

2023 年高考数学模拟试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则它的解析式可能是()



- A. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2^x}$ B. $f(x) = 2^x (|x| - 1)$
- C. $f(x) = |\ln|x||$ D. $f(x) = xe^x - 1$

2. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2 = -5$, $S_4 = -16$, 则 $a_6 =$ ()

- A. 5 B. 3 C. -12 D. -13

3. 已知 $a = \sqrt[4]{6}$, $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21}$, $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 、 Q 分别为 AB 、 AD 的中点, 过点 D 作平面 α 使 $B_1P \parallel$ 平面 α , $A_1Q \parallel$ 平面 α 若直线 $B_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = M$, 则 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

5. 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ 在 $x = -3$ 时取得极值, 则 $a =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. 设 $y = f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 单调递增, $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则 ()

- A. $f(a+b) > f(ab) > f(0)$ B. $f(a+b) > f(0) > f(ab)$
- C. $f(ab) > f(a+b) > f(0)$ D. $f(ab) > f(0) > f(a+b)$

7. “ $a \leq 0$ ” “是函数 $f(x) = |(ax-1)x|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 连接双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的 4 个顶点的四边形面积为 S_1 , 连接 4 个焦点的四边形的面积为

S_2 , 则当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时, 双曲线 C_1 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

9. 复数 z 满足 $z(1+i) = 2$ (i 为虚数单位), 则 z 的虚部为 ()

- A. i B. $-i$ C. -1 D. 1

10. 胡夫金字塔是底面为正方形的锥体, 四个侧面都是相同的等腰三角形. 研究发现, 该金字塔底面周长除以 2 倍的塔高, 恰好为祖冲之发现的密率 $\frac{355}{113} \approx \pi$. 设胡夫金字塔的高为 h , 假如对胡夫金字塔进行亮化, 沿其侧棱和底边布设单条灯带, 则需要灯带的总长度约为

- A. $(4\pi + \frac{\sqrt{2\pi^2 + 4}}{2})h$ B. $(2\pi + \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4})h$
C. $(8\pi + 4\sqrt{2\pi^2 + 1})h$ D. $(2\pi + \sqrt{2\pi^2 + 16})h$

11. 已知复数 z 满足 $z \cdot (1+2i) = 5$ (i 为虚数单位), 则在复平面内复数 z 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

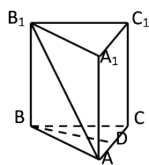
12. 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点为 $F(3, 0)$, 过 F 点的直线 l 与双曲线 E 交于 A, B 两点,

且 AB 的中点为 $P(-3, -6)$, 则 E 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

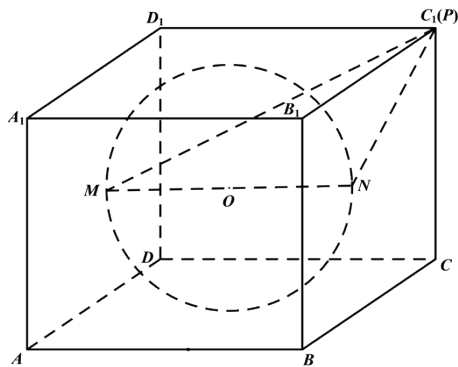
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图所示, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 AC 的中点, $AA_1:AB = \sqrt{2}:1$, 则异面直线 AB_1 与 BD 所成的角为_____.



14. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, MN 是它的内切球的一条弦(我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦),

P 为正方体表面上的动点,当弦 MN 的长度最大时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.



15. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=1$, $AD=2$, $\angle BAD=60^\circ$, 若 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FB}$, 则

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

16. 已知一个圆锥的底面积和侧面积分别为 9π 和 15π , 则该圆锥的体积为_____

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律, 据统计该地区蜻蜓有 A , B 两种, 且这两种的个体数量大致相等, 记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长(单位: mm) 分别为随机变量 X , Y , 其中 X 服从正态分布 $N(45, 25)$, Y 服从正态分布 $N(55, 25)$.

