

2023-2024 学年北京市西城区八年级（上）期末数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 火纹是一种常见的装饰图案，多用于建筑、家具设计等.下列火纹图案中，可以看成轴对称图形的是 ()



2. 下列运算中，正确的是()

A. $x^8 \div x^2 = x^4$ B. $(x^3)^4 = x^7$ C. $(-2x^3)^3 = -8x^9$ D. $x^4 + x = x^5$

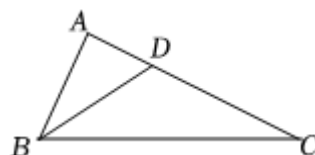
3. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(-2, 3)$ 关于 x 轴的对称点坐标是()

A. $(-2, -3)$ B. $(2, -3)$ C. $(2, 3)$ D. $(-3, -2)$

4. 下列各式从左到右变形一定正确的是()

A. $\frac{x}{y} = \frac{x^2}{y^2}$ B. $\frac{-x-y}{x+y} = -1$ C. $\frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+z}$ D. $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x+y}$

5. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.若点 D 到 BC 的距离为 3,则 AC 的长为()

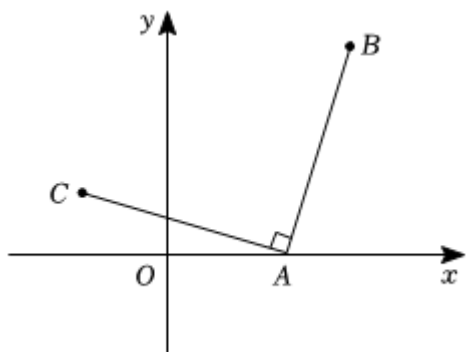


A. 12 B. 7.5 C. 9 D. 6

6. 如果 $a^2 - 3a - 7 = 0$, 那么代数式 $(a-1)^2 + a(a-4) - 2$ 的值为()

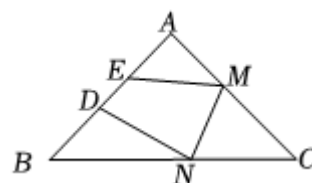
A. -15 B. -8 C. 6 D. 13

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2,0)$ ， $B(3,b)(b > 0)$ ， $AC \perp AB$ 且 $AC = AB$ ，则点 C 的横坐标为()



- A. $-b-1$ B. $1-b$ C. $b-2$ D. $2-b$

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，点 D, E 是边 AB 上的两个定点，点 M, N 分别是边 AC, BC 上的两个动点. 当四边形 $DEM N$ 的周长最小时， $\angle DNM + \angle EMN$ 的大小是()



- A. 45° B. 90° C. 75° D. 135°

二、填空题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。

9. 计算：

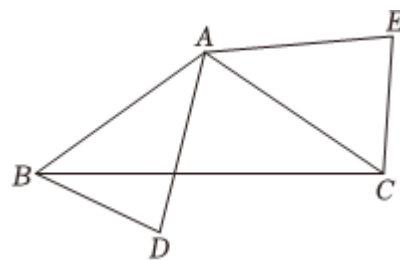
(1) $(\sqrt{2} + 1)^0 =$ _____;

(2) $7^{-2} =$ _____.

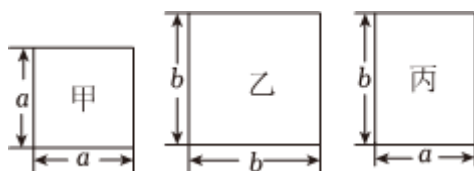
10. 若分式 $\frac{1}{x-6}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

11. 计算： $(-5a) \cdot (-2a^3b) =$ _____.

12. 如图， $\triangle ABC$ 为等腰三角形， $AB = AC$ ， $\angle DAE = \angle BAC$ ，连接 BD, CE . 只需添加一个条件即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，这个条件可以是_____ (写出一个即可).

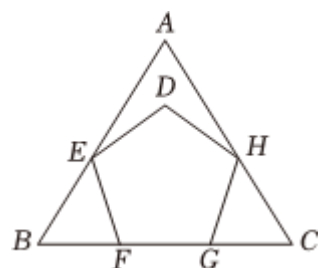


13. 如图，有甲、乙、丙三种正方形和长方形纸片，用 1 张甲种纸片、4 张乙种纸片和 4 张丙种纸片恰好拼成(无重叠、无缝隙)一个大正方形，则拼成的大正方形的边长为_____ (用含 a, b 的式子表示).

