

## 第 03 讲 圆的方程

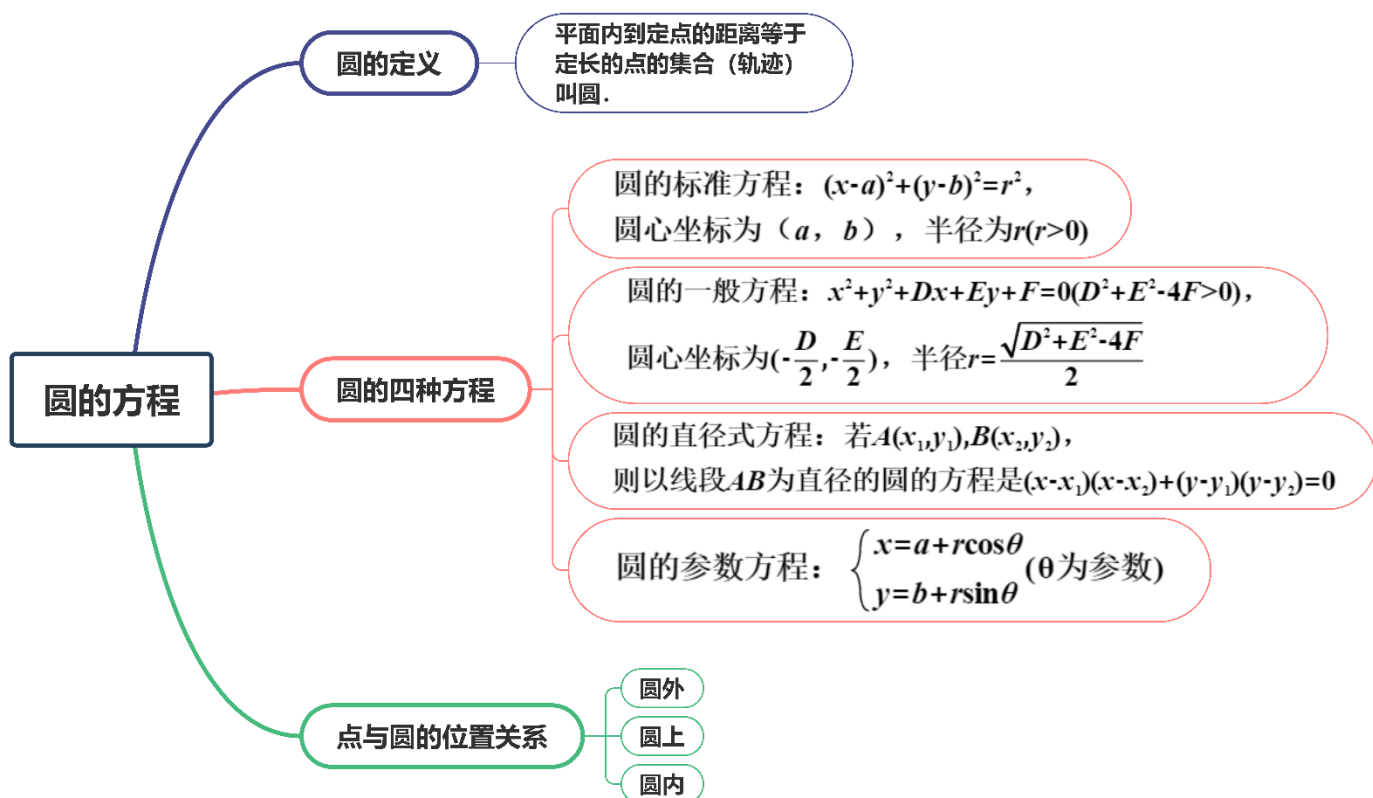
### 目录

01 考情透视·目标导航 .....	2
02 知识导图·思维引航 .....	3
03 考点突破·题型探究 .....	4
知识点 1: 圆的定义和圆的方程 .....	4
知识点 2: 点与圆的位置关系判断 .....	5
题型一: 求圆多种方程的形式 .....	5
题型二: 直线系方程和圆系方程 .....	8
题型三: 与圆有关的轨迹问题 .....	11
题型四: 用二元二次方程表示圆的一般方程的充要条件 .....	17
题型五: 点与圆的位置关系判断 .....	19
题型六: 数形结合思想的应用 .....	21
题型七: 与圆有关的对称问题 .....	25
题型八: 圆过定点问题 .....	28
04 真题练习·命题洞见 .....	31
05 课本典例·高考素材 .....	34
06 易错分析·答题模板 .....	36
易错点: 忽视圆的一般方程成立的条件 .....	36
答题模板: 求圆的方程 .....	37

考点要求	考题统计	考情分析
(1) 圆的方程 (2) 点与圆的位置关系	2024年北京卷第3题, 5分 2023年乙卷(文)第11题, 5分 2023年上海卷第7题, 5分 2022年甲卷(文)第14题, 5分 2022年乙卷(文)第15题, 5分	高考对圆的方程的考查比较稳定, 考查内容、频率、题型难度均变化不大, 备考时应熟练掌握圆的标准方程与一般方程的求法, 除了待定系数法外, 要特别要重视利用几何性质求解圆的方程.

