

专题 09 三角函数拆角与恒等变形归类

题型盘点 · 直击高考

目录

题型一：诱导公式.....	1
题型二：辅助角：特殊角型.....	2
题型三：辅助角：非特殊角型.....	3
题型四： $\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cos x$ 型转化.....	4
题型五：齐次式转化.....	5
题型六：拆角：互补型拆角---缺.....	5
题型七：拆角：互余型拆角.....	6
题型八：拆角：二倍角型拆角.....	7
题型九：拆角：30 度型拆角.....	8
题型十：拆角：60 度型拆角.....	8
题型十一：拆角：正切型.....	9
题型十二：拆角：分式型.....	10
题型十三：对偶型恒等变形求值.....	11
题型十四：拆角求最值.....	11
题型十五：韦达定理型恒等变形求值.....	12
题型十六：恒等变形求角.....	13

题型突围 · 精准提分

题型一：诱导公式

指 | 点 | 迷 | 津

诱导公式可简记为：**奇变偶不变，符号看象限**。

“奇”“偶”指的是“ $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ ”中的 k 是奇数还是偶数。

“变”与“不变”是指函数的名称的变化，若 k 是奇数，则正、余弦互变；若 k 为偶数，则函数名称不变。

1. (23-24 高三·浙江·模拟) 已知锐角 $\alpha (\alpha \neq 50^\circ)$ 满足 $3\cos(140^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(100^\circ + \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$ ，则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. (23-24 高三·浙江宁波·模拟) 已知 $\cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha)$ ，求 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

3. (15-16 高三·吉林长春·模拟) 设 $\cos(-80^\circ) = m$ ，那么 $\tan 100^\circ =$

- A. $\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ B. $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ C. $\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$ D. $-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

4. (安徽省阜阳市 2023-2024 学年高三模拟质量统测数学试题) 若角 α 满足 $\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = 2\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha)$ ，则

$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) =$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

5. (2024·广东·二模) $\tan 7.5^\circ - \tan 82.5^\circ + 2\tan 15^\circ =$ ()

- A. -2 B. -4 C. $-2\sqrt{3}$ D. $-4\sqrt{3}$

题型二：辅助角：特殊角型

指 | 点 | 迷 | 津

辅助角

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, 其中 $\tan\varphi = \frac{b}{a}$. (不记正切这个, 要会推导非特殊角的辅助角)

1. (2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ B. $\left[\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right]$ C. $\left[\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right]$ D. $\left[\frac{7}{6}, 2\right]$

2. (23-24 高三·四川·阶段练习) 若函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ 在区间 $[0, a], [a, 2a]$ 上的值域分别为 $[m, n], [p, q]$, 则下列命题错误的是 ()

- A. 若 $[m, n] = [p, q] = [-1, 1]$, 则 a 的最小值为 $\frac{4\pi}{3}$
 B. 若 $[m, n] = [p, q]$, 则 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$
 C. 若 $m \geq q$, 则 a 的取值范围为 $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$
 D. 若 $n \leq p$, 则 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{2\pi}{9}\right]$

3. (22-23 高三·广西南宁·模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin^2\frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2}\sin\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\omega > 0$), 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上无零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, +\infty\right)$ B. $\left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right]$ C. $\left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right)$ D. $\left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right] \cup [1, +\infty)$

4. (22-23 高三·江西·阶段练习) 已知函数 $f(x) = 2\sin x |\cos x| + \sqrt{3}\cos 2x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期是 π B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称
 C. $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 4 个极值点 D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上单调递减

5. (23-24 高三·辽宁·模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x$, 若关于 x 的方程 $f(x) - 1 = 0$ 在区间 $(0, 2\pi]$

上有且只有四个不相等的实数根，则正数 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{6}\right]$ C. $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{6}\right)$ D. $\left[\frac{3}{2}, \frac{13}{6}\right)$

题型三：辅助角：非特殊角型

指 | 点 | 迷 | 津

辅助角

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right] ; \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

(1) 正弦形式 $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta)$: $\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha \pm \beta)$,

其中: $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(2) 余弦形式 $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \beta)$: $\cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha \mp \beta)$,

其中: $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{辅助角范围} \quad -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \alpha + b \cos \alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

1. (22-23 高三 上海宝山·阶段练习) 若 $\tan \theta = \frac{b}{a} \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$,

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) (0 \leq \varphi < 2\pi)$, 下列判断错误的是 ()

- A. 当 $a > 0, b > 0$ 时, $\varphi = \theta$ B. 当 $a > 0, b < 0$ 时, $\varphi = \theta + 2\pi$
C. 当 $a < 0, b > 0$ 时, $\varphi = \theta + \pi$ D. 当 $a < 0, b < 0$ 时, $\varphi = \theta + 2\pi$

2. (2023·河南·模拟预测) 若关于 x 的方程 $\sin 2x + 2 \cos 2x = -2$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的解 α, β , 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. (23-24 高三·江西赣州·模拟) 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上两点. 若 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = -1$, 则 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 的取值范围是 ()

A. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B. $[-1, 1]$

C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

D. $[-2, 2]$

4. (2023·四川雅安·一模) 已知函数 $f(x) = 3\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$, 设 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$, 则 $\tan\left(4x_0 - \frac{2\pi}{3}\right)$ 等于 ()

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

5. (22-23 高三 辽宁大连·模拟) 已知函数 $f(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x$ ($a > 0, b > 0, \omega > 0$) 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调, 且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, 则不等式 $f(x) + a > 0$ 的解集是 ()

A. $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$

B. $\left(-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$

C. $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$

D. $\left(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right) (k \in \mathbf{Z})$

题型四: $\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cos x$ 型转化

指 | 点 | 迷 | 津

$\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cos x$

的函数中一般可设 $t = \sin x \pm \cos x$ 进行换元. 换元时注意新元的取值范围.