(I) 从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只, 求这只蜻蜓的翼长在区间 $[45, 55]$ 的概率;

(II) 记该地区蜻蜓的翼长为随机变量 Z , 若用正态分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 来近似描述 Z 的分布, 请你根据 (I) 中的结果, 求参数 μ_0 和 σ_0 的值 (精确到 0.1);

(III) 在 (II) 的条件下, 从该地区的蜻蜓中随机捕捉 3 只, 记这 3 只中翼长在区间 $[42.2, 57.8]$ 的个数为 W , 求 W 的分布列及数学期望 (分布列写出计算表达式即可) .

注: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - 0.64\sigma \leq X \leq \mu + 0.64\sigma) \approx 0.4773$, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9546$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x} + 2$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 单调性;

(2) 当 $a = -2$ 时, 求证: $f(x) < e^x - 2x - \frac{1}{x}$.

19. (12 分) 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 点 A 在 C 上, A 到 y 轴的距离比 $|AF|$ 小 1.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 AF 与 C 交于另一点 B , M 为 AB 的中点, 点 D 在 x 轴上, $|DA| = |DB|$. 若 $|DM| = \sqrt{6}$, 求直线 AF 的斜率.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $x > 0$, 证明 $\frac{\ln(x+1)}{x} > f(x)$.

21. (12 分) 某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏, 每次由一个小孩与其一位家长参与, 测试家长对小孩饮食习惯的了解程度. 在每一轮游戏中, 主持人给出 A, B, C, D 四种食物, 要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序, 然后由家长猜测小孩的排序结果. 设小孩对四种食物排除的序号依次为 $x_A x_B x_C x_D$, 家长猜测的序号依次为 $y_A y_B y_C y_D$, 其中 $x_A x_B x_C x_D$ 和 $y_A y_B y_C y_D$ 都是 1, 2, 3, 4 四个数字的一种排列. 定义随机变量 $X = (x_A - y_A)^2 + (x_B - y_B)^2 + (x_C - y_C)^2 + (x_D - y_D)^2$, 用 X 来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度.

(1) 若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解.

(i) 求他们在一轮游戏中, 对四种食物排出的序号完全不同的概率;

(ii) 求 X 的分布列 (简要说明方法, 不用写出详细计算过程);

(2) 若有一组小孩和家长进行来三轮游戏, 三轮的结果都满足 $X < 4$, 请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解, 说明理由.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = a^x - e \log_a x - e$, 其中 $a > 1$, e 为自然对数的底数.

(1) 当 $a = e$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 求证: 函数 $f'(x)$ 有且仅有一个零点.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据定义域排除 C ，求出 $f(1)$ 的值，可以排除 D ，考虑 $f(-100)$ 排除 A 。

【详解】

根据函数图象得定义域为 R ，所以 C 不合题意；

D 选项，计算 $f(1) = e - 1$ ，不符合函数图象；

对于 A 选项， $f(-100) = 9999 \times 2^{100}$ 与函数图象不一致；

B 选项符合函数图象特征。

故选：B

【点睛】

此题考查根据函数图象选择合适的解析式，主要利用函数性质分析，常见方法为排除法。

2、B

【解析】

由题得 $a_1 + d = -5$ ， $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16$ ，解得 $a_1 = -7$ ， $d = 2$ ，计算可得 a_6 。

【详解】

$Q a_2 = -5$ ， $S_4 = -16$ ， $\therefore a_1 + d = -5$ ， $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16$ ，解得 $a_1 = -7$ ， $d = 2$ ，

$\therefore a_6 = a_1 + 5d = 3$ 。

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式，前 n 项和公式，考查了学生运算求解能力。

3、B

【解析】

先将三个数通过指数，对数运算变形 $a = \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} > 6^0 = 1$ ， $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{5}{4}} 1 = 0$ ， $0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ 再判断。

【详解】

因为 $a = \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} > 6^0 = 1$ ， $b = \log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{5}{4}} 1 = 0$ ， $0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{2.9} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ ，

所以 $a > c > b$ ，

故选：B。

【点睛】

本题主要考查指数、对数的大小比较，还考查推理论证能力以及化归与转化思想，属于中档题.