**复习目标:**

- (1) 理解确定圆的几何要素, 在平面直角坐标系中, 掌握圆的标准方程与一般方程.
- (2) 能根据圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.



## 知识固本

## 知识点 1 : 圆的定义和圆的方程

1、平面内到定点的距离等于定长的点的集合（轨迹）叫圆。

## 2、圆的四种方程

(1) 圆的标准方程:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ , 圆心坐标为  $(a, b)$ , 半径为  $r(r > 0)$

(2) 圆的一般方程:  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$ , 圆心坐标为  $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ , 半径  $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

(3) 圆的直径式方程: 若  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则以线段  $AB$  为直径的圆的方程是  $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

(4) 圆的参数方程:

①  $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  的参数方程为  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数);

②  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r > 0)$  的参数方程为  $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数).

【诊断自测】已知点  $A(-4, -2)$ ,  $B(-4, 2)$ ,  $C(-2, 2)$ , 则  $\triangle ABC$  外接圆的方程是 ( ).

A.  $x^2 + (y-3)^2 = 20$

B.  $(x+3)^2 + y^2 = 5$

C.  $x^2 + (y+3)^2 = 5$

D.  $(x-3)^2 + y^2 = 20$

【答案】B

【解析】由题  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (0, -4) \cdot (2, 0) = 0$

得  $\triangle ABC$  是直角三角形, 且  $BA \perp BC$ ,

所以圆的半径为  $\frac{1}{2} |AC| = \frac{\sqrt{(-4+2)^2 + (-2-2)^2}}{2} = \sqrt{5}$ , 圆心为  $(-3, 0)$ ,

所以  $\triangle ABC$  外接圆的方程为  $(x+3)^2 + y^2 = 5$ .

故选：B.

## 知识点 2：点与圆的位置关系判断

(1) 点  $P(x_0, y_0)$  与圆  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  的位置关系：

①  $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2 \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆外；

②  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆上；

③  $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆内。

(2) 点  $P(x_0, y_0)$  与圆  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  的位置关系：

①  $x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F > 0 \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆外；

②  $x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆上；

③  $x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F < 0 \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆内。

**【诊断自测】** (2024·河北沧州·二模) 若点  $A(2,1)$  在圆  $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + 5 = 0$  ( $m$  为常数) 外, 则实数  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, 2)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(-\infty, -2)$       D.  $(-2, +\infty)$

**【答案】** C

**【解析】** 由题意知  $2^2 + 1^2 - 4m - 2 + 5 > 0$ ,

故  $m < 2$ ,

又由圆的一般方程  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ,

可得  $D^2 + E^2 - 4F > 0$ , 即  $(-2m)^2 + (-2)^2 - 4 \times 5 > 0$ ,

即  $m < -2$  或  $m > 2$ ,

所以实数  $m$  的范围为  $m < -2$ .

故选: C.

### 题型洞察

## 题型一：求圆多种方程的形式

**【典例 1-1】** 已知直线  $3x + 4y - 4 = 0$  与圆  $C$  相切于点  $T(0,1)$ , 圆心  $C$  在直线  $x - y = 0$  上, 则圆  $C$  的方程为 ( )

- A.  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$       B.  $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 25$

C.  $(x+3)^2+(y-3)^2=13$

D.  $(x+3)^2+(y+3)^2=25$

【答案】D

【解析】由题意，设  $C(a,a)$  ( $a \neq 0$ )，圆  $C$  的半径为  $r$ ，

$$\therefore k_{CT} = \frac{a-1}{a} = \frac{4}{3}, \text{ 解得 } a = -3,$$

所以圆心  $C(-3,-3)$ ，半径  $r = |CT| = \sqrt{(-3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$ ，

所以圆  $C$  的方程为  $(x+3)^2+(y+3)^2=25$ 。

故选：D。

【典例 1-2】(2024·高三·北京·开学考试) 圆心为  $(-1,-2)$ ，且与  $y$  轴相切的圆的方程是 ( )

