

热点 5-2 等比数列的通项及前 n 项和

主要考查等比数列的基本量计算和基本性质、等比数列的中项性质、判定与证明，这是高考热点；等比数列的求和及综合应用是高考考查的重点。这部分内容难度以中、低档题为主，结合等差数列一般设置一道选择题和一道解答题。

题型1 等比数列的基本量计算

题型2 等比数列性质的应用

题型3 等比数列单调性及应用

等比数列的通项及前 n 项和

题型4 等比数列前 n 项和性质应用

题型5 等比数列的判定与证明

题型6 等比数列的实际应用

【题型 1 等比数列的基本量计算】

满分技巧

等比数列的运算技巧

- 1、在等比数列的通项公式和前 n 项和公式中，共涉及五个量： a_1 ， a_n ， n ， q ， S_n ，其中首项 a_1 和公比 q 为基本量，且“知三求二”，常常列方程组来解答；
- 2、对于基本量的计算，列方程组求解时基本方法，通常用约分或两式相除的方法进行消元，有时会用到整体代换，如 q^n ， $\frac{a_1}{1-q}$ 都可以看作一个整体。

【例 1】(2024·全国·模拟预测) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若 $a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4a_6 = 0$ ， $S_4 = 15$ ，则 $S_{2023} =$ ()

- A. $2^{2023} - 1$ B. $2^{2022} - 1$ C. 2^{2023} D. 2^{2022}

【答案】A

【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)。

$$\because a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4a_6 = 0, \therefore (a_6 - 4a_4)(a_6 + a_4) = 0.$$

$$\because a_n > 0, \therefore a_6 - 4a_4 = 0, \text{ 故 } \frac{a_6}{a_4} = q^2 = 4, \text{ 解得 } q = 2 \text{ (舍负值)},$$

$$\therefore S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = 15a_1 = 15,$$

$$\therefore a_1 = 1, \therefore S_{2023} = \frac{1-2^{2023}}{1-2} = 2^{2023} - 1. \text{ 故选: A.}$$

【变式 1-1】(2024·全国·模拟预测) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若

热点 5-2 等比数列的通项及前 n 项和

主要考查等比数列的基本量计算和基本性质、等比数列的中项性质、判定与证明，这是高考热点；等比数列的求和及综合应用是高考考查的重点。这部分内容难度以中、低档题为主，结合等差数列一般设置一道选择题和一道解答题。

题型1 等比数列的基本量计算

题型2 等比数列性质的应用

题型3 等比数列单调性及应用

等比数列的通项及前 n 项和

题型4 等比数列前 n 项和性质应用

题型5 等比数列的判定与证明

题型6 等比数列的实际应用

【题型1 等比数列的基本量计算】

满分技巧

等比数列的运算技巧

- 1、在等比数列的通项公式和前 n 项和公式中，共涉及五个量： a_1 ， a_n ， n ， q ， S_n ，其中首项 a_1 和公比 q 为基本量，且“知三求二”，常常列方程组来解答；
- 2、对于基本量的计算，列方程组求解时基本方法，通常用约分或两式相除的方法进行消元，有时会用到整体代换，如 q^n ， $\frac{a_1}{1-q}$ 都可以看作一个整体。

【例1】(2024·全国·模拟预测) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若 $a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4a_6 = 0$ ， $S_4 = 15$ ，则 $S_{2023} =$ ()

- A. $2^{2023} - 1$ B. $2^{2022} - 1$ C. 2^{2023} D. 2^{2022}

【答案】A

【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)。

$$\because a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4a_6 = 0, \therefore (a_6 - 4a_4)(a_6 + a_4) = 0.$$

$$\because a_n > 0, \therefore a_6 - 4a_4 = 0, \text{ 故 } \frac{a_6}{a_4} = q^2 = 4, \text{ 解得 } q = 2 \text{ (舍负值)},$$

$$\therefore S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = 15a_1 = 15,$$

$$\therefore a_1 = 1, \therefore S_{2023} = \frac{1-2^{2023}}{1-2} = 2^{2023} - 1. \text{ 故选: A.}$$

【变式 1-1】(2024·全国·模拟预测) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若

$$a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4a_6 + 2a_6 - 8a_4 = 0, S_4 = 15, \text{ 则 } S_{2023} = (\quad)$$