$\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cdot \cos x$ 之间的互化关系

1. (23-24 高三 · 湖北武汉·模拟) 函数 $y = \sin x - \cos x + 2\sin x \cos x$ 的最大值为 ()

A. $\frac{5}{4}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $1 + \sqrt{2}$

2. (23-24 高三 · 辽宁大连·阶段练习) 若 $\sin\theta, \cos\theta$ 是方程 $x^2 - mx + m = 0$ 的两根, 则 m 的值为 ()

A. $1 - \sqrt{2}$

B. $1 + \sqrt{2}$

C. $1 \pm \sqrt{2}$

D. $-1 - \sqrt{2}$

3. (2024·全国·模拟预测) 已知 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{4}{7}$, 则 $\frac{2\sin^2\alpha+1+\cos 2\alpha-2\tan\alpha}{\sin\alpha}=(\quad)$
- A. $-\frac{112\sqrt{2}}{17}$ B. $-\frac{56\sqrt{2}}{17}$ C. $-\frac{224\sqrt{2}}{17}$ D. $-\frac{28\sqrt{2}}{17}$
4. (23-24 高三·江苏苏州·阶段练习) 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$, 则 $\sin(2025\pi-2\alpha)$ 的值为 $(\quad)$
- A. $2+2\sqrt{2}$ B. $2-2\sqrt{2}$ C. $2\pm 2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}\pm 2$
5. (23-24 高三·湖北武汉·模拟) 已知 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 则函数 $y=\sin\theta-\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$ 的值域为 $(\quad)$
- A. $[-1,1]$ B. $\left[-1-\sqrt{2},\frac{5}{4}\right]$ C. $\left[1,\frac{5}{4}\right]$ D. $\left[-1,\frac{5}{4}\right]$

题型五：齐次式转化

指 | 点 | 迷 | 津

正切齐次求值型

给正切，利用正余弦一次分式齐次特征，可以同除余弦化为正切

二次型求正切，充分运用“1”的代换：

$$(1) x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

1. (2024·新疆·一模) 已知: $\sin(20^\circ-\theta)+\sin(20^\circ+\theta)+\sin(40^\circ-\theta)=0$, 则 $\tan\theta=(\quad)$
- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
2. (23-24 高三 辽宁大连·模拟) 已知 α, β 均为锐角, $\sin\alpha=2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$, 则 $\tan\alpha$ 取得最大值时, $\tan(\alpha+\beta)$ 的值为 $(\quad)$
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 1

3. (20-21 高三·河南新乡·阶段练习) 函数 $y = \frac{-1 + \sin x}{\sin x + \cos x} \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 的最大值和最小值分别为 ()

- A. 1, -1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$ D. 0, -1

4. (2024·全国·模拟预测) 已知 $\frac{2 - 2\cos\theta}{\sin\theta} = 3$, 则 $\frac{1 - \cos\theta - 2\sin\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta} =$ ()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $-\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

5. (23-24 高三江苏南京·模拟) 已知 $\sin\alpha + 2\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$ ()

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

题型六：拆角：互补型拆角---缺

指 | 点 | 迷 | 津

角度“互补”与“广义互补余”可以用诱导公式转化：

1. “互补”：两个复合型角度相加为 180° ，可以用诱导公式转化 $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

2. “广义互补”：两个复合型角度的和或差为 180° 或 360° ，可以用诱导公式转化

1. (2022 秋·陕西商洛·高三陕西省山阳中学校联考) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}$, 则 $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

2. (2023 春·浙江宁波·高三校考阶段练习) 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = -\frac{2}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{6\pi}{7} + x\right)$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. 若 $\sin\left(-\frac{\pi}{7}-\theta\right)=\frac{3}{4}$, 则 $\sin\left(\frac{6\pi}{7}-\theta\right)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

4. (山东省青岛市青岛中学 2022-2023 学年 10 月月考) 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$, 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

题型七：拆角：互余型拆角

指 | 点 | 迷 | 津

角度“互余”与“广义互余”可以用诱导公式转化：

1. “互余”：两个复合型角度相加为 90° ，可以用诱导公式转化
- $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
- $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

1. (23-24 高三·河南洛阳·模拟) 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{12}\right)=$ ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

2. (23-24 高三 广东梅州·模拟) 已知 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=$ ()

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. (23-24 高三下·山东威海·阶段练习) 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$, 则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$ ()

A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

4. (2024·浙江·模拟预测) 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) =$ ()

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (2024·河南信阳·模拟预测) 若 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) =$ ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\pm\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

题型八：拆角：二倍角型拆角

指 | 点 | 迷 | 津

二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\text{降幂公式: } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

1. (2024·江苏连云港·模拟预测) 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{\cos 2\theta}{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} =$ ()

A. $\frac{15}{2}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $\frac{15}{7}$ D. $\frac{15}{8}$

2. (23-24 高三·四川眉山·阶段练习) 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{3\pi}{14}\right)$ 的值为 ()

A. $\frac{5}{8}$ B. $-\frac{5}{8}$ C. $\frac{\sqrt{39}}{8}$ D. $-\frac{\sqrt{39}}{8}$

3. (23-24 高三·江西·阶段练习) 已知角 α 满足 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{8}) = -\frac{1}{3}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ ()

A. $\frac{7}{9}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$

4. (23-24 高三·江苏连云港·模拟) 已知 $\sin(\beta + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\cos(2\beta - \frac{2\pi}{3}) =$ ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (2024·浙江·三模) 已知 $\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$, 则 $\cos(2\theta + \frac{\pi}{3}) =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