A.  $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

B.  $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

C.  $(x+1)^2+(y+2)^2=1$

D.  $(x+1)^2+(y+2)^2=4$

【答案】C

【解析】由题意，圆心坐标为  $(-1,-2)$ ，可知 AB 错误；

设圆心半径为  $r$ ，且圆心  $(-1,-2)$  到  $y$  轴的距离为 1，

则由圆与  $y$  轴相切可得  $r=1$ ，

故圆的方程为： $(x+1)^2+(y+2)^2=1$ 。

故选：C。

### 【方法技巧】

(1) 求圆的方程必须具备三个独立的条件，从圆的标准方程上来讲，关键在于求出圆心坐标  $(a, b)$  和半径  $r$ ；从圆的一般方程来讲，必须知道圆上的三个点。因此，待定系数法是求圆的方程常用的方法。

(2) 用几何法来求圆的方程，要充分运用圆的几何性质，如圆心在圆的任一条弦的垂直平分线上，半径、弦心距、弦长的一半构成直角三角形等。

【变式 1-1】过点  $P(4,2)$  作圆  $x^2+y^2=4$  的两条切线，切点分别为  $A, B$ ，则  $\triangle PAB$  的外接圆方程是

( )

A.  $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

B.  $(x-4)^2+(y-2)^2=20$

C.  $(x+2)^2+(y+1)^2=5$

D.  $(x+4)^2+(y+2)^2=20$

【答案】A

【解析】由圆  $x^2+y^2=4$ ，得到圆心  $O(0,0)$ ，由题意知  $O, A, B, P$  四点共圆， $\triangle PAB$  的外接圆即四边形

$OAPB$  的外接圆，又  $P(4,2)$ ，从而  $OP$  的中点坐标  $(2,1)$  为所求圆的圆心， $\frac{1}{2}|OP| = \sqrt{5}$  为所求圆的半径，所

以所求圆的方程为  $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 。

故选：A

**【变式 1-2】** 圆心在直线  $l: x-2y-3=0$  上，且经过点  $A(2,-3)$ ， $B(-2,-5)$  的圆的方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(x+1)^2+(y+2)^2=10$

**【解析】** 圆经过点  $A(2,-3)$  和  $B(-2,-5)$ ， $k_{AB}=\frac{1}{2}$ ， $AB$  中点为  $(0,-4)$ ，

所以线段  $AB$  的垂直平分线的方程是  $y=-2x-4$  .

联立方程组  $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ y=-2x-4 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$  .

所以，圆心坐标为  $C(-1,-2)$ ，半径  $r=|CA|=\sqrt{(2+1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{10}$ ，

所以，此圆的标准方程是  $(x+1)^2+(y+2)^2=10$  .

故答案为：  $(x+1)^2+(y+2)^2=10$  .

**【变式 1-3】** (2024·陕西安康·模拟预测) 已知直线  $l_1: 2x+y-6=0$  与  $l_2: 2x+y+4=0$  均与  $eM$  相切，点  $(2,2)$  在  $eM$  上，则  $eM$  的方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x^2+(y-1)^2=5$

**【解析】** 由于直线  $l_1: 2x+y-6=0$  与  $l_2: 2x+y+4=0$  平行，且均与  $eM$  相切，

两直线之间的距离为圆的直径，即  $2r=\frac{10}{\sqrt{1^2+2^2}}\Rightarrow r=\sqrt{5}$ ，

又  $(2,2)$  在  $l_1: 2x+y-6=0$  上，所以  $(2,2)$  为切点，

故过  $(2,2)$  且与  $l_1: 2x+y-6=0$  垂直的直线方程为  $y=\frac{1}{2}(x-2)+2$ ，

联立  $\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x-2)+2 \\ 2x+y+4=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ ，

所以  $l_2: 2x+y+4=0$  与  $eM$  相切于点  $(-2,0)$ ，

故圆心为  $(2,2)$  与  $(-2,0)$  的中点，即圆心为  $(0, 1)$ ，

故圆的方程为  $x^2+(y-1)^2=5$ ，

故答案为：  $x^2+(y-1)^2=5$

**【变式 1-4】** 与直线  $x-y-4=0$  和圆  $(x+1)^2+(y-1)^2=2$  都相切的半径最小的圆的方程是 ( )

A.  $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

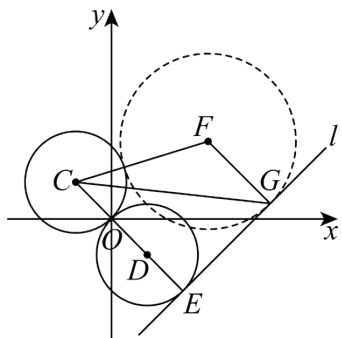
B.  $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