- A . $2^{2023} - 1$ B . $2^{2022} - 1$ C . 2^{2023} D . 2^{2022}

【答案】 A

【解析】 由题意，设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$ ，

$$\because a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4a_6 + 2a_6 - 8a_4 = 0, \therefore (a_6 - 4a_4)(a_6 + a_4 + 2) = 0.$$

$$\because a_n > 0, \therefore a_6 + a_4 + 2 \neq 0, \therefore a_6 - 4a_4 = 0, \therefore \frac{a_6}{a_4} = q^2 = 4, \text{ 解得 } q = 2 \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = 15a_1 = 15,$$

$$\therefore a_1 = 1, \therefore S_{2023} = \frac{1-2^{2023}}{1-2} = 2^{2023} - 1. \text{ 故选: A.}$$

【变式 1-2】 (2023·辽宁·高三统考期中) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，其公比 $q = 2$ ，前 7 项的和为 1016，则 $\log_2(a_3a_5)$ 的值为 ()

- A . 8 B . 10 C . 12 D . 16

【答案】 C

【解析】 依题意， $S_7 = \frac{a_1(1-2^7)}{1-2} = 1016$ ， $127a_1 = 1016$ ，解得 $a_1 = 8$ ，因此 $a_n = 2^{n+2}$ ，

$$\text{所以 } \log_2(a_3a_5) = \log_2(2^5 \times 2^7) = \log_2 2^{12} = 12. \text{ 故选: C}$$

【变式 1-3】 (2023·四川雅安·统考一模) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4a_{2022} = 506$ ，

$a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = 2024$ ，则 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} + \frac{1}{a_{2023}}$ 等于 ()

- A . 1 B . 2 C . 3 D . 4

【答案】 D

【解析】 等比数列 $\{a_n\}$ ，若 $q = 1$ ，则 $a_n = \sqrt{506}$ 或 $a_n = -\sqrt{506}$ ，验证不成立；

$$\text{故 } q \neq 1, a_4a_{2022} = a_1^2q^{2024} = 506,$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = a_1q^2 \frac{1-q^{2021}}{1-q} = 2024,$$

$$\text{两式相除得到 } \frac{a_1q^2 \frac{1-q^{2021}}{1-q}}{a_1^2q^{2024}} = 4, \text{ 即 } \frac{1-q^{2021}}{1-q} = \frac{1}{a_1q^2} \cdot \frac{1-q^{2020}-q}{1-q} = \frac{1}{a_1q^2} \frac{1-\frac{1}{q^{2021}}}{1-\frac{1}{q}} = 4,$$

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} + \frac{1}{a_{2023}} = \frac{1}{a_1q^2} \frac{1-\frac{1}{q^{2021}}}{1-\frac{1}{q}} = 4. \text{ 故选: D.}$$

【变式 1-4】(2023·全国·模拟预测) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1, 9S_4 - 10S_2 = 0$, 则 $S_5 =$ ()

- A. $\frac{13}{9}$ B. $\frac{40}{27}$ C. $\frac{121}{81}$ D. $\frac{80}{27}$

【答案】C

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

当 $q = 1$ 时, $9S_4 - 10S_2 = 36a_1 - 20a_1 = 16a_1 \neq 0$,

不符合题意, (注意对 $q = 1$ 情况的讨论), 所以 $q \neq 1$,

由 $9S_4 - 10S_2 = 0$ 得 $9 \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 10 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$, 得 $q = \frac{1}{3}$,

(注意等比数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 故 $q > 0$),

因此 $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{81}$. 故选: C.

【题型 2 等比数列性质的应用】

满分技巧

1、等比数列性质应用问题的解题突破口

等比数列的性质可以分为三类: 一是通项公式的变形, 二是等比中项公式的变形, 三是前 n 项和公式的变形. 根据题目条件, 认真分析, 发现具体的变化特征即可找出解决问题的突破口.

2、应用等比数列性质解题时的 2 个注意点

(1) 在解决等比数列的有关问题时, 要注意挖掘隐含条件, 利用性质,

特别是性质“若 $k + l = m + n (k, l, m, n \in \mathbb{N}^*)$, 则有 $a_k \cdot a_l = a_m \cdot a_n$ ”, 可以减少运算量, 提高解题速度.