题型九：拆角：30 度型拆角

指 | 点 | 迷 | 津

复合型角度的和与差，如果是与 30° ， 45° 或者 60° 等特殊角终边相同，则可以借助特殊角的函数值
来拆角求值

1. (23-24 高三·江苏盐城·模拟) 化简 $\frac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ 值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. (2024 高三·全国·专题练习) $\tan 70^\circ \cos 10^\circ (\sqrt{3} \tan 20^\circ - 1)$ 等于 ()

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

3. (2024·陕西西安·一模) $\frac{\cos 55^\circ + \sin 25^\circ \sin 30^\circ}{\cos 25^\circ}$ 等于 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

4 (23-24 高三·重庆·模拟) $\frac{1-2\sin^2 5^\circ}{2\sin 10^\circ} - 2\cos 10^\circ = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

5. (22-23 高三·河南·模拟) $\frac{2\sin 40^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$ 的值为 ()

A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

题型十：拆角：60 度型拆角

指 | 点 | 迷 | 津

常见的变角技巧有：

$$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta),$$

$$2\beta = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right),$$

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta,$$

1. (23-24 高三·湖南湘潭·阶段练习) $\frac{(\sin 50^\circ + \sin 70^\circ)^2}{1 + \cos 20^\circ}$ 的值为 ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

2. (23-24 高三·内蒙古赤峰·阶段练习) 计算 $\frac{(\cos 310^\circ + \cos 110^\circ)^2}{1 - \cos 20^\circ}$ 的值为 ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

3. (2024·河北沧州·二模) 化简 $\frac{\cos 20^\circ - \sin 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 60^\circ} = (\quad)$

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. (2024·全国·模拟预测) $\frac{\sin 80^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 25^\circ} - \frac{\sqrt{6}}{2 \tan 25^\circ} = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. (23-24 高三·湖南·阶段练习) $2\cos 80^\circ - \cos 20^\circ = (\quad)$

A. $\sqrt{3}\sin 20^\circ$

B. $\sin 20^\circ$

C. $-\sqrt{3}\sin 20^\circ$

D. $-\sin 20^\circ$

题型十一：拆角：正切型

指 | 点 | 迷 | 津

正切型公式：

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (T_{(\alpha-\beta)})$$

1. (23-24 高三·重庆大足·阶段练习) 设 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \alpha = m \tan \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 若满足条件的 α 与 β 存在且唯一, 则 $\tan \alpha \tan \beta = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 4

2. (2024·福建泉州·模拟预测) 已知 $\sin(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan \alpha - \tan \beta = (\quad)$

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{6}{5}$

3. (23-24 高三下·江苏镇江·模拟) 已知 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$, 则 $\tan\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $\frac{3}{22}$ B. $\frac{13}{18}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{13}{22}$

4. (2024·福建泉州·二模) 若 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \alpha = m \tan \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 且 α 与 β 存在且唯一, 则 $\tan \alpha + m \tan \beta =$ ()

- A. 2 B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

5. (2024 高三·全国·专题练习) 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 则 $2\alpha - \beta =$ ()

- A. $-\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$

题型十二：拆角：分式型

指 | 点 | 迷 | 津

分式型求值, 主要方向是把分数的分子分母“因式分解”, 再通过“约分”来达到求值的目的。

所以, 通过“和、差化积”思维, 利用“因式分解的重要技巧: 正余余正, 余余正正公式”, 化成积的

1. (23-24 高三·湖南长沙·阶段练习) 求值: $\frac{2\cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. (23-24 高三·四川成都·模拟) 求值 $\frac{\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) \cos 80^\circ}{\sqrt{1 - \cos 20^\circ}} =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. (23-24 高三·辽宁·模拟) 化简 $(\sqrt{3} \tan 40^\circ - 1) \sin 80^\circ \cos 160^\circ \tan 50^\circ$ 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$

4. (2021·广西·一模) $\frac{\sin^2 42^\circ \cos^2 12^\circ}{3 \cos 36^\circ + 1} =$ ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

5. (2023·全国·模拟预测) 化简: $\frac{1 - \sqrt{3} \tan 10^\circ}{\sin 10^\circ} =$ ()

- A. 4 B. 2 C. $\tan 20^\circ$ D. $\sin 20^\circ$

题型十三：对偶型恒等变形求值

指 | 点 | 迷 | 津

常见的对称型结构:

1. (2024·全国·模拟预测) 已知 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$, $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} =$ ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $-\frac{9}{4}$ D. $-\frac{4}{9}$

2. (2024·山西晋中·三模) 已知 $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{3}{2}$, $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. (2024·山东·模拟预测) 已知 $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{1}{2}$, $\cos 2x - \cos 2y = \frac{1}{4}$, 则 $\sin(x-y) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

4. (23-24 高三·江苏连云港·模拟) 已知 $\sin \alpha + \cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha + \sin \beta = -\frac{1}{3}$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ ()

- A. $\frac{13}{18}$ B. $-\frac{11}{18}$ C. $-\frac{13}{18}$ D. $-\frac{13}{9}$

5. (22-23 高三·江苏徐州·模拟) 已知 $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{13}{72}$ B. $\frac{13}{72}$ C. $-\frac{59}{72}$ D. $\frac{59}{72}$

题型十四：拆角求最值

1. (23-24 高三·湖南·阶段练习) 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $3\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta$, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值是 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{7}$

2. (2014 高三·全国·竞赛) 若 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 x, y 满足关系式 $\sin x \cos y + 2\sin y \cos x = 0$, 则 $\tan(x+y)$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. (2024 高三·江苏·专题练习) $\triangle ABC$ 中, $\sin(2A+B) = 2\sin B$, 则 $\tan A + \tan C + \frac{2}{\tan B}$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

4. (23-24 高三下·新疆乌鲁木齐·阶段练习) 已知 α, β 均为锐角, 且满足 $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin \beta} = 2 \cos \alpha$, 则 $\alpha - \beta$ 的最大值为 ()