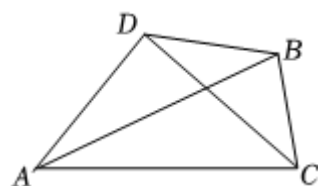


14. 甲、乙两名同学作为志愿者帮助图书馆清点一批图书，甲 $3h$ 清点完这批图书的 $\frac{1}{3}$ ，乙加入清点剩余的图书，两人合作 $2.4h$ 清点完剩余的图书.如果乙单独清点这批图书需要几小时？若设乙单独清点这批图书需要 xh ，则根据题意可列方程为_____.

15. 在正三角形纸片 ABC 上按如图方式画一个正五边形 $DEFGH$ ，其中点 F, G 在边 BC 上，点 E, H 分别在边 AB, AC 上，则 $\angle BEF$ 的大小是_____°.



16. 如图，动点 C 与线段 AB 构成 $\triangle ABC$ ，其边长满足 $AB = 9$ ， $CA = 2a + 2$ ， $CB = 2a - 3$.点 D 在 $\angle ACB$ 的平分线上，且 $\angle ADC = 90^\circ$ ，则 a 的取值范围是_____， $\triangle ABD$ 的面积的最大值为_____.



三、解答题：本题共 **10** 小题，共 **84** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题 8 分)

分解因式：

(1) $xy^3 - xy$;

(2) $2x^2 - 20x + 50$.

18. (本小题 11 分)

(1) 计算： $(a - 3b)(2a + b)$;

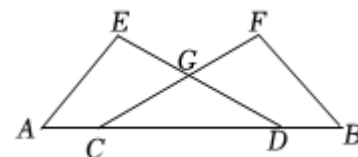
(2) 先化简，再求值： $(a - 2 + \frac{2a - a^2}{a + 2}) \div \frac{a - 2}{a^2 + 4a + 4}$ ，其中 $a = \frac{3}{2}$.

19. (本小题 8 分)

如图，点 C, D 在 AB 上， $AC = BD$ ， $EA = FB$ ， $\angle A = \angle B$ ， ED, FC 相交于点 G .

(1) 求证： $\angle ADE = \angle BCF$;

(2) 求证： $EG = FG$.



20. (本小题 7 分)

解方程: $\frac{6}{x} + 1 = \frac{x}{x+3}$.

21. (本小题 9 分)

已知: 如图, $\angle AOB$.

求作: 射线 OC , 使 $\angle AOC = 3\angle AOB$, 且点 C 在直线 OA 的下方.

作法: ①在射线 OA 上取一点 P , 过点 P 作射线 OA 的垂线, 与射线 OB 相交于点 M ;

②在 MP 的延长线上取一点 N , 使 $PN = PM$;

③以点 O 为圆心, OM 长为半径画弧, 再以点 M 为圆心, MN 长为半径画弧, 两弧在直线 OA 下方相交于点 C ;

④作射线 OC .

所以射线 OC 即为所求作的射线.

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形 (保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

证明: 连接 ON , CM .

$$\because PM \perp OA, PN = PM,$$

$$\therefore ON = OM. (\text{____})(\text{填推理的依据})$$

$$\therefore \angle \text{____} = 2\angle POM.$$

$$\because OC = OM,$$

$$\therefore OC = ON.$$

在 $\triangle OCM$ 和 $\triangle ONM$ 中,

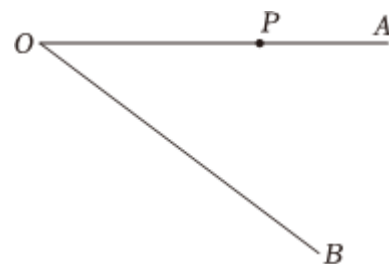
$$\begin{cases} OC = ON \\ OM = OM, (\text{ }) \\ = \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCM \cong \triangle ONM. (\text{____})(\text{填推理的依据})$$

$$\therefore \angle \text{____} = \angle NOM.$$

$$\therefore \angle AOC = \angle POM + \angle COM = 3\angle POM,$$

$$\text{即 } \angle AOC = 3\angle AOB.$$



22. (本小题 8 分)

阅读材料:

如果整数 x, y 满足 $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, 其中 a, b, c, d 都是整数, 那么一定存在整数 m, n , 使得 $xy = m^2 + n^2$.