C.  $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

D.  $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

**【答案】** C

【解析】



如图，过圆  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$  的圆心  $C(-1,1)$  作直线  $l: x-y-4=0$  的垂线  $CE$ ，垂足为  $E$ ，则以  $OE$  为直径的圆  $D$  (设其半径为  $r$ ) 即为所求圆. 理由如下：

另作一个圆  $F$ ，与圆  $C$  相切，与直线  $l$  切于点  $G$ ，设其半径为  $r'$ ，

由图知  $|CF| + |FG| > |CG| > |CE|$ ，即  $\sqrt{2} + 2r' > \sqrt{2} + 2r$ ，即  $r > r'$ ，即圆  $D$  是符合要求的最小圆.

由点  $C(-1,1)$  到直线  $l: x-y-4=0$  的距离为  $|CE| = \frac{|-1-1-4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ ，则  $r = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ，

设点  $D(x,y)$ ，由  $CD \perp l$  可得， $\frac{y-1}{x+1} = -1$ ，即  $y = -x$  ①，

由点  $D(x,y)$  到直线  $l: x-y-4=0$  的距离等于  $\sqrt{2}$  可得  $\frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$  ②，

联立①②可解得， $x=3$  或  $x=1$ ，由图知仅  $x=1$  符合题意，

即得  $D(1,-1)$ ，故所求圆的方程为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 。

故选：C.

## 题型二：直线系方程和圆系方程

【典例 2-1】过圆  $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$  和圆  $C_2: x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0$  的交点，且圆心在直线  $2x + y + 4 = 0$  上的圆的方程为 ( )

A.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$

B.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$

C.  $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 25$

D.  $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 20$

【答案】A

【解析】经过圆  $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$  和圆  $C_2: x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0$  交点的圆可设为

$$x^2 + y^2 + 6x - 4 + \lambda(x^2 + y^2 + 6y - 28) = 0, \text{ 即 } x^2 + y^2 + \frac{6}{1+\lambda}x + \frac{6\lambda}{1+\lambda}y - \frac{4+28\lambda}{1+\lambda} = 0,$$

圆心  $\left(-\frac{3}{1+\lambda}, -\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)$  在直线  $2x + y + 4 = 0$  上，故  $-\frac{6}{1+\lambda} - \frac{3\lambda}{1+\lambda} + 4 = 0$ ，解得  $\lambda = 2$ ，

所以圆的方程为  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 。

故选：A.

**【典例 2-2】**圆  $C$  经过点  $(0, 1)$ ，且经过两圆  $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$  和圆  $C_2: x^2 + y^2 - 4y - 3 = 0$  的交点，则圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$

**【解析】** 设圆  $C$  的方程为： $x^2 + y^2 - 4x - 3 + \lambda[(x^2 + y^2 - 4x - 3) - (x^2 + y^2 - 4y - 3)] = 0$ ,

整理得到： $x^2 + y^2 - 4x - 3 + 4\lambda(y - x) = 0$ ,

因为圆  $C$  过  $(0, 1)$ ，代入该点得到： $-2 + 4\lambda = 0$  即  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,

故圆  $C$  的方程为： $x^2 + y^2 - 4x - 3 + 2(y - x) = 0$  即  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ ,

故答案为： $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ .

### 【方法技巧】

求过两直线交点（两圆交点或直线与圆交点）的直线方程（圆系方程）一般不需求其交点，而是利用它们的直线系方程（圆系方程）.

(1) 直线系方程：若直线  $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$  与直线  $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  相交于点  $P$ ，则过点  $P$  的直线系方程为： $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  ( $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ )

简记为： $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = 0$  ( $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ )

当  $\lambda_1 \neq 0$  时，简记为： $l_1 + \lambda l_2 = 0$  (不含  $l_2$ )

(2) 圆系方程：若圆  $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$  相交于  $A, B$  两点，则过  $A, B$  两点的圆系方程为： $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$  ( $\lambda \neq -1$ )

简记为： $C_1 + \lambda C_2 = 0$  ( $\lambda \neq -1$ )，不含  $C_2$

当  $\lambda = -1$  时，该圆系退化为公共弦所在直线（根轴） $l: (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$

**注意：**与圆  $C$  共根轴  $l$  的圆系  $C_\lambda: C + \lambda l = 0$

**【变式 2-1】** 经过直线  $x - 2y = 0$  与圆  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  的交点，且过点  $(1, 0)$  的圆的方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x^2 + y^2 + 3x - 12y - 4 = 0$

**【解析】** 设过已知直线和圆的交点的圆系方程为：

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 + \lambda(x - 2y) = 0$$

$\because$  所求圆过点  $(1, 0)$

$$\therefore -7 + \lambda = 0$$

解得  $\lambda = 7$

所以圆的方程为  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 + 7(x - 2y) = 0$ ，化简得  $x^2 + y^2 + 3x - 12y - 4 = 0$ .