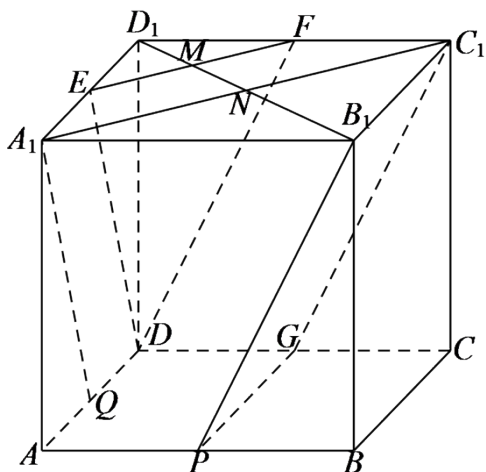
4、B

【解析】

作出图形，设平面 α 分别交 A_1D_1 、 C_1D_1 于点 E 、 F ，连接 DE 、 DF 、 EF ，取 CD 的中点 G ，连接 PG 、 C_1G ，连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 N ，推导出 $B_1P \parallel C_1G$ ，由线面平行的性质定理可得出 $C_1G \parallel DF$ ，可得出点 F 为 C_1D_1 的中点，同理可得出点 E 为 A_1D_1 的中点，结合中位线的性质可求得 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值.

【详解】

如下图所示：



设平面 α 分别交 A_1D_1 、 C_1D_1 于点 E 、 F ，连接 DE 、 DF 、 EF ，取 CD 的中点 G ，连接 PG 、 C_1G ，连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 N ，

Q 四边形 $ABCD$ 为正方形， P 、 G 分别为 AB 、 CD 的中点，则 $BP \parallel CG$ 且 $BP = CG$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCGP$ 为平行四边形， $\therefore PG \parallel BC$ 且 $PG = BC$ ，

Q $B_1C_1 \parallel BC$ 且 $B_1C_1 = BC$ ， $\therefore PG \parallel B_1C_1$ 且 $PG = B_1C_1$ ，则四边形 B_1C_1GP 为平行四边形，

$\therefore B_1P \parallel C_1G$ ，Q $B_1P \parallel$ 平面 α ，则存在直线 $a \subset$ 平面 α ，使得 $B_1P \parallel a$ ，

若 $C_1G \subset$ 平面 α ，则 $G \in$ 平面 α ，又 $D \in$ 平面 α ，则 $CD \subset$ 平面 α ，

此时，平面 α 为平面 CDD_1C_1 ，直线 A_1Q 不可能与平面 α 平行，

所以， $C_1G \not\subset$ 平面 α ， $\therefore C_1G \parallel a$ ， $\therefore C_1G \parallel$ 平面 α ，

Q $C_1G \subset$ 平面 CDD_1C_1 ，平面 $CDD_1C_1 \perp$ 平面 $\alpha = DF$ ， $\therefore DF \parallel C_1G$ ，

Q $C_1F \parallel DG$ ，所以，四边形 C_1GDF 为平行四边形，可得 $C_1E = DG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}C_1D_1$ ，

$\therefore F$ 为 C_1D_1 的中点，同理可证 E 为 A_1D_1 的中点，Q $B_1D_1 \perp EF = M$ ， $\therefore MD_1 = \frac{1}{2}D_1N = \frac{1}{4}B_1D_1$ ，因此， $\frac{MD_1}{MB_1} = \frac{1}{3}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查线段长度比值的计算，涉及线面平行性质的应用，解答的关键就是找出平面 α 与正方体各棱的交点位置，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

5、D

【解析】

对函数求导，根据函数在 $x = -3$ 时取得极值，得到 $f'(-3) = 0$ ，即可求出结果.

