2023年北京市丰台区高考数学一模试卷

一、选择题。共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，则$A\cup B=$（　　）

A．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　　B．$\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C．$\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

2．设a，b，$c\in\mathbf{R}$，且$a>b$，则（　　）

A．$ac>bc$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$a^2>b^2$　　D．$a-c>b-c$

3．已知圆$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$与y轴相切，则$r=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

4．已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=\log_2 x$，则$f(-2)=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

5．在平面直角坐标系xOy中，若角α以x轴非负半轴为始边，其终边与单位圆交点的横坐标为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则α的一个可能取值为（　　）

A．$-60°$　　B．$-30°$　　C．45°　　D．60°

6．在$\triangle ABC$中，若$2\cos A\sin B=\sin C$，则该三角形的形状一定是（　　）

A．等腰三角形　　B．等边三角形

C．直角三角形　　D．等腰直角三角形

7．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则“对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不是充分也不是必要条件

8．已知抛物线C：$y^2=2px$（$p>0$）的顶点是坐标原点O，焦点为F，A是抛物线C上的一点，点A到x轴的距离为$2\sqrt{2}$．过点A向抛物线C的准线作垂线、垂足为B．若四边形$ABOF$为等腰梯形，则p的值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

9．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，存在常数t（$t>0$），使得对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x+t)=f(x)$，当$x\in[0,t)$时，$f(x)=|x-\frac{t}{2}|$．若$f(x)$在区间（3，4）上单调递减，则t的最小值为（　　）

A．3　　B．$\frac{8}{3}$　　C．2　　D．$\frac{8}{5}$

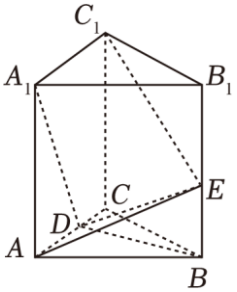
10．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AC=2$，$BC=1$，$AA_1=2$，点D在棱AC上，点E在棱BB_1上，给出下列三个结论：

①三棱锥$E-ABD$的体积的最大值为$\frac{2}{3}$；

②A_1D+DB 的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

③点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

其中所有正确结论的个数为（　　）



A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题。共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．若复数$\frac{a+i}{3-i}(a\in R)$是纯虚数，则 a=_____.

12．已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=$_____.

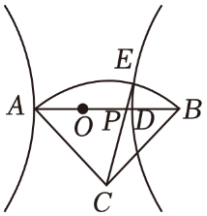
13．从﹣2，﹣1，1，2，3 这 5 个数中任取 2 个不同的数，记“两数之积为正数”为事件 A，“两数均为负数为事件 B．则 $P(B|A)$=_____.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1，x<a，\\(x-2)^2，x\geq a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为_____；a 的最大值为_____.

15．三等分角是“古希腊三大几何问题”之一，目前尺规作图仍不能解决这个问题．古希腊数学家 *Pappus*（约 300～350 前后）借助圆弧和双曲线给出了一种三等分角的方法：如图，以角的顶点 C 为圆心作圆交角的两边于 A，B 两点；取线段 AB 的三等分点 O，D；以 B 为焦点，A，D 为顶点作双曲线 H．双曲线 H 与弧 AB 的交点记为 E，连接 CE，则$\angle BCE=\frac{1}{3}\angle ACB$.

①双曲线 H 的离心率为_____；

②若$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，$|AC|=3\sqrt{2}$，CE 交 AB 于点 P，则$|OP|$=_____.

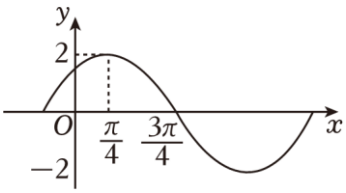


三、解答题。共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（14 分）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的部分图象如图所示.