(2) 在应用相应性质解题时, 要注意性质成立的前提条件, 有时需要进行适当变形. 此外, 解题时注意设而不求思想的运用.

【例 2】(2023·湖南永州·高三校考阶段练习) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 = 10$, 则 $\lg a_1 + \lg a_9 =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 10 D. 100

【答案】B

【解析】由等比数列的性质可得, $a_1 \cdot a_9 = a_5^2 = 100$,

所以 $\lg a_1 + \lg a_9 = \lg(a_1 \cdot a_9) = \lg 100 = 2$. 故选: B

【变式 2-1】(2023·全国·模拟预测) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 M_n , 且 $M_{2024} = 3M_{2019}$, 若 $b_n = \log_3 a_n$

, 则 $b_{1023} + b_{3021} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because M_{2024} = 3M_{2019}$, $\therefore M_{2019} a_{2020} a_{2021} a_{2022} a_{2023} a_{2024} = 3M_{2019}$, $\therefore a_{2020} a_{2021} a_{2022} a_{2023} a_{2024} = 3$,

又 $a_{2020} a_{2024} = a_{2021} a_{2023} = a_{2022}^2$, $\therefore a_{2022}^5 = 3$, 得 $a_{2022} = 3^{\frac{1}{5}}$,

$\therefore b_{1023} + b_{3021} = \log_3 a_{1023} + \log_3 a_{3021} = \log_3 (a_{1023} a_{3021}) = \log_3 a_{2022}^2 = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$. 故选: B.

【变式 2-2】 (2023·陕西·校联考模拟预测) 等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 > 0, q > 0, a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 = 32$, 则 $a_2 + a_8$ 的最小值为_____.

【答案】 4

【解析】 依题意, 等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 > 0, q > 0, a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 = 32$,

所以 $a_5^5 = 32, a_5 = 2$, 且 $a_n > 0$,

所以 $a_2 + a_8 \geq 2\sqrt{a_2 \cdot a_8} = 2\sqrt{a_5^2} = 4$,

当且仅当 $a_2 = a_8 = 2$ 时等号成立, 此时 $a_n = 2$.

所以 $a_2 + a_8$ 的最小值为 4.

【变式 2-3】 (2023·江苏淮安·高三校联考期中) 已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$. 若 $a_2 a_5 a_8 = 2^9$, 则 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_9 = (\quad)$

- A. 24 B. 27 C. 36 D. 40

【答案】 B

【解析】 数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, $a_2 a_8 = a_5^2$,

由 $a_2 a_5 a_8 = 2^9$, 得 $a_5^3 = 2^9$, 得 $a_5 = 8$,

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_9 = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_9 = \log_2 (a_1 a_2 a_3 \dots a_9)$

$= \log_2 [(a_1 a_9)(a_2 a_8)(a_3 a_7)(a_4 a_6) a_5] = \log_2 [(a_1 a_9)(a_2 a_8)(a_3 a_7)(a_4 a_6) a_5]$

$= \log_2 [(a_5^2)(a_5^2)(a_5^2)(a_5^2) a_5] = \log_2 a_5^9 = 9 \log_2 a_5 = 9 \log_2 8 = 9 \times 3 = 27$. 故选: B.

【变式 2-4】 (2023·安徽六安·高三六安一中校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_n > 0$, $a_{1012} = 1$, $f(\ln a_1) + f(\ln a_2) + f(\ln a_3) + \dots + f(\ln a_{2023}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2023}{2}$

【解析】 因为 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, 所以 $f(x) + f(-x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = 1$.

又因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_n > 0$, $a_{1012} = 1$

所以 $a_1 a_{2023} = a_2 a_{2022} = K = a_{1012}^2 = 1$,

所以 $\ln a_1 + \ln a_{2023} = \ln a_2 + \ln a_{2022} = K = 2 \ln a_{1012} = 0$

设 $S_{2023} = f(\ln a_1) + f(\ln a_2) + f(\ln a_3) + \cdots + f(\ln a_{2023})$ ①

则 $S_{2023} = f(\ln a_{2023}) + f(\ln a_{2022}) + f(\ln a_{2021}) + \cdots + f(\ln a_1)$ ②