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

5. (2024·山西·模拟预测) 已知 $\cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha + \beta)$, $\tan \alpha > 0$, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值为 ()

A. -4

B. -3

C. $\sqrt{3}$

D. 2

题型十五：韦达定理型恒等变形求值

指 | 点 | 迷 | 津

若 $\sin \theta, \cos \theta$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个不相等的实根, 则:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \geq 0 \\ \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{b}{a}, \sin \alpha \cos \alpha = \frac{c}{a} \\ (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - 2 \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

1. (21-22 高三·贵州遵义·阶段练习) 若 $\sin \theta, \cos \theta$ 是方程 $4x^2 + 2mx + m = 0$ 的两根, 则 m 的值为

A. $1 + \sqrt{5}$

B. $1 - \sqrt{5}$

C. $-1 - \sqrt{5}$

D. $-1 + \sqrt{5}$

2. (22-23 高三·北京西城·阶段练习) 已知 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - x - m = 0$ 的两根, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha =$ _____, $m =$ _____.

3. (2023 高三·全国·专题练习) 已知 $\sin \theta, \cos \theta$ 是方程 $2x^2 - mx + 1 = 0$ 的两根, 则 $\frac{\sin \theta}{1 + \frac{1}{\tan \theta}} + \frac{\cos \theta}{1 + \tan \theta}$ _____.

4. (21-22 高三·天津·模拟) 已知 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 是方程 $3x^2 + 4x - 1 = 0$ 的两根, 则 $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} =$ _____.

5. (2022·江苏南通·一模) 已知 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 是方程 $3x^2 + 5x - 7 = 0$ 的两根, 则 $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} =$ _____.

题型十六：恒等变形求角

指 | 点 | 迷 | 津

求复合型角,

1. 以给了函数值的角度为基角来拆角。

1. (23-24 高三·辽宁辽阳·模拟) 已知 α , $\beta \in (0, \pi)$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{10}$, 则 $\alpha - \beta =$ ()

A. $-\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4}$ 或 $-\frac{3\pi}{4}$

2. (23-24 高三·江苏徐州·模拟) 已知 α , β , $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha$, $\cos \alpha + \cos \gamma = \cos \beta$, 则 ()

A. $\sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}$ B. $\sin(\beta + \alpha) = \frac{1}{2}$ C. $\alpha - \gamma = 2\beta$ D. $\alpha + \gamma = 2\beta$

3. (2024·黑龙江双鸭山·模拟预测) 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{7}$, 且 $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 ()

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

4. (23-24 高三·浙江·模拟) 已知 α, β 为钝角, 且 $\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $\alpha + \beta =$ ()

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{5\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

5. (23-24 高三·河南·阶段练习) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $(1 + \sin 2\alpha) \sin \frac{\pi}{7} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{14} \cos 2\alpha$, 则 $\alpha =$ ()

A. $\frac{3\pi}{14}$

B. $\frac{5\pi}{28}$

C. $\frac{\pi}{7}$

D. $\frac{\pi}{14}$

参考答案与试题解析

专题 09 三角函数拆角与恒等变形归类



目录

题型一：诱导公式	1
题型二：辅助角：特殊角型	3
题型三：辅助角：非特殊角型	7
题型四： $\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cos x$ 型转化	11
题型五：齐次式转化	13
题型六：拆角：互补型拆角---缺	15
题型七：拆角：互余型拆角	17
题型八：拆角：二倍角型拆角	18
题型九：拆角：30 度型拆角	20
题型十：拆角：60 度型拆角	21
题型十一：拆角：正切型	23
题型十二：拆角：分式型	25
题型十三：对偶型恒等变形求值	27
题型十四：拆角求最值	29

题型十五：韦达定理型恒等变形求值	31
题型十六：恒等变形求角	33



题型突围 · 精准提分

题型一：诱导公式

指 | 点 | 迷 | 津

诱导公式可简记为：奇变偶不变，符号看象限。

“奇”“偶”指的是“ $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ ”中的 k 是奇数还是偶数。

“变”与“不变”是指函数的名称的变化，若 k 是奇数，则正、余弦互变；若 k 为偶数，则函数名称不变。

1. (23-24 高三·浙江·模拟) 已知锐角 $\alpha (\alpha \neq 50^\circ)$ 满足 $3\cos(140^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(100^\circ + \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$ ，则 $\cos 2\alpha =$ ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【分析】根据题意，结合三角函数的诱导公式和两角差的余弦公式，化简得到 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，再利用余弦的倍角公式，即可求解。

【详解】由 $3\cos(140^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(100^\circ + \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$ ，

可得 $3\cos(180^\circ - 40^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(180^\circ - 80^\circ + \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$ ，

可得 $-3\cos(40^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(80^\circ - \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$ ，

所以 $-3\cos(40^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(10^\circ + \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$

可得 $-3\cos(40^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos[30^\circ - (20^\circ - \alpha)] = \sin(\alpha - 20^\circ)$

即 $-3\cos(40^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(20^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}\sin(20^\circ - \alpha) = \sin(\alpha - 20^\circ)$ ，

可得 $-3\cos(40^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2}\sin(\alpha - 20^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha - 20^\circ) = \sqrt{3}\sin(\alpha - 20^\circ - 30^\circ)$

$= -\sqrt{3}\sin(50^\circ - \alpha) = -\sqrt{3}\cos(40^\circ + \alpha)$ ，

所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = 2\cos \alpha - 1 = 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 - 1 = -\frac{1}{3}$.

故选: B.

2. (23-24 高三·浙江宁波·模拟) 已知 $\cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha)$, 求 $\tan \alpha =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】利用三角函数诱导公式化简已知等式可得 $\cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha) + \cos(40^\circ + \alpha)$, 再利用两角和差的余弦公式结合同角三角函数关系化简可得 $\tan \alpha = \frac{\cos 20^\circ - 2\cos 40^\circ}{\sin 20^\circ}$, 继而利用三角恒等变换, 化简求值, 即得答案.

