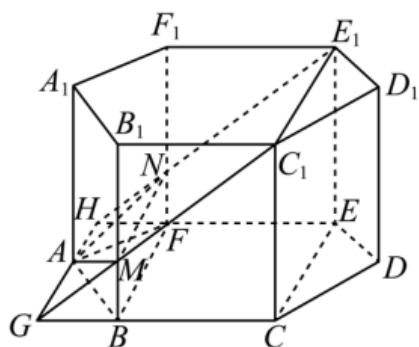
四棱柱 $BCC_1M - FEE_1N$ 的体积 $V_{BCC_1M - FEE_1N} = \frac{\left(\frac{1}{3}+1\right) \times 1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

三棱柱 $CDE - C_1D_1E_1$ 的体积 $V_{CDE - C_1D_1E_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{13}}{6} \times 1 = \frac{\sqrt{39}}{12}$,

故平面 α 下半部分的体积 $V_1 = V_{A-BFNM} + V_{BCC_1M - FEE_1N} + V_{CDE - C_1D_1E_1} = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{39}}{12} = \frac{13\sqrt{3}}{18} + \frac{\sqrt{39}}{12}$,

正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的体积 $V = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

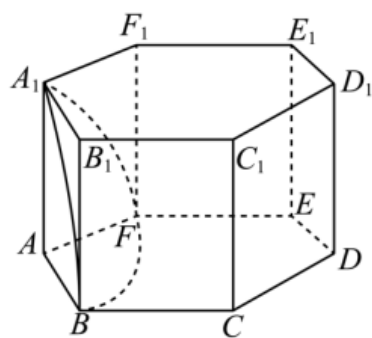
显然 $V_1 \neq \frac{1}{2}V$, 故 B 错误;



对于 C: 因为球的半径为 1, 则球只与侧面 ABB_1A_1 、侧面 AFF_1A_1 和底面 $ABCDEF$ 相交,

因为 $\angle A_1AF = \angle A_1AB = \frac{\pi}{2}$, $\angle FAB = \frac{2\pi}{3}$, 在侧面 ABB_1A_1 、侧面 AFF_1A_1 的交线为 $\frac{1}{4}$ 个圆, 在底面 $ABCDEF$ 的交线为 $\frac{1}{3}$ 个圆, 半径均为 1,

故交线的长为 $2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi \times 1 + \frac{1}{3} \times 2\pi \times 1 = \frac{5\pi}{3}$, 故 C 正确;



对于 D: 因为球的半径为 2, 显然球不与侧面 ABB_1A_1 、侧面 AFF_1A_1 相交,

由选项 A 可知: $GH \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 且 $\sqrt{AG^2 + C_1G^2} = 2$,

则球与侧面 BCC_1B_1 、侧面 EFF_1E_1 分别交于点 C_1 、 E_1 ,

连接 AC , 则 $AC \perp CD$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/888022060117006116>