由①+②得: $2S_{2023} = 2023$ 所以 $S_{2023} = \frac{2023}{2}$

【题型3 等比数列单调性及应用】

满分技巧

等比数列前 n 项和的函数特征

1. S_n 与 q 的关系

(1) 当公比 $q \neq 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,

它可以变形为 $S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n$, 设 $A = \frac{a_1}{1-q}$, 则上式可以写成 $S_n = A - Aq^n$ 的形式,

由此可见, 数列 $\{S_n\}$ 的图象是函数 $y = A - Aq^x$ 图象上的一群孤立的点;

(2) 当公比 $q = 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = na_1$, 则数列 $\{S_n\}$ 的图象是函数 $y = a_1 x$ 图象上的一群孤立的点。

2. S_n 与 a_n 的关系

当公比 $q \neq 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$, 它可以变形为 $S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{q}{1-q} a_n$

设 $A = -\frac{q}{1-q}$, $B = \frac{a_1}{1-q}$, 则上式可写成 $S_n = Aa_n + B$ 的形式, 则 S_n 是 a_n 的一次函数。

【例3】(2023·福建厦门·高三厦门第二中学校考阶段练习) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 则下列选项判断正确的是 ()

- A. 若 $S_{2022} > S_{2021}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
- B. 若 $T_{2022} > T_{2021}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
- C. 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 $a_{2022} \geq a_{2021}$
- D. 若数列 $\{T_n\}$ 是递增数列, 则 $a_{2022} \geq a_{2021}$

【答案】D

【解析】对于 A 中, 如果数列 $a_1 = -1$, 公比为 -2 , 满足 $S_{2022} > S_{2021}$,

但是等比数列 $\{a_n\}$ 不是递增数列, 所以 A 不正确;

对于 B 中, 如果数列 $a_1 = 1$, 公比为 $-\frac{1}{2}$, 满足 $T_{2022} > T_{2021}$,

但是等比数列 $\{a_n\}$ 不是递增数列, 所以 B 不正确;

对于 C 中, 如果数列 $a_1 = 1$, 公比为 $\frac{1}{2}$, 可得 $S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$,

数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 但是 $a_{2022} < a_{2021}$, 所以 C 不正确;

对于 D 中, 数列 $\{T_n\}$ 是递增数列, 可知 $T_n > T_{n-1}$, 可得 $a_n > 1$, 所以 $q \geq 1$,

可得 $a_{2022} \geq a_{2021}$ 正确, 所以 D 正确; 故选: D.

【变式 3-1】(2023·广东佛山·统考一模) 等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 $q (q \neq 1)$, $a_1 > 0$, 若 $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则“ $q > 1$ ”是“数列 $\{T_n\}$ 为递增数列”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】因为等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q ,

所以 $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 \cdot (a_1 q)^{n-1} = a_1^n \cdot q^{1+2+\cdots+n-1} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

当 $a_1 = \frac{1}{2}, q = 2$ 时, $T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = \frac{1}{2}$, 显然数列 $\{T_n\}$ 为不是递增数列;

当“数列 $\{T_n\}$ 为递增数列”时, 有 $T_{n+1} > T_n$,

因为 $a_1 > 0$, 所以如果 $q < 0$, 例如 $a_1 = 1, q = -1$, 显然有 $T_1 = 1, T_2 = -1$,

显然数列 $\{T_n\}$ 为不是递增数列, 因此有 $a_1 > 0, q > 0$,

所以由 $T_{n+1} > T_n \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{a_1^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}} = a_1 \cdot q^n > 1$,

当 $a_1 \geq 1, q > 1$ 时, 显然 $a_1 \cdot q^n > 1$ 对于 $N \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

当 $a_1 \geq 1, 0 < q < 1$ 时, $a_1 \cdot q^n > 1$ 对于 $N \in \mathbf{N}^*$ 不一定恒成立, 例如 $a_1 = 2, q = \frac{1}{3}$;

当 $0 < a_1 < 1, q > 1$ 时, $a_1 \cdot q^n > 1$ 对于 $N \in \mathbf{N}^*$ 不一定恒成立, 例如 $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{5}$;