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）若函数$g(x)=f(x)\sin x$，求$g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值．



17．（14分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面是边长为2的菱形，AC交BD于点O，$\angle BAD=60°$，$PB=PD$．点E是棱PA的中点，连接OE，OP．

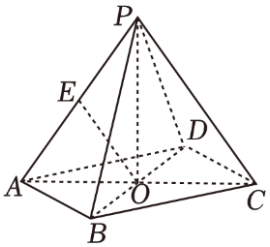
（1）求证：$OE\parallel$平面PCD；

（2）若平面PAC与平面PCD的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，再从条件①，条件②这两个条件中选择一个作为已知，求线段OP的长．

条件①：平面$PBD\perp$平面$ABCD$；

条件②：$PB\perp AC$．

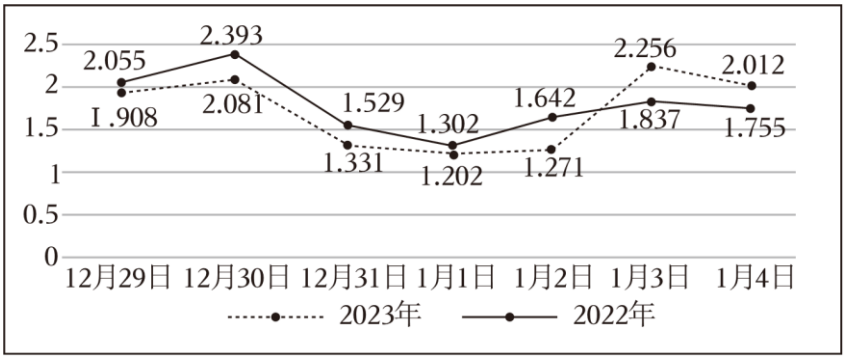
注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．



18．（14分）交通拥堵指数（*TPI*）是表征交通拥堵程度的客观指标，*TPI*越大代表拥堵程度越高．某平台计算*TPI*的公式为：$TPI=\frac{\text{实际行程时间}}{\text{畅通行程时间}}$，并按*TPI*的大小将城市道路拥堵程度划分为如下表所示的4个等级：

TPI	[1，1.5）	[1.5，2）	[2，4）	不低于4
拥堵等级	畅通	缓行	拥堵	严重拥堵

某市2023年元旦及前后共7天与2022年同期的交通高峰期城市道路*TP*1的统计数据如图：



（1）从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，求这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率；

（2）从 2023 年元旦及前后共 7 天中任取 3 天，将这 3 天中交通高峰期城市道路 *TPI* 比 2022 年同日 *TPI* 高的天数记为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

（3）把 12 月 29 日作为第 1 天，将 2023 年元旦及前后共 7 天的交通高峰期城市道路 *TPI* 依次记为 a_1，a_2，…，a_7，将 2022 年同期 *TPI* 依次记为 b_1，b_2，…，b_7，记 $c_i=a_i-b_i$（$i=1,2,\cdots,7$），$\overline{c}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{n}c_i$．请直接写出$|c_i-\overline{c}|$取得最大值时 i 的值．

19．（14 分）已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为 A（0，1），焦距为 2．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）过点 P（2，0）的直线与椭圆 E 交于 B，C 两点，过点 B，C 分别作直线 l：$x=t$ 的垂线（点 B，C 在直线 l 的两侧）．垂足分别为 M，N，记△BMP，△MNP，△CNP 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，试问：是否存在常数 t，使得 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列？若存在，求出 t 的值．若不存在，请说明理由．

20．（14 分）已知函数$f(x)=x+\frac{a}{e^x}(a>0)$．

（1）求函数 f（x）的极值；

（2）若函数 f（x）有两个不相等的零点 x_1，x_2．

（i）求 a 的取值范围；

（ii）证明：$x_1+x_2>2\ln a$．

21．（15 分）已知集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,2n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 4$），对于集合 S_n 的非空子集 A．若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a，b，c，使得 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 均属于 A，则称集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”．

（1）试判断集合 $A_1=\{3,4,5\}$，$A_2=\{3,5,7\}$是否为集合 S_4 的“期待子集”；（直接写出答案，不必说明理由）

（2）如果一个集合中含有三个元素 x，y，z，同时满足①$x<y<z$，②$x+y>z$，③$x+y+z$ 为偶数．那么称该集合具有性质 P．对于集合 S_n 的非空子集 A，证明：集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”的充要条件是集合 A 具有性质 P；

