浙江省桐乡市凤鸣高级中学2023-2024学年高三下学期第一次统一考试数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设α为锐角，若$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，则$\sin 2\alpha$的值为（　　）

A． $\dfrac{17}{25}$　　**B．** $-\dfrac{7}{25}$　　**C．** $-\dfrac{17}{25}$　　**D．** $\dfrac{7}{25}$

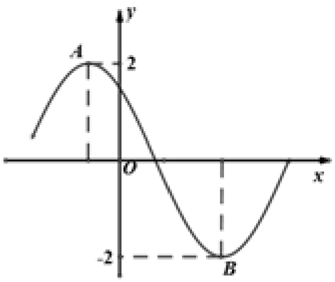
2．在复平面内，复数$z=i$对应的点为Z，将向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点O按逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{6}$，所得向量对应的复数是（　　）

A． $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　**B．** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　**C．** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　**D．** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

3．已知全集$U=Z, A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x|(x+1)(x-3)>0, x\in Z\}$，则集合$A\cap(C_U B)$的子集个数为（　）

A． 2　　**B．** 4　　**C．** 8　　**D．** 16

4．函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$的部分图像如图所示，若$AB=5$，点$A$的坐标为$(-1,2)$，若将函数$f(x)$向右平移$m(m>0)$个单位后函数图像关于$y$轴对称，则$m$的最小值为（　　）



A． $\dfrac{1}{2}$　　**B．** 1　　**C．** $\dfrac{\pi}{3}$　　**D．** $\dfrac{\pi}{2}$

5．已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x}, x>0\\ -x^2-2x, x\le 0\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-k(x+\dfrac{1}{2})$在$R$上零点最多，则实数$k$的取值范围是（　　）

A． $(0,\dfrac{2}{3e})$　　**B．** $(-\dfrac{2}{3e},0)$　　**C．** $(-\dfrac{1}{2\sqrt{e}},0)$　　**D．** $(0,\dfrac{1}{2\sqrt{e}})$

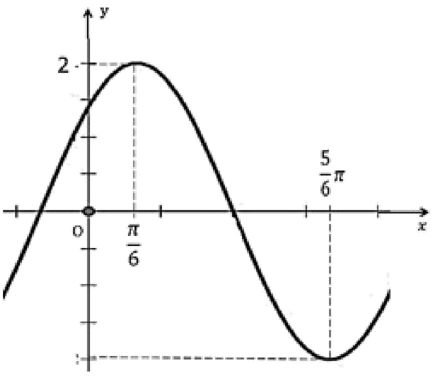
6．若函数$f(x)=x^2e^x-a$恰有**3**个零点，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(\frac{4}{e^2},+\infty)$　　B．$(0,\frac{4}{e^2})$　　C．$(0,4e^2)$　　D．$(0,+\infty)$

7．若点(2，k)到直线 5x-12y+6=0 的距离是 4，则 k 的值是(　　)

A．1　　B．-3　　C．1 或$\frac{5}{3}$　　D．-3 或$\frac{17}{3}$

8．已知$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2},x\in R\right)$的部分图象如图所示，则$f(x)$的表达式是（　　）



A．$2\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

C．$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D．$2\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

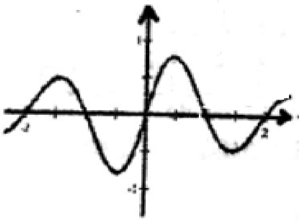
9．tan570°=（　　）

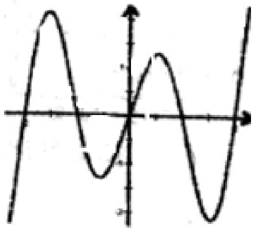
A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．-$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

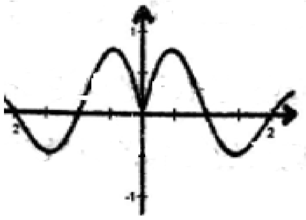
10．设F_1，F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，$O$是坐标原点，过点$F_2$作$C$的一条渐近线的垂线，垂足为$P$．若$|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则$C$的离心率为（　　）

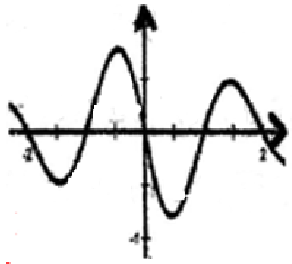
A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

11．函数 □(□) = sin(□□)□$^{-\frac{|□|}{□}}$的图象可能是下列哪一个？（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

12．已知函数 $f(x)=x^2-3x+5$，$g(x)=ax-\ln x$，若对 $\forall x\in(0,e)$，$\exists x_1,x_2\in(0,e)$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x)=g(x_i)(i=1,2)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{e},\frac{6}{e}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{e},e^{\frac{7}{4}}\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{e}\right]\cup\left[\frac{6}{e},e^{\frac{7}{4}}\right)$　D. $\left[\frac{6}{e},e^{\frac{7}{4}}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，过点 P 的一条直线与圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 相交于 $A,\ B$ 两点，若存在点 P，使得 $|PA|\cdot|PB|=a^2-b^2$，则椭圆的离心率取值范围为________.