当 $0 < a_1 < 1, 0 < q < 1$ 时, $a_1 \cdot q^n > 1$ 对于 $N \in \mathbf{N}^*$ 恒不成立,

因此“ $q > 1$ ”是“数列 $\{T_n\}$ 为递增数列”的必要不充分条件, 故选: B

【变式 3-2】(2023·湖南长沙·高三长沙一中校考阶段练习) (多选) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 且 $a_1 > 1, a_6 a_7 > 1, \frac{a_6 - 1}{a_7 - 1} < 0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $0 < q < 1$ B. $0 < a_7 a_8 < 1$ C. S_n 的最大值为 S_7 D. T_n 的最大值为 T_6

【答案】 ABD

【解析】 A 项, $a_1 > 1$ 且 $a_6 a_7 > 1 > 0 \Rightarrow q > 0$, 而 $\frac{a_6 - 1}{a_7 - 1} < 0 \Rightarrow a_6 - 1$ 和 $a_7 - 1$ 异号.

由于 $a_1 > 1$ 知 $a_6 - 1 > 0$, $a_7 - 1 < 0$, 即 $a_6 > 1$, $a_7 < 1$, $0 < q = \frac{a_7}{a_6} < 1$, 故 A 项正确;

B 项, 从前面的求解过程知 $a_1 > 1$, $0 < q < 1$, 说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的正项等比数列, 且 $0 < a_7 < 1$, 所以 $0 < a_8 < 1$, 那么 $0 < a_7 a_8 < 1$, 故 B 项正确;

C 项, $\{a_n\}$ 是正项数列, S_n 没有最大值, 故 C 项错误;

D 项, 从前面的分析过程可知 $\{a_n\}$ 前 6 项均大于 1, 从 a_7 起全部在 $(0, 1)$ 上.

所以 T_n 的最大值为 T_6 , 故 D 项正确, 故选: ABD

【变式 3-3】 (2023·云南曲靖·高三曲靖一中校考阶段练习) (多选) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 且满足 $0 < a_1 < 1, a_{2022} \cdot a_{2023} > 1, (1 - a_{2022}) \cdot (a_{2023} - 1) > 0$, 则下列选项正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 为递减数列 B. $S_{2022} + 1 < S_{2023}$
C. T_{2022} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最小项 D. 当 $T_n > 1$ 时, n 的最小值为 4045

【答案】 BC

【解析】 因为 $0 < a_1 < 1, a_{2022} \cdot a_{2023} > 1 \Rightarrow a_1^2 q^{4043} > 1$,

所以 $q^{4043} > \frac{1}{a_1^2} > 1 \Rightarrow q > 1$, 则 $\{a_n\}$ 各项为正数,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, 即 $\{a_n\}$ 为递增数列, A 错误;

由 A 项及 $(1 - a_{2022}) \cdot (a_{2023} - 1) > 0$ 可得 $a_{2022} < 1 < a_{2023}$, 则 $1 < S_{2023} - S_{2022}$, 故 B 正确;

由上可知 $a_1 < a_2 < \dots < a_{2022} < 1 < a_{2023}$, 故 $\begin{cases} T_{2022} = T_{2021} \cdot a_{2022} < T_{2021} \\ T_{2022} = T_{2023} \div a_{2023} < T_{2023} \end{cases}$, 即 C 正确;

由 $a_{2022} \cdot a_{2023} = a_1 \cdot a_{4044} > 1 \Rightarrow T_{4044} = (a_{2022} \cdot a_{2023})^{2022} > 1$,

显然 n 的最小值不为 4045, 即 D 错误. 故选: BC.

【变式 3-4】 (2023·全国·高三专题练习) (多选) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, 公比 $q > 1$, 且 $a_1 a_2 \cdots a_{2021} < 1$, $a_1 a_2 \cdots a_{2022} > 1$, 则 ()

- A. $a_{2022} > 1$ B. 当 $n = 2021$ 时, $a_1 a_2 \cdots a_n$ 最小
C. 当 $n = 1011$ 时, $a_1 a_2 \cdots a_n$ 最小 D. 存在 $n < 1011$, 使得 $a_n a_{n+1} = a_{n+2}$

【答案】 AC

【解析】 对于 A, $\because a_1 > 0, q > 1, \therefore a_n > 0$,

又 $a_1 a_2 \cdots a_{2021} < 1$, $a_1 a_2 \cdots a_{2022} > 1$, $\therefore a_{2022} > \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{2021}} > 1$, 故 A 正确 ;