故答案为： $x^2 + y^2 + 3x - 12y - 4 = 0$ .

**【变式 2-2】** 曲线  $3x^2 - y^2 = 3$  与  $y = x^2 - 2x - 8$  的四个交点所在圆的方程是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 49$

**【解析】** 根据题意得到:  $3x^2 - y^2 - 4(x^2 - 2x - 8) = 3 - 4y$ , 化简得到答案.  $3x^2 - y^2 = 3$ ,  $y = x^2 - 2x - 8$ , 故  $3x^2 - y^2 - 4(x^2 - 2x - 8) = 3 - 4y$ ,

化简整理得到:  $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$ , 即  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 49$ .

故答案为:  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 49$ .

**【变式 2-3】** 过圆  $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$  和  $x^2 + y^2 = 5$  的交点, 且圆心在直线  $3x + 4y - 1 = 0$  上的圆的方程为 ( )

A.  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

B.  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$ .

C.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

D.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 11 = 0$

**【答案】** A

**【解析】** 由题意设所求圆的方程为  $x^2 + y^2 - x + y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 5) = 0, (\lambda \neq -1)$ ,

即  $x^2 + y^2 - \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{1}{1+\lambda}y - \frac{2+5\lambda}{1+\lambda} = 0$ ,

圆心坐标为  $\left(\frac{1}{2(1+\lambda)}, -\frac{1}{2(1+\lambda)}\right)$ , 代入  $3x + 4y - 1 = 0$  中,

即  $\frac{3}{2(1+\lambda)} - \frac{4}{2(1+\lambda)} - 1 = 0$ , 解得  $\lambda = -\frac{3}{2}$ ,

将  $\lambda = -\frac{3}{2}$  代入  $x^2 + y^2 - \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{1}{1+\lambda}y - \frac{2+5\lambda}{1+\lambda} = 0$  中, 即  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$ ,

满足  $2^2 + (-2)^2 - 4(-11) > 0$ ,

故所求圆的方程为  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$ ,

故选: A

### 题型三: 与圆有关的轨迹问题

**【典例 3-1】** 已知定点  $B(3, 0)$ , 点  $A$  在圆  $x^2 + y^2 = 1$  上运动,  $\angle AOB$  的平分线交线段  $AB$  于点  $M$ , 则点  $M$  的轨迹方程是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$ .

**【解析】** 设  $A(m, n)$ , 则  $m^2 + n^2 = 1$ ,

设  $M(x, y)$ ,

由  $AM$  为  $\angle AOB$  的角平分线,

可得  $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{1}{3}$ ,

即有  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{MB}$ ,

可得  $(x-m, y-n) = \frac{1}{3}(3-x, 0-y)$ ,

即  $x-m = 1 - \frac{1}{3}x$ ,  $y-n = -\frac{1}{3}y$ ,

可得  $m = \frac{4}{3}x - 1$ ,  $n = \frac{4}{3}y$ ,

则  $(\frac{4}{3}x - 1)^2 + (\frac{4}{3}y)^2 = 1$ ,

即为  $(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{9}{16}$ .

故答案为:  $(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{9}{16}$ .

**【典例 3-2】**(2024·贵州毕节·三模) 已知直线  $l_1: x+ty-5=0$ , 直线  $l_2: tx-y-3t+2=0$ ,  $l_1$  与  $l_2$  相交于点  $A$ , 则点  $A$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$

**【解析】** 因为  $l_1: x+ty-5=0$ , 所以直线  $l_1$  过点  $C(5,0)$ ,

直线  $l_2: t(x-3)-y+2=0$  过点  $B(3,2)$ ,

因为  $1 \cdot t + t \cdot (-1) = 0$ , 所以  $l_1 \perp l_2$ , 设  $A(x,y)$ ,

所以  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$ , 所以  $\vec{AC} = (5-x, -y)$ ,  $\vec{AB} = (3-x, 2-y)$ ,

所以  $(5-x)(3-x) - y(2-y) = 0$ , 化简可得:  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$ .

故答案为:  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$ .

### 【方法技巧】

要深刻理解求动点的轨迹方程就是探求动点的横纵坐标  $x, y$  的等量关系, 根据题目条件, 直接找到或转化得到与动点有关的数量关系, 是解决此类问题的关键所在.

