

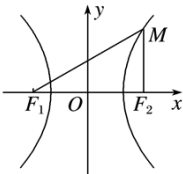
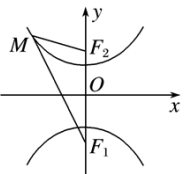
3.2.1 双曲线的标准方程

【考点梳理】

考点一：双曲线的定义

1. 定义：平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹.
2. 定义的集合表示： $\{M||MF_1|-|MF_2|=2a, 0<2a<|F_1F_2|\}$.
3. 焦点：两个定点 F_1, F_2 .
4. 焦距：两焦点间的距离，表示为 $|F_1F_2|$.

考点二：双曲线标准方程

焦点位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$
焦点	$(-c, 0), (c, 0)$	$(0, -c), (0, c)$
a, b, c 的关系	$c^2 = a^2 + b^2$	

重难点技巧：

- (1) $\|PF_1|-|PF_2|\|=2a, 0<2a<|F_1F_2|$, 表示双曲线；(2) $\|PF_1|-|PF_2|\|=2a, 2a=|F_1F_2|$, 表示两条射线；
- (3) $|PF_1|-|PF_2|=2a, 0<2a<|F_1F_2|$, 表示双曲线的一支；(4) $|PF_1|-|PF_2|=2a, 2a=|F_1F_2|$, 表示一条射线.

【题型归纳】

题型一：双曲线的定义

1. (2023 秋·江苏常州·高二江苏省奔牛高级中学校考期末) 双曲线 $C: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$ 上的点 P 到左焦点的距离为 12, 则 P 到右焦点的距离为 ()

A. 22 B. 2 C. 2 或 22 D. 24

【答案】A

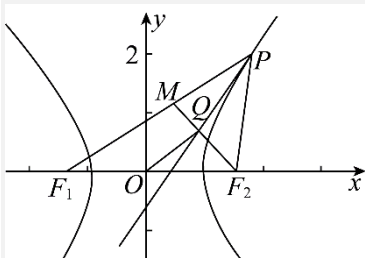
【分析】根据双曲线的定义即可求解.

【详解】由双曲线方程可得： $a=5, c=\sqrt{25+39}=8$, 设双曲线的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 则 $|PF_1|=12$,

若点 P 在双曲线的左支上, 则由双曲线的定义可知： $|PF_2|-|PF_1|=2a=10$,

的中位线，故 $|OQ| = a$ ，由此可以判断出点 Q 的轨迹。

【详解】如图，点 F_2 关于 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PQ 的对称点 M 在 PF_1 上，



故 $|F_1M| = |PF_1| - |PM| = |PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，

又 OQ 是 $\triangle F_2F_1M$ 的中位线，

故 $|OQ| = a$ ，

所以点 Q 的轨迹是以原点为圆心， a 为半径的圆。

故选：A.

题型二：利用双曲线的定义求轨迹方程

4. (2021 秋·江苏镇江·高二江苏省镇江中学校考期中) 动圆 M 与圆 $C_1: (x+4)^2 + y^2 = 1$ ，圆 $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ ，都外切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{15} + y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1 (x \geq 1)$ D. $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1 (x \leq -1)$

【答案】D

【分析】首先设 $M(x, y)$ ，半径为 r ，根据动圆 M 与圆 C_1 ， C_2 都外切得到 $|MC_2| - |MC_1| = 2 < |C_1C_2|$ ，从而得到 M 的轨迹为以 C_1, C_2 为焦点， $2a = 2$ 的双曲线左支，再求轨迹方程即可。

【详解】圆 $C_1: (x+4)^2 + y^2 = 1$ ，圆心 $C_1(-4, 0)$ ，半径 $r_1 = 1$ 。

圆 $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 9$ ，圆心 $C_2(4, 0)$ ，半径 $r_2 = 3$ 。

设 $M(x, y)$ ，半径为 r ，因为动圆 M 与圆 C_1 ， C_2 都外切，

$$\text{所以 } \begin{cases} |MC_1| = r + 1 \\ |MC_2| = r + 3 \end{cases} \Rightarrow |MC_2| - |MC_1| = 2 < |C_1C_2|,$$

所以 M 的轨迹为以 C_1, C_2 为焦点， $2a = 2$ 的双曲线左支。

所以 $a = 1$ ， $c = 4$ ，解得 $b = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$ ，

即 M 的轨迹方程为： $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1 (x \leq -1)$ 。