例如, $25 = 3^2 + 4^2$, $40 = 2^2 + 6^2$, $25 \times 40 = 30^2 + (-10)^2$ 或 $25 \times 40 = 18^2 + 26^2$, $\dots$

根据上述材料, 解决下列问题:

(1) 已知 $5 = 1^2 + 2^2$, $74 = 5^2 + 7^2$, $5 \times 74 = 19^2 + 3^2$ 或 $5 \times 74 = m^2 + 17^2$, $\dots$

若 $m > 0$, 则 $m =$ _____;

(2) 已知 $41 = 4^2 + 5^2$, $y = c^2 + d^2$ (c, d 为整数), $41y = m^2 + n^2$. 若 $m = 5c - 4d$, 求 n (用含 c, d 的式子表示);

(3) 一般地, 上述材料中的 m, n 可以用含 a, b, c, d 的式子表示, 请直接写出一组满足条件的 m, n (用含 a, b, c, d 的式子表示).

23. (本小题 9 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部, $CD = AB$, $\angle DBA = \angle DCA$.

(1) 如图 1, 线段 BD 的延长线交 AC 于点 E , 且 $BE \perp AC$.

①求 $\angle DAE$ 的度数;

②用等式表示线段 AC, BD, DE 之间的数量关系, 直接写出结果;

(2) 如图 2, 点 F 在线段 DB 的延长线上, 连接 CF 交射线 AD 于点 M , 且 M 为 CF 的中点. 求证: $DF = AC$.

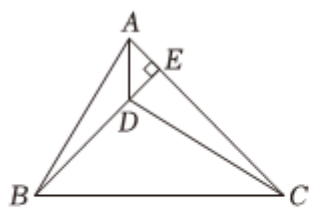


图1

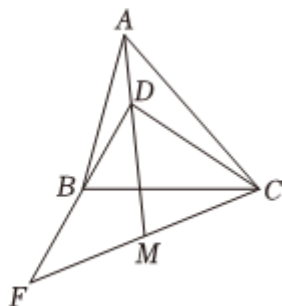


图2

24. (本小题 8 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $T(t, 0)$, 直线 l 经过点 T 且与 x 轴垂直. 对于图形 M 和图形 N , 给出如下定义: 将图形 M 关于 y 轴对称的图形记为 M_1 , 图形 M_1 关于直线 l 对称的图形记为 M_2 , 若图形 M_2 与图形 N 有公共点, 则称图形 M 是图形 N 的“双称图形”.

例如, 如图 1, 当 $t = -2$ 时, 对于点 $P(1.5, -2.5)$ 和第三象限角平分线 OQ , 点 P 关于 y 轴的对称点是 $P_1(-1.5, -2.5)$, 点 P_1 关于直线 l 的对称点 $P_2(-2.5, -2.5)$ 在射线 OQ 上, 则点 P 是射线 OQ 的“双称图形”.

已知点 $A(2t, 1)$, $B(2t + 3, 1)$, 图形 N 是以线段 AB 为一边在直线 AB 上方所作的正方形 $ABCD$.

(1) 当 $t = 1$ 时, 直线 l 和正方形 $ABCD$ 如图 2 所示.

①在 $H(0, 3)$, $R(-4, 2)$, $K(3, 4)$ 这三个点中, 点_____是图形 N 的“双称图形”;

②点 $E(m, 2)$, $F(m + 2, 2)$, $G(m + 1, 3)$, $\triangle EFG$ 是图形 N 的“双称图形”, 求 m 的取值范围;

(2) 若图形 N 是它自身的“双称图形”, 直接写出 t 的取值范围.