**【变式 3-1】**(2024·高三·青海西宁·期中) 已知  $A(-1,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C$  为平面内的一个动点, 且满足  $|AC| = \sqrt{2}|BC|$ , 则点  $C$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$

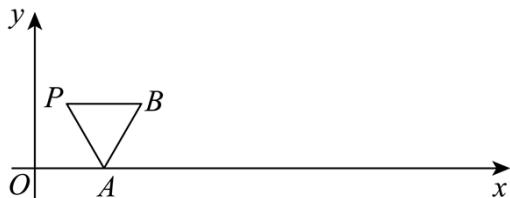
**【解析】** 依题意, 设  $C(x,y)$ , 由  $|AC| = \sqrt{2}|BC|$ , 得  $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ,

即  $(x+1)^2 + y^2 = 2[(x-1)^2 + y^2]$ , 整得得  $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ ,

所以点  $C$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ .

故答案为:  $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$

**【变式 3-2】** (2024 · 广东 · 二模) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中放置着一个边长为 1 的等边三角形  $PAB$ , 且满足  $PB$  与  $x$  轴平行, 点  $A$  在  $x$  轴上. 现将三角形  $PAB$  沿  $x$  轴在平面直角坐标系  $xOy$  内滚动, 设顶点  $P(x, y)$  的轨迹方程是  $y = f(x)$ , 则  $f(x)$  的最小正周期为\_\_\_;  $y = f(x)$  在其两个相邻零点间的图象与  $x$  轴所围区域的面积为\_\_\_.



**【答案】**  $3, \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

**【解析】** 设  $P(p, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

如图, 当三角形  $PAB$  沿  $x$  轴在平面直角坐标系  $xOy$  内滚动时,

开始时,  $P$  先绕  $A$  旋转, 当  $B$  旋转到  $B_1$  时,  $P$  旋转到  $P_1$ , 此时  $P_1(p+1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

然后再以  $B_1$  为圆心旋转, 旋转后  $P$  旋转到  $P_2$ , 此时  $P_2(p + \frac{5}{2}, 0)$ ,

当三角形再旋转时,  $P$  不旋转, 此时  $A$  旋转到  $A_2$ ,

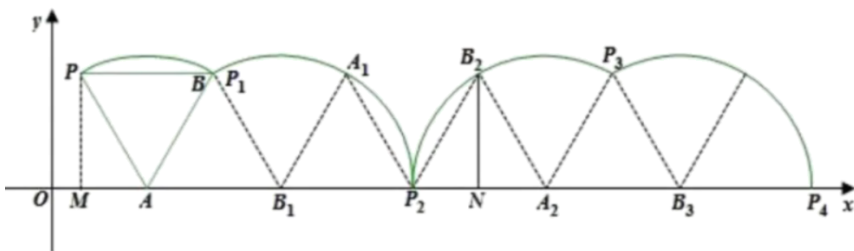
当三角形再旋转后, 必以  $A_2$  为圆心旋转, 旋转后  $P$  旋转到  $P_3$ ,

点  $P$  从开始到  $B_2$  时是一个周期, 故  $y = f(x)$  的周期为  $MN = 3$ ,

如图,  $x_{P_2}, x_{P_4}$  为  $y = f(x)$  相邻两个零点,

$y = f(x)$  在  $[x_{P_2}, x_{P_4}]$  上的图像与  $x$  轴围成的图形的面积为:

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



故答案为:  $3, \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**【变式 3-3】** 已知圆  $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$ , 过点  $N(1, 0)$  的直线  $l$  与圆  $M$  交于  $A, B$  两点,  $D$  是  $AB$  的中点, 则  $D$  点的轨迹方程为\_\_\_.

**【答案】**  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

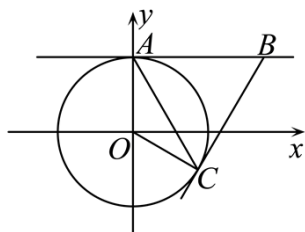
**【解析】** 圆  $M: (x-2)^2 + y^2 = 4$ ，所以圆心为  $M(2,0)$ ，半径为 2，设  $D(x,y)$ ，

由线段  $AB$  的中点为  $D$ ，可得  $MD \perp DN$ ，即有  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{ND} = (x-2, y) \cdot (x-1, y) = (x-2)(x-1) + y \cdot y = 0$ ，

即  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ，所以点  $D$  的轨迹方程为  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 。

故答案为： $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

**【变式 3-4】** 如图所示，已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  与  $y$  轴的正方向交于  $A$  点，点  $B$  在直线  $y=2$  上运动，过点  $B$  作圆  $O$  的切线，切点为  $C$ ，则  $\triangle ABC$  的垂心  $H$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_。