【详解】由题意知, $\cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha)$

$$\text{即 } -\cos(40^\circ + \alpha) + \cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha),$$

$$\text{故 } \cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha) + \cos(40^\circ + \alpha),$$

$$\text{即 } \cos 20^\circ \cos \alpha - \sin 20^\circ \sin \alpha = 2\cos 40^\circ \cos \alpha,$$

$$\text{故 } \cos 20^\circ \cos \alpha - 2\cos 40^\circ \cos \alpha = \sin 20^\circ \sin \alpha,$$

$$\text{即 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos 20^\circ - 2\cos 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos(30^\circ - 10^\circ) - 2\cos(30^\circ + 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ + \frac{3}{2}\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sin(10^\circ - 30^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{-\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -\sqrt{3},$$

故选: D

【点睛】关键点睛: 解答本题的关键在于利用三角函数诱导公式以及两角和差的公式化简得出 $\tan \alpha$ 的表达式之后, 要利用拆角的方法, 继而结合三角恒等变换公式, 化简求值即可.

3. (15-16 高三·吉林长春·模拟) 设 $\cos(-80^\circ) = m$, 那么 $\tan 100^\circ =$

A. $\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

B. $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

C. $\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

D. $-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

【答案】B

【详解】试题分析: 由诱导公式得 $\cos(-80^\circ) = \cos 80^\circ = m$, $\therefore \sin 80^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 80^\circ} = \sqrt{1 - m^2}$,

$$\therefore \tan 80^\circ = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}, \therefore \tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}, \text{ 故答案为 B.}$$

考点: 1、三角函数的诱导公式; 2、同角三角函数的基本关系.

4. (安徽省阜阳市 2023-2024 学年高三模拟质量统测数学试题) 若角 α 满足 $\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = 2\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha)$, 则 $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) =$ ()

A. $-\frac{4}{5}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【分析】根据给定条件, 利用诱导公式求出 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6})$, 再利用二倍角的余弦公式, 结合齐次式法求值.

【详解】由 $\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = 2\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha)$, 得 $\cos[\frac{\pi}{2} + (\alpha - \frac{\pi}{6})] = 2\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$,

即 $-\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = 2\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$, 则 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = -2$

$$\text{所以 } \cos(2\alpha - \frac{\pi}{3}) = \cos 2(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\cos^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\cos^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{1 - \tan^2(\alpha - \frac{\pi}{6})}{1 + \tan^2(\alpha - \frac{\pi}{6})} = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = -\frac{3}{5}.$$

故选: B

5. (2024·广东·二模) $\tan 7.5^\circ - \tan 82.5^\circ + 2\tan 15^\circ =$ ()

A. -2

B. -4

C. $-2\sqrt{3}$

D. $-4\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】利用切化弦的思想, 结合诱导公式及二倍角的正余弦公式计算得解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \tan 7.5^\circ - \tan 82.5^\circ + 2\tan 15^\circ &= \frac{\sin 7.5^\circ}{\cos 7.5^\circ} - \frac{\sin 82.5^\circ}{\cos 82.5^\circ} + 2\tan 15^\circ \\ &= \frac{\sin 7.5^\circ}{\cos 7.5^\circ} - \frac{\cos 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ} + 2\tan 15^\circ = \frac{\sin^2 7.5^\circ - \cos^2 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ \cos 7.5^\circ} + 2\tan 15^\circ \\ &= -\frac{\cos 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 15^\circ} + \frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{2(\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{-4\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = -4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

故选: D

题型二: 辅助角: 特殊角型

指 | 点 | 迷 | 津

辅助角

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, 其中 $\tan\varphi = \frac{b}{a}$. (不记正切这个, 要会推导非特殊角的辅助角)

1. (2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ B. $\left[\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right]$ C. $\left[\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right]$ D. $\left[\frac{7}{6}, 2\right]$

【答案】C

【分析】根据函数结构特征利用三角恒等变换公式将函数解析式化为一角一函数形式, 再结合三角函数的图象与性质进行求解即可.

【详解】法一: 由题 $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 令 $\pi + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

因为 $\omega > 0$, 所以 $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 所以 $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$ 且 $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \geq \pi$,

得 $\frac{5}{6} + 4k \leq \omega \leq \frac{11}{6} + 2k$. 由 $\frac{5}{6} + 4k \leq \frac{11}{6} + 2k$, 得 $k \leq \frac{1}{12}$,

又 $k \in \mathbf{Z}$ 且 $\omega > 0$, 所以 $k = 0$, $\frac{5}{6} \leq \omega \leq \frac{11}{6}$.

故选:C.

法二: 由题 $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$,

由 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, 得 $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} < \omega\pi + \frac{\pi}{6}$,

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则由题意得 $\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 所以 $0 < \omega \leq 2$,

从而 $\frac{\pi}{6} < \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \pi + \frac{\pi}{6}$, 结合函数 $y = \cos x$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递增, 得 $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \geq \pi$, 且 $\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi$, 解得 $\frac{5}{3} \leq \omega \leq \frac{11}{6}$.

故选:C.

2. (23-24 高三·四川·阶段练习) 若函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ 在区间 $[0, a], [a, 2a]$ 上的值域分别为 $[m, n], [p, q]$, 则下列命题错误的是 ()

A. 若 $[m, n] = [p, q] = [-1, 1]$, 则 a 的最小值为 $\frac{4\pi}{3}$

B. 若 $[m, n] = [p, q]$, 则 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

C. 若 $m \geq q$, 则 a 的取值范围为 $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$

D. 若 $n \leq p$, 则 a 的取值范围为 $(0, \frac{2\pi}{9}]$

【答案】C

【分析】将 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ 整合为 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 再针对选项逐项分析即可.