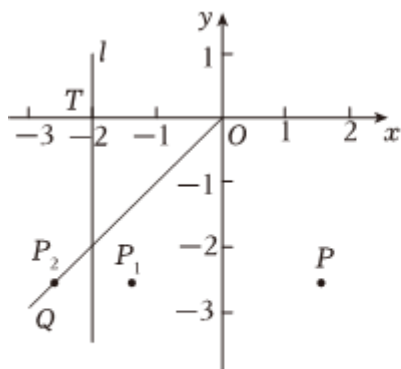


图1

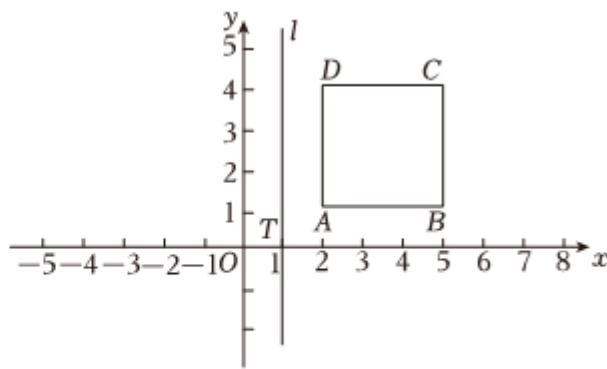


图2

25. (本小题 8 分)

如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形. 点 D 是 BC 延长线上的一个动点, 连接 AD , 点 E 在 AD 的垂直平分线上, 且 BE 平分 $\angle ABD$, 连接 EA , ED , 过点 E 作 $EF \perp BD$ 于点 F .

(1) 当 $\angle EDF = 45^\circ$ 时, $\frac{BE}{FD}$ 的值为_____;

(2) 给出下面四个结论:

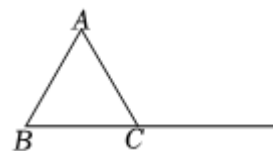
①点 E 一定在 BD 的垂直平分线上;

②点 F 一定是线段 CD 的中点;

③当 $DF = BC$ 时, $AB \perp AD$;

④点 D 运动过程中, $\angle AED$ 的大小始终不变.

上述结论中, 所有正确结论的序号是_____.



26. (本小题 8 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ，给出如下定义：

将点 P_1 与 P_2 的“变倍距离”记为 $d(P_1, P_2)$ ，

若 $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ，则 $d(P_1, P_2) = 5|x_1 - x_2| + 4|y_1 - y_2|$ ；

若 $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$ ，则 $d(P_1, P_2) = 4|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|$ 。

例如，点 $M(-1, 5)$ 与 $N(2, 4)$ 的“变倍距离” $d(M, N) = 5 \times 3 + 4 \times 1 = 19$ 。

已知点 $A(2, 0)$ 。

(1) 若点 $B(0, 2)$ ， $C(0, -3)$ ，则 $d(A, B) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d(A, C) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 点 D 在 y 轴负半轴上，且 $d(A, D) = 15$ ，求点 D 的坐标；

(3) 点 P 、 Q 是第一、三象限角平分线上的两个动点 (P 与 Q 不重合)，若 $d(A, P) = d(A, Q) = t$ ，直接写出 t 的取值范围。

答案和解析

1. 【答案】B

【解析】解：A，C，D 选项中的图形都不能找到一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以不是轴对称图形；

B 选项中的图形能找到一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以是轴对称图形；

故选：B.

根据如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴进行分析即可.

此题主要考查了轴对称图形，关键是掌握如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

2. 【答案】C

【解析】解： $x^8 \div x^2 = x^6$ ，则 A 不符合题意；

$(x^3)^4 = x^{12}$ ，则 B 不符合题意；

$(-2x^3)^3 = -8x^9$ ，则 C 符合题意；

x^4 与 x 不是同类项，无法合并，则 D 不符合题意；

故选：C.

利用同底数幂除法法则，幂的乘方及积的乘方法则，合并同类项法则将各式计算后判断即可.

本题考查整式的运算，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

3. 【答案】A

【解析】解：点 $P(-2, 3)$ 关于 x 轴的对称点坐标是 $(-2, -3)$ ，

故选：A.

根据关于 x 轴对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数可得答案.

此题主要考查了关于 x 轴对称点的坐标，关键是掌握点的坐标的变化规律.