14．公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=2$，$S_4-5S_2=0$，则 S_6-S_3 的值为__________.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=3a_n$,且 $\boldsymbol{a_2+a_4+a_6=9}$,则 $\log_{\frac{1}{3}}\left(a_5+a_7+a_9\right)=$______.

16．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x,x>1\\3^x,x\leqslant 1\end{cases}$，若 $f(a)\geqslant 1$，则 a 的取值范围是__

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

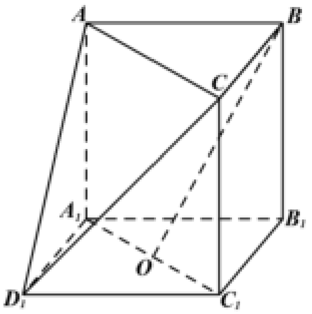
17．（12 分）已知 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 都是各项不为零的数列，且满足 $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=c_nS_n,n\in N^*$,其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$\{c_n\}$ 是公差为 $d\left(d\neq 0\right)$ 的等差数列.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 是常数列，$d=2$，$c_2=3$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $a_n=\lambda n$（λ 是不为零的常数），求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

（3）若 $a_1=c_1=d=k$（k 为常数，$k\in N^*$），$b_n=c_{n+k}\left(n\geq 2,n\in N^*\right)$．求证：对任意 $n\geq 2,n\in N^*,\frac{b_n}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ 的恒成立.

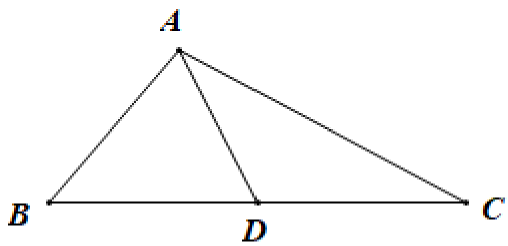
18.（12 分）将棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 D_1-ACD 后得到如图所示几何体，O 为 A_1C_1 的中点.



（1）求证：$OB//$ 平面 ACD_1；

（2）求二面角 $C-AD_1-C_1$ 的正弦值.

19.（12 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,\ B,\ C$ 的对边分别为 $a,\ b,\ c$，且满足 $a\sin B+b\cos A=c$，线段 BC 的中点为 D.



（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）已知 $\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\angle ADB$ 的大小.

20.（12 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=\dfrac{3}{2}$，且 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2}+\dfrac{1}{2^{n-1}}\left(n\geq 2,n\in \mathbf{N}^*\right)$.

（1）求证：数列 $\left\{2^n a_n\right\}$ 是等差数列，并求出数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

21.（12 分）已知抛物线 $y^2=4x$ 的准线过椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点 F，且点 F 到直线 l：$x=\dfrac{a^2}{c}$（c 为椭圆焦距的一半）的距离为 4.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 F 做直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，P 是 AB 的中点，线段 AB 的中垂线交直线 l 于点 Q.若 $|PQ|=2|AB|$，求直线 AB 的方程.

22．（10 分）已知函数 $f(x)=|x-a|$

（1）当 $a=-1$ 时，求不等式 $f(x)\le|2x+1|-1$ 的解集；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-|x+3|$ 的值域为 *A*，且 $[-2,1]\subseteq A$，求 ***a*** 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

用诱导公式和二倍角公式计算.

【详解】

$\sin 2\alpha=-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})=-\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{4})=-[2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})-1]=-[2\times(\frac{3}{5})^2-1]=\frac{7}{25}$.

故选：**D**.

【点睛】

本题考查诱导公式、余弦的二倍角公式，解题关键是找出已知角和未知角之间的联系.

2、**A**

【解析】

由复数 *z* 求得点 ***Z*** 的坐标，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标，逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$，得到向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标，则对应的复数可求.

【详解】

解：∵复数 ***z=i***（***i*** 为虚数单位）在复平面中对应点 ***Z***（**0**，**1**），

∴$\overrightarrow{OZ}$ =(**0**，**1**)，将 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 ***O*** 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $\overrightarrow{OB}$，

设 $\overrightarrow{OB}$ =(***a***，***b***)，$a<0,b>0$，

则 $\overrightarrow{OZ}\cdot\overrightarrow{OB}=b=|\overrightarrow{OZ}||\overrightarrow{OB}|\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

，

又$a^2+b^2=1$，

解得：$a=-\frac{1}{2},b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \overrightarrow{OB}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

对应复数为$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

3、C

【解析】

先求B.再求C_UB，求得$A\cap\left(C_UB\right)$则子集个数可求

【详解】

由题$C_UB=\left\{x\middle|(x+1)(x-3)\le 0,x\in Z\right\}=\left\{x\middle|-1\le \mathrm{x}\le 3,x\in Z\right\}==\{-1,0,1,2,3\}$，则集合$A\cap\left(C_UB\right)=\{1,2,3\}$,故其子集个数为$2^3=8$

故选C

【点睛】

此题考查了交、并、补集的混合运算及子集个数，熟练掌握各自的定义是解本题的关键，是基础题

4、B

【解析】

根据图象以及题中所给的条件，求出A,ω和φ，即可求得$f(x)$的解析式，再通过平移变换函数图象关于y轴对称，求得m的最小值.