**【答案】**  $x^2 + (y-2)^2 = 4, (x \neq 0)$

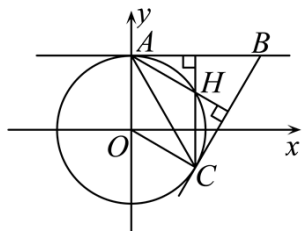
**【解析】** 设  $H(x,y)$ ， $C(x',y')$ ，连结  $AH$ ， $CH$ ，  
 则  $AH \perp BC$ ， $CH \perp AB$ ， $BC$  是切线  $OC \perp BC$ ，  
 $\therefore OC \parallel AH$ ， $CH \parallel OA$ ， $OA = OC$ ，

$\therefore$  四边形  $AOCH$  是菱形。

$\therefore |CH| = |OA| = 2$ ，得  $\begin{cases} y' = y - 2 \\ x' = x \end{cases}$ ，

又  $C(x',y')$ ，满足  $(x')^2 + (y')^2 = 4$ ，

所以  $x^2 + (y-2)^2 = 4, (x \neq 0)$  即是所求轨迹方程。



故答案为： $x^2 + (y-2)^2 = 4, (x \neq 0)$

**【变式 3-5】** 点  $P(1,0)$ ，点  $Q$  是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上的一个动点，则线段  $PQ$  的中点  $M$  的轨迹方程是 ( )

A.  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

B.  $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

$$C. x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$D. \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 4$$

【答案】A

【解析】设点  $M$  的坐标为  $M(x, y)$ ，因为  $M$  点是线段  $PQ$  的中点，可得  $Q(2x-1, 2y)$ ，点  $Q$  在圆上，

$$\text{则 } (2x-1)^2 + (2y)^2 = 4, \text{ 即 } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

故选：A.

【变式 3-6】已知动点  $M$  与两个定点  $O(-1, 0)$ ， $A(2, 0)$  的距离之比为 1:2，则动点  $M$  的轨迹方程为\_\_.

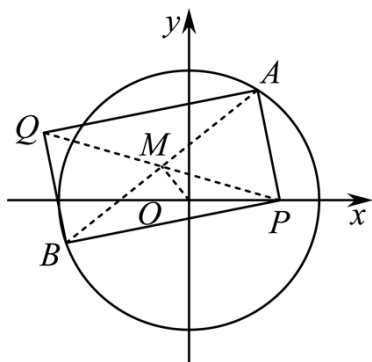
$$\text{【答案】 } x^2 + y^2 + 4x = 0$$

【解析】设点  $M(x, y)$ ，则  $2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ ，整理得  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ ，所以动点  $M$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ .

故答案为： $x^2 + y^2 + 4x = 0$ .

【变式 3-7】已知  $P(4, 0)$  是圆  $x^2 + y^2 = 36$  内的一点， $A, B$  是圆上两动点，且满足  $\angle APB = 90^\circ$ ，求矩形  $APBQ$  顶点  $Q$  的轨迹方程.

【解析】连接  $AB, PQ$ ，设  $AB$  与  $PQ$  交于点  $M$ ，如图所示.



因为四边形  $APBQ$  为矩形，所以  $M$  为  $AB, PQ$  的中点，连接  $OM$ .

由垂径定理可知  $OM \perp AB$ ,

设  $M(x_M, y_M)$ ,

$$\text{由此可得 } |AM|^2 = |OA|^2 - |OM|^2 = 36 - (x_M^2 + y_M^2). \quad \textcircled{1}$$

又在  $\text{Rt}\triangle APB$  中，

$$\text{有 } |AM| = |PM| = \sqrt{(x_M - 4)^2 + y_M^2}. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } x_M^2 + y_M^2 - 4x_M - 10 = 0,$$

故点  $M$  的轨迹是圆.

因为点  $M$  是  $PQ$  的中点, 设  $Q(x, y)$ ,

$$\text{则 } x_M = \frac{x+4}{2}, y_M = \frac{y}{2},$$

代入点  $M$  的轨迹方程中得,

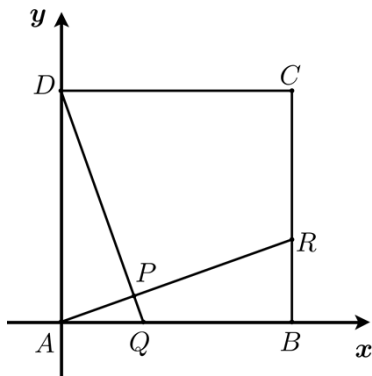
$$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{x+4}{2} - 10 = 0,$$

整理得  $x^2 + y^2 = 56$ , 即为所求点  $Q$  的轨迹方程.