4. 【答案】B

【解析】解： $\frac{x}{y} = \frac{x^2}{xy}$ ，则 A 不符合题意；

$\frac{-x-y}{x+y} = \frac{-(x+y)}{x+y} = -1$ ，则 B 符合题意；

$\frac{x}{y}$ 与 $\frac{x+z}{y+z}$ 不一定相等，则 **C** 不符合题意；

$\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x-y}$ ，则 **D** 不符合题意；

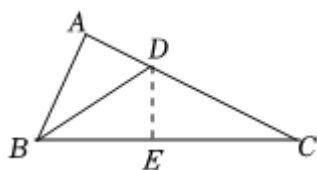
故选： **B**。

根据分式的性质逐项判断即可。

本题考查分式的基本性质，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握。

5. 【答案】 **C**

【解析】解：如图，作 $DE \perp BC$ 于点 **E**，



$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp BC$ 于点 **E**， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore DE = AD = 3$ ，

$\because \angle C = 30^\circ$ ，

$\therefore CD = 2DE = 6$ ，

$\therefore AC = 9$ ，

故选： **C**。

作 $DE \perp BC$ 于点 **E**，利用角平分线的性质可得 $ED = AD$ ，再利用含 30° 角的直角三角形的性质可得 **CD** 长，进而可得答案，

此题主要考查了角平分线的性质和直角三角形的性质，关键是熟练掌握角的平分线上的点到角的两边的距离相等；在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半。

6. 【答案】 **D**

【解析】解： $\because a^2 - 3a - 7 = 0$ ，

$\therefore a^2 - 3a = 7$ ，

$\therefore (a-1)^2 + a(a-4) - 2$

$= a^2 - 2a + 1 + a^2 - 4a - 2$

$= 2a^2 - 6a - 1$

$= 2(a^2 - 3a) - 1$

$= 2 \times 7 - 1$

$$= 14 - 1$$

$$= 13.$$

故选：D.

求出 $a^2 - 3a = 7$ ，再根据完全平方公式和单项式乘多项式进行计算，合并同类项，最后代入求出答案即可.
 本题考查了整式的化简求值，能正确根据整式的运算法则进行计算是解此题的关键.

7. 【答案】D

【解析】解：如图，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ，过点 C 作 $CF \perp x$ 轴于 F ，

$$\therefore \angle AFC = \angle AEB = 90^\circ = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle BAE = 90^\circ = \angle CAF + \angle ACF,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BAE,$$

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BAE$ 中，

$$\begin{cases} \angle AFC = \angle AEB \\ \angle ACF = \angle BAE, \\ AC = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BAE (AAS),$$

$$\therefore CF = AE, AF = BE,$$

$$\because \text{点 } A(2, 0), B(3, b),$$

$$\therefore BE = AF = b, AO = 2,$$

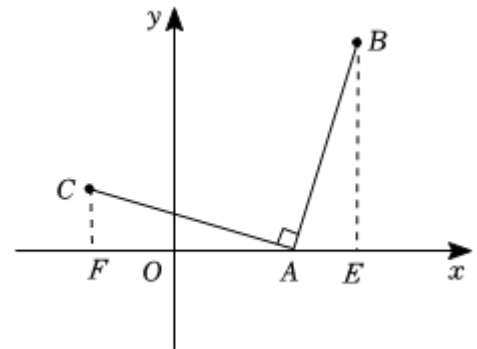
$$\therefore OF = b - 2,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的横坐标为 } 2 - b,$$

故选：D.

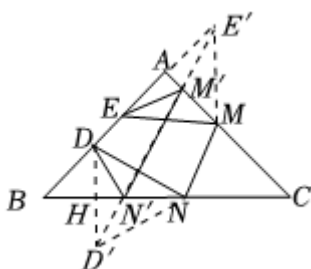
由“AAS”可证 $\triangle ACF \cong \triangle BAE$ ，可得 $CF = AE$ ， $AF = BE$ ，即可求解.

本题考查了全等三角形的判定和性质，添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键.