【详解】

由于$AB=5$，函数最高点与最低点的高度差为4，

所以函数$f(x)$的半个周期$\frac{T}{2}=3$，所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=6\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{3}$，

又$A(-1,2)$，$0<\varphi<\pi$，则有$2\sin\left(-1\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$，可得$\varphi=\frac{5\pi}{6}$，

所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}\left(x+1\right)$，

将函数 $f\left(x\right)$ 向右平移 m 个单位后函数图像关于 y 轴对称，即平移后为偶函数，

所以 m 的最小值为 1，

故选：B.

【点睛】

该题主要考查三角函数的图象和性质，根据图象求出函数的解析式是解决该题的关键，要求熟练掌握函数图象之间的变换关系，属于简单题目.

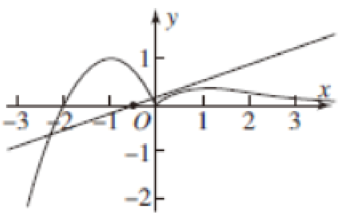
5、D

【解析】

将函数的零点个数问题转化为函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 的交点的个数问题，画出函数 $y=f(x)$ 的图象，易知直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 过定点 $(-\frac{1}{2},0)$，故与 $f(x)$ 在 $x<0$ 时的图象必有两个交点，故只需与 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的图象有两个交点，再与切线问题相结合，即可求解.

【详解】

由图知 $y=f(x)$ 与 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 有 4 个公共点即可，



即 $k\in\left(0,k_{切}\right)$，当设切点 $\left(x_0,y_0\right)$，

则 $\begin{cases}k=\dfrac{1-x_0}{e^{x_0}}\\ k(x_0+\dfrac{1}{2})=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\ k=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\end{cases}$

$\therefore k\in(0,\frac{1}{2\sqrt{e}})$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了函数的零点个数的问题，曲线的切线问题，注意运用转化思想和数形结合思想，属于较难的压轴题.

6、B

【解析】

求导函数，求出函数的极值，利用函数 $f(x)=x^2e^x-a$ 恰有三个零点，即可求实数 a 的取值范围.

【详解】

函数 $y=x^2e^x$ 的导数为 $y'=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2)$，

令 $y'=0$，则 $x=0$ 或 -2，

$-2<x<0$ 上单调递减，$(-\infty,-2),(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 0 或 -2 是函数 y 的极值点，

函数的极值为：$f(0)=0, f(-2)=4e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$，

函数 $f(x)=x^2e^x-a$ 恰有三个零点，则实数的取值范围是：$(0,\dfrac{4}{e^2})$.

故选 B.

【点睛】

该题考查的是有关结合函数零点个数，来确定参数的取值范围的问题，在解题的过程中，注意应用导数研究函数图象的走向，利用数形结合思想，转化为函数图象间交点个数的问题，难度不大.

7、D

【解析】

由题得 $\dfrac{|2\times5-12k+6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=4$，解方程即得 k 的值.

【详解】

由题得 $\dfrac{|2\times5-12k+6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=4$，解方程即得 k=-3 或 $\dfrac{17}{3}$.

故答案为：D

【点睛】

(1)本题主要考查点到直线的距离公式，意在考查学生对该知识的掌握水平和计算推理能力.(2) 点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

8、D

【解析】

由图象求出 A 以及函数 $y=f\left(x\right)$ 的最小正周期 T 的值，利用周期公式可求得 ω 的值，然后将点 $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$

的坐标代入函数 $y=f\left(x\right)$ 的解析式，结合 φ 的取值范围求出 φ 的值，由此可得出函数 $y=f\left(x\right)$ 的解析式.

【详解】

由图象可得 $A=2$，函数 $y=f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=2\times\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\pi}{3}$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{3}{2}$.

将点 $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ 代入函数 $y=f\left(x\right)$ 的解析式得 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，得 $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=1$，

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{4}<\varphi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，则 $\varphi+\frac{\pi}{4}=0$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

因此，$f\left(x\right)=2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查利用图象求三角函数解析式，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

9、**A**

【解析】

直接利用诱导公式化简求解即可.

【详解】

***tan*570°=*tan*（360°+210°）=*tan*210°=*tan*（180°+30°）=*tan*30°=**$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：***A*.**

【点睛】

本题考查三角函数的恒等变换及化简求值，主要考查诱导公式的应用，属于基础题.

10、**B**

【解析】

设过点 $F_2\left(c,0\right)$ 作 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线，其方程为 $y=-\frac{a}{b}\left(x-c\right)$，联立方程，求得 $x=\frac{a^2}{c}$，$y=\frac{ab}{c}$，即 $P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，由 $\left|PF_1\right|=\sqrt{6}\left|OP\right|$，列出相应方程，求出离心率.

【详解】

解：不妨设过点 $F_2\left(c,0\right)$ 作 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线，其方程为 $y=-\frac{a}{b}\left(x-c\right)$，