**【变式 3-8】** 在边长为 1 的正方形  $ABCD$  中, 边  $AB$ 、 $BC$  上分别有一个动点  $Q$ 、 $R$ , 且  $|BQ|=|CR|$ . 求直线  $AR$  与  $DQ$  的交点  $P$  的轨迹方程.

**【解析】** 分别以  $AB$ ,  $AD$  边所在的直线为  $x$  轴、 $y$  轴建立直角坐标系.

如图所示, 则点  $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1,1)$ 、 $D(0,1)$ ,



设动点  $P(x, y)$ ,  $Q(t, 0)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ),

由  $|BQ|=|CR|$  知:  $|AQ|=|BR|$ , 则  $R(1, t)$ .

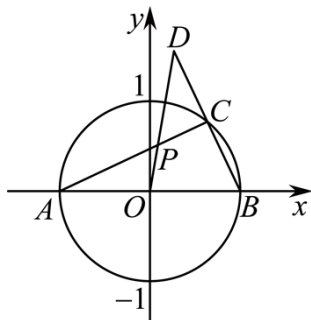
当  $t \neq 0$  时, 直线  $AR$ :  $y = tx$  ①, 直线  $DQ$ :  $\frac{x}{t} + y = 1$ , 则  $1 - y = \frac{x}{t}$  ②,

① $\times$ ②得:  $y(1-y) = tx \cdot \frac{x}{t}$ , 化简得  $x^2 + y^2 - y = 0$ .

当  $t = 0$  时, 点  $P$  与原点重合, 坐标  $(0,0)$  也满足上述方程.

故点  $P$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 - y = 0$  ( $0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ).

**【变式 3-9】** 如图, 已知点  $A(-1, 0)$  与点  $B(1, 0)$ ,  $C$  是圆  $x^2 + y^2 = 1$  上异于  $A, B$  两点的动点, 连接  $BC$  并延长至  $D$ , 使得  $|CD|=|BC|$ , 求线段  $AC$  与  $OD$  的交点  $P$  的轨迹方程.



【解析】设动点  $P(x, y)$ ，由题意可知  $P$  是  $\triangle ABD$  的重心，由  $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ ，  
令动点  $C(x_0, y_0)$ ，则  $D(2x_0-1, 2y_0)$ ，

$$\text{由重心坐标公式得} \begin{cases} x = \frac{-1+1+2x_0-1}{3} \\ y = \frac{2y_0}{3} \end{cases},$$

$$\text{则} \begin{cases} x_0 = \frac{3x+1}{2} \\ y_0 = \frac{3y}{2} (y_0 \neq 0) \end{cases} \text{代入 } x^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{整理得} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} (y \neq 0)$$

$$\text{故所求轨迹方程为} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} (y \neq 0).$$

【变式 3-10】已知点  $A(2,0)$  是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上的定点，点  $B(1,1)$  是圆内一点， $P$ 、 $Q$  为圆上的动点。

(1) 求线段  $AP$  的中点  $M$  的轨迹方程。

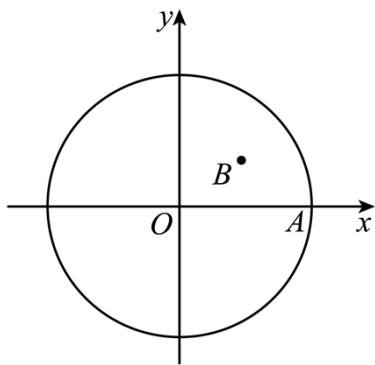
(2) 若  $\angle PBQ = 90^\circ$ ，求线段  $PQ$  中点  $N$  的轨迹方程。

【解析】(1) 设  $AP$  中点为  $M(x, y)$ ，

由中点坐标公式可知， $P$  点坐标为  $(2x-2, 2y)$

$\because P$  点在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上， $\therefore (2x-2)^2 + (2y)^2 = 4$ 。

故线段  $AP$  中点的轨迹方程为  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 。



(2) 设  $PQ$  的中点为  $N(x, y)$ ，在  $\text{Rt}\triangle PBQ$  中， $|PN| = |BN|$ ，

设  $O$  为坐标原点，则  $ON \perp PQ$ ，所以  $|OP|^2 = |ON|^2 + |PN|^2 = |ON|^2 + |BN|^2$ ，

所以  $x^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 。

故线段  $PQ$  中点的轨迹方程为  $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/888061117014006125>