2023-2024 学年浙江省杭州市高二（上）期末数学试卷（答案在最后）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\left\{x\left|x^2-5x+4\geq 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{0,1,4\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合 B，利用交集的定义可求得集合 $A\cap B$.

【详解】因为 $B=\left\{x\left|x^2-5x+4\geq 0\right.\right\}=\left\{x\left|x\leq 1\right.\text{或 }x\geq 4\right\}$，$A=\{0,1,2,3,4\}$，

则 $A\cap B=\{0,1,4\}$.

故选：D.

2. 已知 $(2+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}$ 为虚数单位，则 $|z|=$（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数的除法化简复数 z，利用复数的模长公式可求得 $|z|$ 的值.

【详解】因为 $(2+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，则 $z=\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$，故 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：C.

3. 已知平面向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(-1,1)$，且 $(m\vec{a}-\vec{b})//(\vec{a}+\vec{b})$，则 $m=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先求出 $m\vec{a}-\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$ 的坐标，再根据平面向量共线的坐标表示得到方程，解得即可.

【详解】因为 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(-1,1)$，

所以 $m\vec{a}-\vec{b}=m(2,0)-(-1,1)=(2m+1,-1)$，$\vec{a}+\vec{b}=(2,0)+(-1,1)=(1,1)$，

因为 $(m\vec{a}-\vec{b})//(\vec{a}+\vec{b})$，所以 $(2m+1)\times 1=-1\times 1$，解得 $m=-1$.

故选：A

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左，右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，若双曲线左支上存在点 P 使得 $|PF_2|=\frac{3}{2}c-2a$，则离心率的取值范围为（　　）

A. $[6,+\infty)$　　B. $(1,6]$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据双曲线的性质：双曲线左支上的点 P 到右焦点 F_2 的距离：$|PF_2|\geq a+c$ 可确定双曲线离心率的取值范围.

【详解】由题意：$\frac{3}{2}c-2a\geq a+c\Rightarrow\frac{1}{2}c\geq 3a\Rightarrow e=\frac{c}{a}\geq 6$.

故选：A

5. 已知 $2\cos^2\theta-\cos\theta=1$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\sin\theta=$（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 0　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由已知可得出 $-1<\cos\theta<1$，解方程 $2\cos^2\theta-\cos\theta=1$，可得出 $\cos\theta$ 的值，再利用同角三角函数的基本关系可求得 $\sin\theta$ 的值.

【详解】因为 $\theta\in(0,\pi)$，则 $-1<\cos\theta<1$，由已知可得 $2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$，解得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，

故 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D.

6. 数学家欧拉研究调和级数得到了以下的结果：当 x 较大时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}=\ln x+\gamma$（$x\in\mathbf{N}^*$，常数 $\gamma=0.557\ldots$）. 利用以上公式，可以估算 $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{300}$ 的值为（　　）

A. $\ln 30$　　B. $\ln 3$　　C. $-\ln 3$　　D. $-\ln 30$

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{300}=\ln 300+\gamma$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}=\ln 100+\gamma$，两式相减，根据对数的运算法则计算可得.

【详解】依题意可得$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{300}=\ln 300+\gamma$，

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}=\ln 100+\gamma$，

两式相减可得$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{300}=\ln 300-\ln 100=\ln 3$.

故选：B

7. 已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则“$\cos(\alpha-\beta)<\frac{1}{4}$”是“$\cos\alpha+\sin\beta<\frac{1}{4}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta<\cos\alpha+\sin\beta$，利用充分条件、必要条件的定义判断可得答案.

【详解】$\because\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$0<\cos\beta<1$，$0<\sin\alpha<1$，

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta<\cos\alpha+\sin\beta$，

所以由$\cos(\alpha-\beta)<\frac{1}{4}$不能推出$\cos\alpha+\sin\beta<\frac{1}{4}$，充分性不成立；

反之，$\cos\alpha+\sin\beta<\frac{1}{4}\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)<\frac{1}{4}$成立，即必要性成立；

$\therefore\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则“$\cos(\alpha-\beta)<\frac{1}{4}$”是“$\cos\alpha+\sin\beta<\frac{1}{4}$”的必要不充分条件.

故选：B.

8. 已知圆$C:x^2-2x+y^2=0$与直线$l:y=mx+2m\left(m>0\right)$，过$l$上任意一点$P$向圆$C$引切线，切点为A和$B$，若线段$AB$长度的最小值为$\sqrt{2}$，则实数$m$的值为（　　）

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{14}}{7}$