（3）若 S_n（$n\geqslant 4$）的任意含有 m 个元素的子集都是集合 S_n 的“期待子集”，求 m 的最小值．

2023年北京市丰台区高考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题。共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，则$A\cup B=$（　　）

A．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　　B．$\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C．$\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

解：因为集合$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，所以$A\cup B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$．

故选：D．

2．设a，b，$c\in\mathbf{R}$，且$a>b$，则（　　）

A．$ac>bc$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$a^2>b^2$　　D．$a-c>b-c$

解：$\because a>b$，$\therefore a-c>b-c$，因此D正确．

$c\leqslant 0$时，A不正确；$a>0>b$时，B不正确；取$a=-1$，$b=-2$，C不正确．

故选：D．

3．已知圆$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$与y轴相切，则$r=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

解：由圆$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$的方程可得圆心的坐标（2，-3），

再由圆与y轴相切，可得半径$r=2$，

故选：C．

4．已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=\log_2 x$，则$f(-2)=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

解：因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，

当$x>0$时，$f(x)=\log_2 x$，

所以$f(-2)=-f(2)=-\log_2 2=-1$．

故选：A．

5．在平面直角坐标系xOy中，若角α以x轴非负半轴为始边，其终边与单位圆交点的横坐标为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则α的一个可能取值为（　　）

A．$-60°$　　B．$-30°$　　C．45°　　D．60°

解：依题意可得$cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\alpha=30°+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$或$\alpha=-30°+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以α的一个可能取值为$-30°$．

故选：B．

6．在△ABC中，若$2\cos A\sin B=\sin C$，则该三角形的形状一定是（　　）

A．等腰三角形　　B．等边三角形

C．直角三角形　　D．等腰直角三角形

解：∵在△ABC中，$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

∴$2\cos A\sin B=\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)=0$，

∵A，$B\in(0,\pi)$，

∴$A-B\in(-\pi,\pi)$，

∴$A-B=0$，即$A=B$，则△ABC为等腰三角形．

故选：A．

7．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则“对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不是充分也不是必要条件

解：数列$\{a_n\}$中，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$，则$S_n=S_{n-1}+a_n>S_{n-1}$，$n\geqslant 2$；

所以数列$\{S_n\}$是递增数列，充分性成立；

当数列$\{S_n\}$为递增数列时，$S_n>S_{n-1}$，$n\geqslant 2$；

即$S_{n-1}+a_n>S_{n-1}$，所以$a_n>0$，

如数列-1，2，2，2，…；不满足题意，必要性不成立；

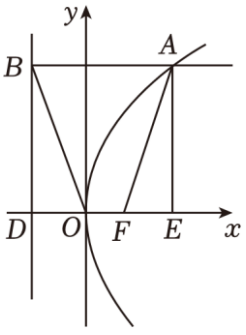
所以“对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的充分不必要条件．

故选：A．

8．已知抛物线C：$y^2=2px$（$p>0$）的顶点是坐标原点O，焦点为F，A是抛物线C上的一点，点A到x轴的距离为$2\sqrt{2}$．过点A向抛物线C的准线作垂线、垂足为B．若四边形$ABOF$为等腰梯形，则p的值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

解：如图所示：



过点A（不妨设为第一象限点）向x轴作垂线、垂足为E，

设准线交 x 轴于 D，

因为四边形 $ABOF$ 为等腰梯形，

所以$|OB|=|AF|$，$\angle FOB=\angle OFA$，

所以$\angle DOB=\angle EFA$，

又$\angle BDO=\angle AEF=90°$，

所以$\triangle BDO\cong\triangle AEF$，

所以$|OD|=|FE|=\frac{p}{2}$，

所以$|DE|=|DO|+|OF|+|FE|=\frac{3p}{2}$，

所以$|AB|=|DE|=\frac{3p}{2}$，

由抛物线的定义可得：$|AF|=|AB|=\frac{3p}{2}$，

在直角三角形 AEF 中，$|AF|=\frac{3p}{2}$，$|EF|=\frac{p}{2}$，$|AE|=y_A=2\sqrt{2}$，

由勾股定理可得：$(\frac{p}{2})^2+(2\sqrt{2})^2=(\frac{3p}{2})^2$，解得 $p=2$.