故选：D

5. (2022 秋·江苏盐城·高二盐城中学校考期中) 已知 P 是圆 $F_1: (x+3)^2 + y^2 = 16$ 上的一动点, 点 $F_2(3,0)$, 线段 PF_2 的垂直平分线交直线 PF_1 于点 Q , 则 Q 点的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

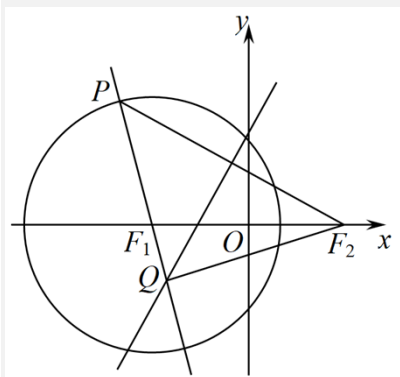
C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 (x > 0)$

【答案】C

【分析】由题意有 $|QP| = |QF_2|$, 从而有 $\|QF_1| - |QF_2|\| = |PF_1| = 4$, 根据双曲线的定义得点 Q 的轨迹为是以 F_1 、 F_2 为焦点的双曲线. 再写出其方程即可.

【详解】如图所示:



$\because P$ 是圆 F_1 上一动点, 点 F_2 的坐标为 $(3,0)$, 线段 PF_2 的垂直平分线交直线 PF_1 于点 Q ,

$$\therefore |QP| = |QF_2|, \|QF_1| - |QF_2|\| = \|QF_1| - |QP|\| = |PF_1|,$$

$$\because P \text{ 是圆 } F_1 \text{ 上一动点}, \therefore |PF_1| = 4, \therefore \|QF_1| - |QF_2|\| = 4,$$

$$\therefore F_2(3,0), F_1(-3,0), |F_1F_2| = 6 > 4,$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的轨迹为以 } F_1、F_2 \text{ 为焦点的双曲线, 且 } a=2, c=3, \text{ 得 } b=\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

故选：C.

6. (2022·江苏·高二专题练习) 已知点 $M(-3,0), N(3,0), B(1,0)$, 动圆 C 与直线 MN 相切于点 B , 过 M, N 与圆 C 相切的两直线相交于点 P , 则点 P 的轨迹方程为 ()

A. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x > 1)$

B. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x < -1)$

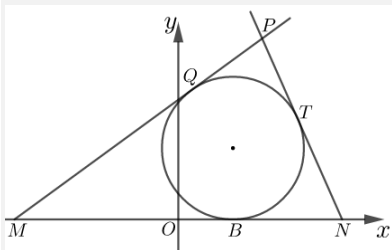
C. $x^2 + \frac{y^2}{8} = 1 (x > 0)$

D. $x^2 - \frac{y^2}{10} = 1 (x > 1)$

【答案】A

【分析】由给定条件分析探求出点 P 所满足的关系，再结合圆锥曲线的定义即可作答.

【详解】设直线 PM, PN 与圆 C 相切的切点分别为点 Q, T ，如图，



由切线长定理知， $MB=MQ$ ， $PQ=PT$ ， $NB=NT$ ，于是有 $|PM|-|PN|=|MQ|-|NT|=|MB|-|NB|=2<6=|MN|$ ，

则点 P 的轨迹是以 M, N 为左右焦点，实轴长 $2a=2$ 的双曲线右支，虚半轴长 b 有 $b^2=3^2-a^2=8$ ，

所以点 P 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{8}=1(x>1)$ 。

故选：A

题型三：双曲线中的焦点三角形问题

7. (2023·高二课时练习) 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两焦点为 F_1, F_2 ，点 P 在双曲线上，直线 PF_1, PF_2 倾斜角之差为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle PF_1F_2$ 面积为 ()

A. $16\sqrt{3}$

B. $32\sqrt{3}$

C. 32

D. 42

【答案】A

【分析】根据已知条件求出焦距及 $\angle F_1PF_2$ ，根据双曲线定义及余弦定理求出 $|PF_1|, |PF_2|$ 乘积，代入三角形面积公式即可求解.

【详解】根据 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两焦点可得 $|F_1F_2|=2\sqrt{9+16}=10$ ，

又直线 PF_1, PF_2 倾斜角之差为 $\frac{\pi}{3}$ ，所以 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$ ，

根据余弦定理可得 $\cos \angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-10^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{1}{2}$ ，

整理得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1||PF_2|=100$ ①，

根据点 P 在双曲线上可得 $||PF_1|-|PF_2||=6$ ，

则 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=36$ ②，

①-②得， $|PF_1||PF_2|=64$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/888103124121006077>