【详解】由题知 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 图像在 y 轴右侧的第一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{3}$,

y 轴右侧的第二条对称轴为 $x = \frac{2\pi}{3}$.

对于 A, 令 $f(x) = -1, x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi (k \in \mathbf{N})$, $f(x) = 1, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{N})$,

若 $m = -1$, 则 $a + \frac{1}{6}\pi \geq \frac{3}{2}\pi \Rightarrow a \geq \frac{4}{3}\pi$,

取 $a = \frac{4}{3}\pi$ 时 $p = -1$, 则 $2a + \frac{\pi}{6} = \frac{17}{6}\pi$, 此时必有 $q = 1$,

此时满足 $[m, n] = [p, q] = [-1, 1]$, A 正确;

对于 B, 因为 $[m, n] = [p, q]$, 若 $a < \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{\pi}{6} < a + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < 2a + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$

此时 $m = \frac{1}{2}, n = \sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) < 1$, 因为 $[m, n] = [p, q]$,

故 $2a + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, 故 $p = \sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$, 矛盾, 故 $a \geq \frac{\pi}{3}$,

当 $a = \frac{\pi}{3}$ 时, $a + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $2a + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

符合题意, 故 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, B 正确;

对于 C, 当 $0 < a < \frac{2\pi}{3}$ 时, $m = \frac{1}{2}$, 此时 $f(a) > \frac{1}{2}$, 与条件 $m \geq q$ 不符,

当 $\frac{2\pi}{3} \leq a \leq \frac{4\pi}{3}$ 时, $\frac{5\pi}{6} \leq a + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 故 $m = \sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $m \geq p$, 故 $2a \leq \frac{8\pi}{3} - a$ 即 $a \leq \frac{8\pi}{9}$.

所以当 $\frac{8\pi}{9} < a \leq \frac{4\pi}{3}$ 时, $m \geq p$ 不成立.

当 $a \geq \frac{4\pi}{3}$ 时, $m = -1$, 不满足条件 $m \geq q$, C 错误;

对于 D, 当 $0 < a \leq \frac{\pi}{3}$ 时, $a + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $n = \sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $n \leq p$, 故 $2a \leq \frac{2\pi}{3} - a$ 即 $0 < a \leq \frac{2\pi}{9}$ 时, 满足条件 $n \leq p$,

当 $a \geq \frac{\pi}{3}$ 时, $n = 1$, 不满足条件 $n \leq p$, D 正确.

故选: C.

3. (22-23 高三·广西南宁·模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\omega > 0$), 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上无零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, +\infty\right)$

B. $\left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right]$

C. $\left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right)$

D. $\left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right] \cup [1, +\infty)$

【答案】B

【分析】先结合二倍角公式和辅助角公式将函数进行化简, 得 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$, 由于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上

无零点, 因此 $\left(\frac{3\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 且 $\begin{cases} k\pi \leq \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \\ (k+1)\pi \geq \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$, 在 $\omega > 0$ 的条件下, 解不等式

可得解.

【详解】 $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos \omega x) + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x = \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \omega > 0, \text{ 得 } \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < \omega x - \frac{\pi}{3} < \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3},$$

因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上无零点,

$$\text{所以 } \left(\frac{3\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq T = \frac{\pi}{\omega}, \text{ 得 } \omega^2 \leq 1,$$

因为 $\omega > 0$, 所以 $0 < \omega \leq 1$,

$$\text{因为 } \begin{cases} k\pi \leq \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \\ (k+1)\pi \geq \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 所以解得 } 2k + \frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{2k}{3} + \frac{8}{9}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{因为 } \begin{cases} 2k + \frac{2}{3} \leq \frac{2k}{3} + \frac{8}{9} \\ \frac{2k}{3} + \frac{8}{9} > 0 \end{cases}, \text{ 所以解得 } -\frac{4}{3} < k \leq \frac{1}{6},$$

因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k = 0$ 或 $k = -1$,

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } \frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{8}{9}, \text{ 当 } k = -1 \text{ 时, } 0 < \omega \leq \frac{2}{9},$$

$$\text{所以 } \omega \text{ 的取值范围是 } \left(0, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right],$$

故选: B

【点睛】关键点睛: 此题考查三角函数的综合问题, 考查三角恒等变换公式的应用, 考查函数与方程, 解题的关键是将函数在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上无零点, 利用正弦函数的性质转化为关于 ω 的不等式组, 从而可求得结果, 考查数学转化思想和计算能力, 属于较难题.

4. (22-23 高三·江西·阶段练习) 已知函数 $f(x) = 2\sin x |\cos x| + \sqrt{3}\cos 2x$, 则 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称

C. $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 4 个极值点

D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上单调递减

【答案】D

【分析】根据给定条件, 利用函数周期性、对称性定义判断 A, B; 求导并探讨导数在 $(0, 2\pi)$ 上的正负情况判断 C; 探讨函数在 $\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上单调性判断 D 作答.