故选：C.

9．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，存在常数 t（$t>0$），使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+t)=f(x)$，当 $x\in[0,t)$ 时，$f(x)=|x-\frac{t}{2}|$．若 $f(x)$ 在区间（3，4）上单调递减，则 t 的最小值为（　　）

A．3　　B．$\frac{8}{3}$　　C．2　　D．$\frac{8}{5}$

解：因为存在常数 t（$t>0$），使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+t)=f(x)$，

所以函数的周期为 t，

当 $x\in[0,t)$ 时，函数$f(x)=|x-\frac{t}{2}|$在$[0,\frac{t}{2})$单调递减，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，函数$f(x)=|x-\frac{t}{2}|$在$[(n-1)t,\frac{(2n-1)t}{2})(n\in N^*)$上单调递减，

因为 $f(x)$ 在区间（3，4）上单调递减，

所以$\begin{cases}nt\leq 3\\ \frac{(2n+1)t}{2}\geq 4\end{cases}$，

故$\begin{cases}n\leq\frac{3}{t}\\ 2n+1\geq\frac{8}{t}\end{cases}$，

所以$\frac{8}{3}\leq t\leq 3$，

所以 t 的最小值为$\frac{8}{3}$.

故选：B．

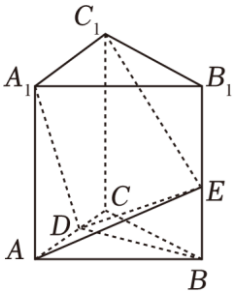
10．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=2$，$BC=1$，$AA_1=2$，点 D 在棱 AC 上，点 E 在棱 BB_1 上，给出下列三个结论：

①三棱锥 $E-ABD$ 的体积的最大值为$\frac{2}{3}$；

②A_1D+DB 的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

③点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

其中所有正确结论的个数为（　　）



A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

对于①：因为点 E 在棱 BB_1 上 $BB_1=AA_1=2$，所以 $BE\in[0，2]$，又$V_{E-ABD}=\frac{1}{3}BE\cdot S_{\triangle ABD}$，

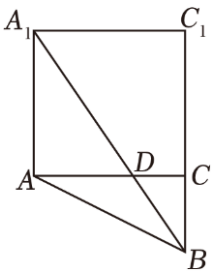
又 $AC\perp BC$，$AC=2$，$BC=1$，点 D 在棱 AC 上，所以 $AD\in[0，2]$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}AD\in[0，1]$，

所以$V_{E-ABD}=\frac{1}{3}BE\cdot S_{\triangle ABD}\le\frac{2}{3}$，当且仅当 D 在 C 点、E 在 B_1 点时取等号，故①正确；

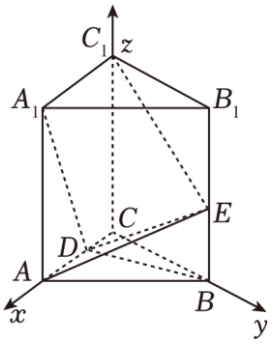
对于②：如图将△ABC 翻折到与矩形 ACC_1A_1 共面时连接 A_1B 交 AC 于点 D，此时 A_1D+DB 取得最小值，

因为 $A_1C_1=CC_1=2$，$BC=1$，所以 $BC_1=3$，所以$A_1B=\sqrt{{A_1C_1}^2+C_1B^2}=\sqrt{13}$，

