



中考一轮复习

第一章 数与式

第4节 二次根式

思维导图：

- ### 学习误区
- 二次根式有意义的条件：不能只局限于二次根式有意义，还要同时考虑其他有意义（如分母不能为0），考查问题要全面。
 - 不能正确理解 $\sqrt{a^2}$ 的非负性，例，当 $a=5$ 时，求 $a+\sqrt{-2a+a^2}$ 的值，错误解法：原式= $a+|1-a|=a+1-a=1$ 。
 - 在二次根式化简中，错用分配律，例， $\sqrt{6+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{6+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 。
忽视隐含条件，例， $a+b=-8, ab=8$ ，即： $a<0, b<0$ ，这个条件。化简 $a\sqrt{\frac{a}{b}}+b\sqrt{\frac{b}{a}}$ ，导致化简出错。

- ### 知识提升
- 在化简二次根式时，若被开方数是带分数，首先要转化成假分数，再化简。
- 在二次根式化简时要运用转化与化归的思想，可化难为易，迅速得到答案。
- 在分解因式时，由 $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$ ，得 $a=(\sqrt{a})^2$ ，可把一个非负数转化为一个数的平方形式，再分解。
- 根式 $\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geq 0, b>0)$ 的化简方法
- 把 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 化成 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ，然后分母有理化。
 - 把 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 化成 $\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$ 。
- 分母有理化的方法与技巧
- 由 $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$ ，可知 \sqrt{a} 的有理化因式是 $\pm\sqrt{a}$ 。
 - 由平方差公式，可知 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 有理化因式是 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ 。
- 分母有理化关键是确定有理化因式



二次根式的概念

- ### 二次根式的定义
- 形如 $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 的式子叫做二次根式，理解定义的关键是“被开方的数 a 是非负数”。
- ### 二次根式的性质
- 能判断二次根式是否是最简二次根式
 - 会判断二个二次根式是否是同类根式
 - 1. \sqrt{a} 连同 a^2 、 $|a|$ 都是非负数。
 - 2. $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$ ， $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(a\geq 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$ ，所以 $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 是不一样的，只有当 $a\geq 0$ 时， $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$ 。它们在二次根式的化简和运算中起决定性的作用。
 - 3. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}(a\geq 0, b\geq 0)$ 和 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geq 0, b>0)$ 一般用于二次根式的化简。

- ### 知识梳理
- 定义：形如 $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 的式子叫做二次根式。
 - 最简二次根式：满足下列两个条件
 - 被开方数不含分母；
 - 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式。
 - 同类二次根式：化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式。

- ### 二次根式的性质
- $\pm\sqrt{a}(a\geq 0)$ 叫做 a 的平方根。
 - $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 叫做 a 的算术平方根。
 - $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 是非负数，即 $\sqrt{a}\geq 0$ 。
 - $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$ 。
 - $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(a\geq 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$ 。
 - $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geq 0, b\geq 0)$ 。
 - $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geq 0, b>0)$ 。

- ### 二次根式的运算
- 加减：先将各二次根式化成最简二次根式，然后再合并同类二次根式。
 - 乘除： $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geq 0, b\geq 0)$ 。
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geq 0, b>0)$ 。
 - 混合运算：与实数的运算顺序相同。

- ### 有理化因子
- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. \sqrt{a} 与 \sqrt{a} 。 | $3a+b\sqrt{c}$ 与 $a-b\sqrt{c}$ 。 |
| $2a+\sqrt{b}$ 与 $a-\sqrt{b}$ 。 | $4a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ 。 |

- ### 二次根式的运算
- 它和整式的运算是相联的，特别是一些运算定律和乘法公式（完全平方公式，平方差公式）在二次根式的运算中都可以运用，起到简化运算的作用。
 - 二次根式的混合运算顺序是：先乘方，再乘除，后加减，有括号的先算括号内的（或先去掉括号）。
 - 掌握二次根式的加、减、乘、除的运算法则，掌握分母有理化，按照运算顺序进行化简与计算。