【详解】函数 $f(x) = 2\sin x |\cos x| + \sqrt{3}\cos 2x$,

对于 A, $f(x+\pi) = 2\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)| + \sqrt{3}\cos 2(x+\pi) = -2\sin x|\cos x| + \sqrt{3}\cos 2x \neq f(x)$,

即 π 不是 $f(x)$ 的周期, A 不正确;

对于 B, 因为 $f(\pi) = 2\sin \pi |\cos \pi| + \sqrt{3}\cos 2\pi = \sqrt{3}$, 而 $f(-\frac{5\pi}{6}) = 2\sin(-\frac{5\pi}{6})|\cos(-\frac{5\pi}{6})| + \sqrt{3}\cos(-\frac{5\pi}{3}) = 0$,

显然函数 $f(x)$ 图象上的点 $(\pi, \sqrt{3})$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 的对称点 $(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3})$ 不在 $f(x)$ 的图象上, B 不正确;

对于 C, 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ 时, $\cos x \geq 0$, $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$,

此时 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ 或 $\frac{10\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{13\pi}{3}$, 当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 或 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{2}$,

即 $x = \frac{\pi}{12}$ 或 $x = \frac{19\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最值, 因此 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{12}$ 或 $x = \frac{19\pi}{12}$ 取极值,

当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $\cos x < 0$, $f(x) = -\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = -2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 此时 $\frac{2\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{8\pi}{3}$,

当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ 或 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}$, 即 $x = \frac{11\pi}{12}$ 或 $x = \frac{17\pi}{12}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最值, 因此 $f(x)$ 在 $x = \frac{11\pi}{12}$ 或 $x = \frac{17\pi}{12}$ 取极值,

当 $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$, 函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{12}$ 时, $\frac{2\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 函数 $f(x) = -2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{12}]$ 上单调递增,

又函数 $f(x)$ 是定义域 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 则 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点,

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的极值点至少有 5 个, C 不正确;

对于 D, 因为 $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi)|\cos(x+2\pi)| + \sqrt{3}\cos 2(x+2\pi) = f(x)$, 则 2π 是函数 $f(x)$ 的一个周期,

当 $\frac{13\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{6} \leq x - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$, 由选项 C 知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

因此函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}]$ 上单调递减, D 正确.

故选: D

5. (23-24 高三 辽宁·模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin \omega x - \cos \omega x$, 若关于 x 的方程 $f(x) - 1 = 0$ 在区间 $(0, 2\pi]$ 上有且只有四个不相等的实数根, 则正数 ω 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ B. $(\frac{3}{2}, \frac{25}{6}]$ C. $(\frac{3}{2}, \frac{13}{6}]$ D. $[\frac{3}{2}, \frac{13}{6})$

【答案】D

【分析】化简函数为 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ，根据题意，转化为 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, 2\pi]$ 上有且只有四个不相等的实数根，求得 $x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{\omega}$ 或 $x = \frac{\frac{5\pi}{2} + 2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$ ，列出不等式组，即可求解。

【详解】由函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin \omega x - \cos \omega x = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ，

因为方程 $f(x) - 1 = 0$ 在区间 $(0, 2\pi]$ 上有且只有四个不相等的实数根，且 $\omega > 0$ ，

可得 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, 2\pi]$ 上有且只有四个不相等的实数根，

则 $\omega x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $\omega x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

解得 $x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{\omega}$ 或 $x = \frac{\frac{5\pi}{2} + 2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$ ， $\begin{cases} \frac{3\pi}{\omega} \leq 2\pi \\ \frac{13\pi}{3\omega} > 2\pi \end{cases}$ 且 $\omega > 0$ ，解得 $\frac{3}{2} \leq \omega < \frac{13}{6}$ ，

所以实数 ω 的取值范围为 $[\frac{3}{2}, \frac{13}{6})$ 。

故选：D。

题型三：辅助角：非特殊角型

指 | 点 | 迷 | 津

辅助角

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right] ; \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

(1) 正弦形式 $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta)$: $\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha \pm \beta)$,

其中: $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(2) 余弦形式 $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \beta)$: $\cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha \mp \beta)$,

其中: $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{辅助角范围进口} \quad -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \alpha + b \cos \alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

1. (22-23 高三 上海宝山·阶段练习) 若 $\tan \theta = \frac{b}{a} \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$,

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) (0 \leq \varphi < 2\pi)$, 下列判断错误的是 ()

A. 当 $a > 0, b > 0$ 时, $\varphi = \theta$

B. 当 $a > 0, b < 0$ 时, $\varphi = \theta + 2\pi$

C. 当 $a < 0, b > 0$ 时, $\varphi = \theta + \pi$

D. 当 $a < 0, b < 0$ 时, $\varphi = \theta + 2\pi$

【答案】D

【分析】根据给定条件, 结合辅助角公式的变形, 确定辅助角 φ 的取值作答.

【详解】由选项知, $ab \neq 0$, $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$,

令 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 有 $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a} = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

则 $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$,

对于 A, 当 $a > 0, b > 0$ 时, φ 为第一象限角, 且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\tan \varphi = \tan \theta$, 则 $\varphi = \theta$, A 正确;

对于 B, 当 $a > 0, b < 0$ 时, φ 为第四象限角, 且 $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, $\tan \varphi = \tan(\theta + 2\pi)$, 则 $\varphi = \theta + 2\pi$, B 正确;

对于 C, 当 $a < 0, b > 0$ 时, φ 为第二象限角, 且 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, $\tan \varphi = \tan(\theta + \pi)$, 则 $\varphi = \theta + \pi$, C 正确;

对于 D, 当 $a < 0, b < 0$ 时, φ 为第三象限角, 且 $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\tan \varphi = \tan(\theta + \pi)$, 则 $\varphi = \theta + \pi$, D 错误.

故选: D

2. (2023·河南·模拟预测) 若关于 x 的方程 $\sin 2x + 2 \cos 2x = -2$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的解 α, β , 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为 ()

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【分析】利用辅助角公式化简已知方程, 求得 $\alpha - \beta$, 进而求得 $\cos(\alpha - \beta)$.

【详解】关于 x 的方程 $\sin 2x + 2 \cos 2x = -2$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的解 α, β ,

即 $\frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2x + \theta) = -1$ ($\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 取 θ 为锐角)

在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的解 α, β ,

即方程 $\sin(2x + \theta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的解 α, β .