即 A_1D+DB 的最小值为$\sqrt{13}$，故②错误；



对于③：如图建立空间直角坐标系，



设 D（a，0，0），$a\in[0,2]$，E（0，1，c），$c\in[0,2]$，C_1（0，0，2），

所以$\vec{C_1D}=(a,0,-2)$，$\vec{C_1E}=(0,1,c-2)$，

则点D到直线C_1E的距离$d=\sqrt{|\vec{C_1D}|^2-(\frac{\vec{C_1D}\cdot\vec{C_1E}}{|\vec{C_1E}|})^2}=\sqrt{a^2+4-(\frac{-2(c-2)}{\sqrt{(c-2)^2+1}})^2}=\sqrt{a^2+4-\frac{4(c-2)^2}{(c-2)^2+1}}$，

当 c=2 时$d=\sqrt{a^2+4}\geq 2$，

当 0≤c<2 时 0<（c﹣2）^{2}≤4，$\frac{1}{4}\leq\frac{1}{(c-2)^2}$，$1+\frac{1}{(c-2)^2}\geq\frac{5}{4}$，则$0<\frac{4}{1+\frac{1}{(c-2)^2}}\leq\frac{16}{5}$，

所以当$\frac{4(c-2)^2}{(c-2)^2+1}$取最大值$\frac{16}{5}$，且 a^2=0 时$d_{min}=\sqrt{4-\frac{16}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

即当 D 在 C 点 E 在 B 点时点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故③正确；

故选：C.

二、填空题。共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．若复数$\frac{a+i}{3-i}(a\in R)$是纯虚数，则 a=__$\frac{1}{3}$__.

解：$\frac{a+i}{3-i}=\frac{(a+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3a-1+(a+3)i}{10}$，$\therefore\begin{cases}3a-1=0\\a+3\neq 0\end{cases}$，解得 a=$\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$.

12．已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则$\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ =__4__.

解：在正方形 $ABCD$ 中，$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$，即有$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\vec{AB}\cdot(\vec{AB}+\vec{AD})=\vec{AB}^2+\vec{AB}\cdot\vec{AD}$=4+0=4.

故答案为：4.

13．从﹣2，﹣1，1，2，3 这 5 个数中任取 2 个不同的数，记“两数之积为正数”为事件 A，“两数均为负数为事件 B．则 $P(B|A)$ =__$\frac{1}{4}$__.

解：从﹣2，﹣1，1，2，3 这 5 个数中任取 2 个不同的数有$C_5^2=10$种取法，

其中满足两数之积为正数的有$C_2^2+C_3^2=4$种取法，

满足两数之积为正数且两数均为负数的有$C_2^2=1$种取法，

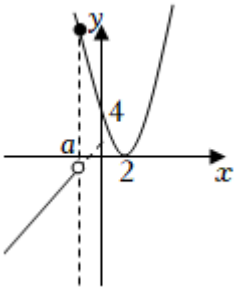
所以$P(A)=\frac{4}{10}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，

所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}$.

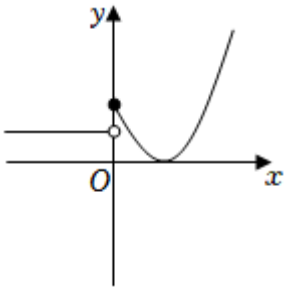
故答案为：$\frac{1}{4}$

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1，x<a，\\(x-2)^2，x\geq a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为 __0__；a 的最大值为 __1__.

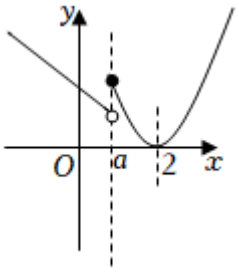
解：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，不满足题意，



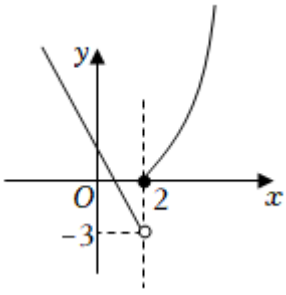
当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，满足题意；



当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，要使得函数有最小值，需满足 $-a^2+1\geq 0$，解得：$0<a\leq 1$；



当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，不满足题意，



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/888070140065006024