课标要求：

- 1、二次根式的概念和性质，包括二次根式的定义、性质、运算法则等。
- 2、二次根式的化简和运算，包括二次根式的加减、乘除、混合运算等。
- 3、二次根式在实际问题中的应用，包括利用二次根式解决一些实际问题等。

对接教材：

【北师大】：八上第二章P26 - P31、 P41 - P48

【人教】：七上第六章P40 - P52；

课前检测：

1. 要使二次根式 $\sqrt{3-2x}$ 有意义，则 x 的取值范围是 (**B**)

A. $x \geq \frac{3}{2}$ B. $x \leq \frac{3}{2}$ C. $x \geq \frac{2}{3}$ D. $x \leq \frac{2}{3}$

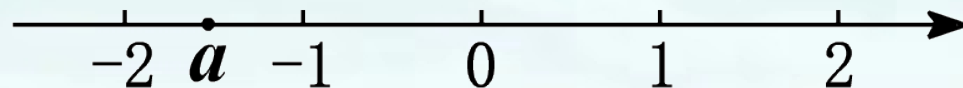
2. 下列二次根式中的最简二次根式是 (**A**)

A. $\sqrt{30}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. 下列各式计算正确的是 (**D**)

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 1$
C. $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ D. $\sqrt{27} \div \sqrt{3} = 3$

4. 实数 a 在数轴上的位置如图，化简 $\sqrt{(a-1)^2} + a = \underline{\mathbf{1}}$.



课前检测：

5. 计算：

$$(1) \sqrt{45} - \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{50} \quad (2) (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{24} - \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

解： (1) 原式 $= 3\sqrt{5} - \sqrt{20}$
 $= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
 $= \sqrt{5}$

(2) 原式 $= 3 - 1 + 2\sqrt{6} - 1 = 1 + 2\sqrt{6}$

考点梳理

考点1 二次根式的有关概念

二次根式	形如 <u>$\sqrt{a(a \geq 0)}$</u> 的式子叫做二次根式.
最简二次根式	同时满足：(1)被开方数不含 <u>分母</u> ； (2)被开方数中不含 <u>能开方的因数或因式</u> . 符合这两个条件的二次根式叫做最简二次根式.

考点梳理

考点 2 二次根式的性质[核心考点]

双重非负性	$\sqrt{a} (a \geq 0)$ 是一个 非负数 ，并且 a 也是 非负数 。
两个重要的性质	(1) $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$)。 (2) $\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$
积的算术平方根	$\sqrt{ab} = \sqrt{a \cdot b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)。
商的算术平方根	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$)。

【易错提醒】 化简 $\sqrt{a^2}$ 时，不要错误地认为 $\sqrt{a^2} = a$ ，应该分 $a > 0$ ， $a = 0$ ， $a < 0$ 进行讨论，即 $\sqrt{a^2} = |a|$ 。

考点梳理

考点3 二次根式的运算[核心考点]

二次根式的加减	先将二次根式化成 最简 二次根式，再将 被开方数相同 的二次根式进行合并.
二次根式的乘法	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$
二次根式的除法	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$

题型梳理

命题点 1 二次根式有意义的条件

【例 1】若使 $\frac{\sqrt{x+1}}{2-x}$ 有意义,则 x 的取值范围是_____.

解析: $x+1$ 与 $2-x$ 都是二次根式的被开方数,都要大于或等于零.

由于 $2-x$ 不能为零,可得不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 解得: $-1 \leq x < 2$.

答案: $-1 \leq x < 2$

方法总结 :

如果题目中对根号内的字母给出了取值范围,那么应在这个范围内对根式进行化简.如果题目中没有给出明确的取值范围,那么应注意对题目条件的挖掘,把隐含在题目条件中所限定的取值范围显现出来,在允许的取值范围内进行化简.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/896210213131010134>