不妨令 $0 \leq \alpha < \beta < \pi$, 由 $x \in [0, \pi)$, 则 $2x + \theta \in [\theta, 2\pi + \theta)$,

$$\text{所以 } \sin(2\alpha + \theta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin(2\beta + \theta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

所以 $\sin \theta = -\sin(2\alpha + \theta) = -\sin(2\beta + \theta)$. 则 $2\alpha + \theta = \pi + \theta, 2\beta + \theta = 2\pi - \theta$,

$$\text{即 } 2\alpha - 2\beta = -\pi + 2\theta,$$

$$\text{所以 } \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} + \theta, \cos(\alpha - \beta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故选: D.

3. (23-24 高三·江西赣州·模拟) 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上两点. 若 $x_1x_2 + y_1y_2 = -1$, 则 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 的取值范围是 ()

A. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B. $[-1, 1]$

C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

D. $[-2, 2]$

【答案】D

【分析】利用 $\cos \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}$ 得向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 设

$A(\sqrt{2} \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha), B\left(\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$, 利用两角和与差的公式、三角函数的现在化简 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 可得答案.

【详解】由题意 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = -1$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$,

因为 $\cos \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = -\frac{1}{2}$, $0 \leq \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \leq \pi$,

所以向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 如图,

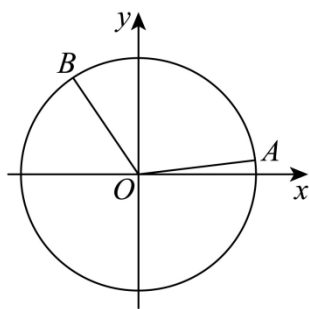
$$\text{设 } A(\sqrt{2} \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha), B\left(\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(1 + \sqrt{3}) \cos \alpha + (1 - \sqrt{3}) \sin \alpha \right] = 2 \sin(\alpha + \varphi), \text{ 且 } \tan \varphi = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3},$$

因为 $-1 \leq \sin(\alpha + \varphi) \leq 1$, 所以 $-2 \leq x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \leq 2$.

故选: D.



【点睛】关键点点睛：解题的关键点是求出向量 $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 的夹角，设 $A(\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$, $B(\sqrt{2}\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}), \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}))$ 进行化简计算.

4. (2023·四川雅安·一模) 已知函数 $f(x) = 3\sin(4x + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(4x - \frac{\pi}{6})$, 设 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$, 则 $\tan(4x_0 - \frac{2\pi}{3})$ 等于 ()

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】B

【分析】根据诱导公式得到 $f(x)$ 最大值，即得到关于 x_0 的关系式，代入 $\tan(4x_0 - \frac{2\pi}{3})$ 利用诱导公式即可.

【详解】Q $f(x) = 3\sin(4x + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(4x - \frac{\pi}{6}) = 3\sin(4x + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(-\frac{\pi}{2} + 4x + \frac{\pi}{3})$,

$$\therefore f(x) = 3\sin(4x + \frac{\pi}{3}) - 4\cos(4x + \frac{\pi}{3}),$$

$$\therefore f(x) = 5\sin(4x + \frac{\pi}{3} - \varphi) \left(\tan \varphi = \frac{4}{3} \right),$$

$$\therefore f(x)_{\max} = 5,$$

$$Q \forall x \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0),$$

$$\therefore 4x_0 + \frac{\pi}{3} - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \tan(4x_0 - \frac{2\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \varphi) = -\frac{1}{\tan \varphi} = -\frac{3}{4}.$$

故选：B.

5. (22-23 高三 辽宁大连·模拟) 已知函数 $f(x) = a\sin \omega x + b\cos \omega x$ ($a > 0$, $b > 0$, $\omega > 0$) 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

上单调，且 $f(\frac{\pi}{6}) = -f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{2\pi}{3})$, 则不等式 $f(x) + a > 0$ 的解集是 ()

- A. $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ B. $\left(-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$
- C. $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$

【答案】A

【分析】将 $f(x)$ 化成 $\sqrt{a^2+b^2} \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式，根据单调性及周期性得到 ω 的取值范围，根据等式关系得到各参数的关系，最后利用辅助角公式中的关系得到关于 x 的不等式，解出不等式即可。

【详解】Q $f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$,

$$\therefore f(x) = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\omega x + \varphi), \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{Q } f(x) \text{ 在区间 } [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \text{ 单调, } \therefore \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}, \therefore \omega \leq 3, \text{ Q } f(\frac{\pi}{6}) = -f(\frac{\pi}{2}), \therefore f(\frac{\pi}{3}) = 0, \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \frac{1}{3}\omega\pi + \varphi = \pi, \text{ Q } f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}), \therefore f(\frac{7\pi}{12}) = -1, \frac{7\pi}{12}\omega + \varphi = \frac{3\pi}{2} \therefore \omega = 2, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{a^2+b^2} \sin(2x + \frac{\pi}{3}), \therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \therefore b = \sqrt{3}a, \text{ Q } f(x) + a > 0, \therefore 2a \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + a > 0,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \therefore -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ 故选: A.}$$

【点睛】关键点定睛：本题难点在于单调性与周期性之间的关系以及辅助角公式的巧妙运用。

题型四： $\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cos x$ 型转化

指 | 点 | 迷 | 津

$\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cos x$

的函数中一般可设 $t = \sin x \pm \cos x$ 进行换元。换元时注意新元的取值范围。

$\sin x \pm \cos x$ 与 $\sin x \cdot \cos x$ 之间的互化关系

1. (23-24 高三·湖北武汉·模拟) 函数 $y = \sin x - \cos x + 2\sin x \cos x$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $1 + \sqrt{2}$

【答案】A

【分析】设 $t = \sin x - \cos x$ ，根据 $\sin x - \cos x$ ， $\sin x \pm \cos x$ 之间的关系将原函数转化成二次函数的最值问题处理。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/888074071135006127>