8. 【答案】B

【解析】解：作点 D 关于 BC 的对称点 D' ，作点 E 关于 AC 的对称点 E' ，连接 $D'E'$ 分别交 AC ， BC 于点 M' ， N' ，连接 ME' ， ND' ， EM' ， DN' ，



则 $ME = ME'$, $ND = ND'$,

$\therefore$ 四边形 $DEMN$ 的周长 $= DE + ME + MN + ND = DE + ME' + MN + ND' \geq DE + D'E'$,

$\therefore DE$ 长固定,

$\therefore$ 点 M 与 M' 重合, 点 N 与点 N' 重合时, 四边形 $DEMN$ 的周长最小, 此时

$\angle DNM + \angle EMN = \angle DN'M + \angle EM'N$,

由对称性和三角形外角性质可知: $\angle DN'M = \angle N'DD' + \angle N'D'D = 2\angle N'D'D$,

$\angle EM'N = \angle M'EE' + \angle M'E'E = 2\angle M'E'E$,

$\therefore \angle DN'M + \angle EM'N = 2\angle N'D'D + 2\angle M'E'E = 2(180^\circ - \angle D'DE')$,

设 DD' 与 BC 交于点 H ,

$\therefore AB = AC$, $\angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDH = 45^\circ$,

$\therefore \angle D'DE' = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,

$\therefore \angle DN'M + \angle EM'N = 2(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$,

即当四边形 $DEMN$ 的周长最小时, $\angle DNM + \angle EMN$ 的大小是 90° ,

故选: B .

作点 D 关于 BC 的对称点 D' , 作点 E 关于 AC 的对称点 E' , 连接 $D'E'$ 分别交 AC , BC 于点 M' , N' , 连接 ME' , ND' , EM' , DN' , 推出四边形 $DEMN$ 的周长最小时, 点 M 与 M' 重合, 点 N 与点 N' 重合, 再求出 $\angle DN'M + \angle EM'N$ 即可解决问题.

本题考查轴对称-对短路线问题, 解答中涉及两点之间线段最短, 三角形内角和定理, 三角形外角性质, 等腰三角形的性质, 能用一条线段表示出三条线段的和的最小值, 并确定最小时 M , N 的位置是解题的关键.

9. 【答案】 $1\frac{1}{49}$

【解析】解: (1) $(\sqrt{2} + 1)^0 = 1$;

(2) $7^{-2} = \frac{1}{49}$.

故答案为: $1, \frac{1}{49}$.

(1) 根据零指数幂的运算方法计算即可;

(2) 根据负整数指数幂的运算方法计算即可.

此题主要考查了零指数幂、负整数指数幂的运算，解答此题的关键是要明确：(1) $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)；(2) $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数)；(3) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0, p$ 为正整数)。

10. 【答案】 $x \neq 6$

【解析】解：由题意得： $x - 6 \neq 0$ ，

解得： $x \neq 6$ ，

故答案为： $x \neq 6$ 。

根据分式的分母不为 0 列出不等式，解不等式即可。

本题考查的是分式有意义的条件，掌握分式的分母不为 0 是解题的关键。

11. 【答案】 $10a^4b$ 。

【解析】解： $(-5a) \cdot (-2a^3b) = 10a^4b$ 。

故答案为： $10a^4b$ 。

根据单项式与单项式的运算法则进行计算即可。

此题考查了单项式乘以单项式，掌握单项式乘以单项式的法则是解题的关键。

12. 【答案】 $AD = AE$

【解析】解：添加的条件是 $AD = AE$ ，

理由是： $\because \angle DAE = \angle BAC$ ，

$\therefore \angle DAE - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS)$ ，

故答案为： $AD = AE$ (答案不唯一)。

先根据角的和差得到 $\angle BAD = \angle CAE$ ，然后根据全等三角形的判定方法即可解答。

本题考查了全等三角形的判定定理，能熟记全等三角形的判定定理是解此题的关键，全等三角形的判定定理有 SAS ， ASA ， AAS ， SSS ，两直角三角形切的还有 HL 。

13. 【答案】 $a + 2b$

【解析】解： $\because$ 用 1 张甲种纸片、4 张乙种纸片和 4 张丙种纸片恰好拼成 (无重叠、无缝隙) 一个大正方形，

$\therefore$ 这个大正方形的面积 $= a^2 + 4b^2 + 4ab = (a + 2b)^2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/897054131033006053>