【详解】

因为 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ ，所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$ ，

又函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$ 在 $x = -3$ 时取得极值，

所以 $f'(-3) = 27 - 6a + 3 = 0$ ，解得 $a = 5$ 。

故选 D

【点睛】

本题主要考查导数的应用，根据函数的极值求参数的问题，属于常考题型.

6、C

【解析】

根据偶函数的性质，比较 $|a+b|, |ab|$ 即可.

【详解】

解： $|a+b| = |\log_{0.2} 0.3 + \log_2 0.3| = \left| \frac{\lg 0.3}{\lg 0.2} + \frac{\lg 0.3}{\lg 2} \right|$

$$= \left| \frac{\lg 0.3 \times \lg \frac{5}{2}}{-\lg 5 \times \lg 2} \right| = -\frac{\lg 0.3 \times \lg \frac{5}{2}}{\lg 5 \times \lg 2}$$

$$\begin{aligned}
 |ab| &= |\log_{0.2} 0.3 \times \log_2 0.3| = \left| \frac{\lg 0.3}{\lg 0.2} \times \frac{\lg 0.3}{\lg 2} \right| \\
 &= \left| \frac{-\lg 0.3 \times \lg 0.3}{\lg 5 \times \lg 2} \right| = \frac{\lg 0.3 \times \lg 0.3}{\lg 5 \times \lg 2} \\
 &= \frac{-\lg 0.3 \times (-\lg 0.3)}{\lg 5 \times \lg 2} \\
 &= -\frac{\lg 0.3 \times \lg \frac{10}{3}}{\lg 5 \times \lg 2}
 \end{aligned}$$

显然 $\lg \frac{5}{2} < \lg \frac{10}{3}$ ，所以 $|a+b| < |ab|$

$y = f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 单调递增，

所以 $f(ab) > f(a+b) > f(0)$

故选：C

【点睛】

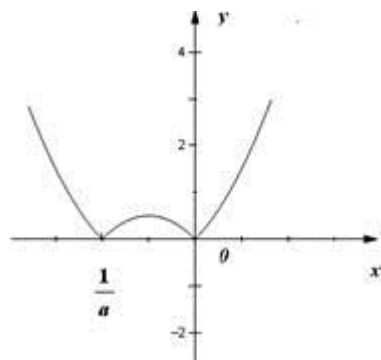
本题考查对数的运算及偶函数的性质，是基础题.

7、C

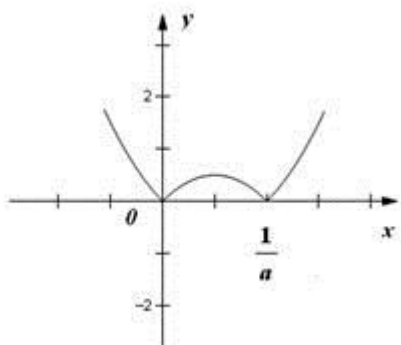
【解析】

$f(x) = |(ax-1)x| = |ax^2 - x|$ ，令 $ax^2 - x = 0$ ，解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{a}$

当 $a \leq 0$ ， $f(x)$ 的图像如下图



当 $a > 0$ ， $f(x)$ 的图像如下图



由上两图可知，是充要条件

【考点定位】考查充分条件和必要条件的概念，以及函数图像的画法.

8、D

【解析】

先求出四个顶点、四个焦点的坐标，四个顶点构成一个菱形，求出菱形的面积，四个焦点构成正方形，求出其面积，

利用重要不等式求得 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a = b$ ，从而求得其离心率.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 互为共轭双曲线，

四个顶点的坐标为 $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ ，四个焦点的坐标为 $(\pm c, 0), (0, \pm c)$ ，

四个顶点形成的四边形的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab$ ，

四个焦点连线形成的四边形的面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times 2c \times 2c = 2c^2$ ，

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2ab}{2c^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$ ，

当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a = b$ ， $c = \sqrt{2}a$ ，离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关双曲线的离心率的问题，涉及到的知识点有共轭双曲线的顶点，焦点，菱形面积公式，重要不等式求最值，等轴双曲线的离心率，属于简单题目.

9、C

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/888140065074006124>