对于 B , C , 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, 公比 $q > 1$, $\therefore a_n = a_1 q^{n-1} > 0$,

$Q \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, $a_n > 0$, $\therefore a_{n+1} > a_n$, $\therefore \{a_n\}$ 为递增数列 ,

由等比数列的性质 , $a_1 a_{2021} = a_2 a_{2020} = \cdots = a_{1010} a_{1012} = a_{1011}^2$,

又 $a_1 a_2 \cdots a_{2021} < 1$, $\therefore a_1 a_2 \cdots a_{2021} = a_{1011}^{2021} < 1$,

$Q a_n > 0$, $\therefore 0 < a_{1011} < 1$,

$\therefore a_2 a_{2022} = a_3 a_{2021} = \cdots = a_{1011} a_{1013} = a_{1012}^2$, $a_1 a_2 \cdots a_{2022} > 1$,

$\therefore a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2022} > \frac{1}{a_1}$, $\therefore a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2022} = a_{1012}^{2021} > \frac{1}{a_1}$,

$\therefore a_1 a_2 \cdots a_{2021} < 1$, $a_1 > 0$, $q > 1$, $\therefore 0 < a_1 < 1$, 则 $\frac{1}{a_1} > 1$,

$\therefore a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2022} = a_{1012}^{2021} > \frac{1}{a_1} > 1$, 即 $a_{1012} > 1$,

$Q \{a_n\}$ 为递增数列 , 故当 $n = 1011$ 时 , $a_1 a_2 \cdots a_n$ 最小 , 故 B 错误 , C 正确 ;

对于 D , 当 $n < 1011$ 时 , $a_n < a_{1011} < 1$,

$Q \{a_n\}$ 为递增数列 , $\therefore a_n a_{n+1} < a_{n+1} < a_{n+2}$, 故 D 错误. 故选 : AC

【题型 4 等比数列前 n 项和性质应用】

满分技巧

等比数列前 n 项和的性质

(1) 在公比 $q \neq -1$ 或 $q = -1$ 且 n 为奇数时 , S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$, \dots 仍成等比数列 , 其公比为 q^n ;

(2) 对 $\forall m, p \in N^*$, 有 $S_{m+p} = S_m + q^m S_p$;

(3) 若等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n$ 项 , 则 $\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = q$, 其中 $S_{偶}$, $S_{奇}$ 分别是数列 $\{a_n\}$ 的偶数项和与奇数项和 ;

(4) 等比数列的前 n 项和 $S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$, 令 $k = \frac{a_1}{1-q}$, 则 $S_n = k - k \cdot q^n$ (k 为常数 , 且 $q \neq 0, 1$)

【例 4】(2023·陕西榆林·高三校考阶段练习) 已知各项均为实数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{10} = 10$, $S_{30} = 70$, 则 $S_{40} =$ ()

A . 150 B . 140 C . 130 D . 120

【答案】 A

【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 在等比数列 $\{a_n\}$ 中 , 由 $S_{10} = 10$, $S_{30} = 70$ 可知 $q \neq -1$,

所以 $S_{10}, S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}, S_{40}-S_{30}$ 构成公比为 q' 的等比数列.

所以 $(S_{20}-S_{10})^2 = S_{10} \cdot (S_{30}-S_{20})$, 即 $(S_{20}-10)^2 = 10 \cdot (70-S_{20})$, 解得 $S_{20} = 30$ (负值舍去).

因为 $\frac{S_{20}-S_{10}}{S_{10}} = \frac{30-10}{10} = 2 = q'$, 所以 $S_{40}-S_{30} = 2(S_{30}-S_{20}) = 80$, $S_{40} = S_{30} + 80 = 150$. 故选: A

【变式 4-1】(2023·河北石家庄·高三统考期中) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_4 + a_5 + a_6 = 9$, 则 $S_{12} =$ ()

A . 27 B . 39 C . 81 D . 120

【答案】 D

【解析】 由题知, $S_3 = 3$, $S_6 - S_3 = 9$,

因为数列 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 成等比数列,

所以 $S_9 - S_6 = 27, S_{12} - S_9 = 81$,

所以 $S_{12} = S_9 + 81 = S_6 + 27 + 81 = S_3 + 9 + 27 + 81 = 120$. 故选: D.

【变式 4-2】(2023·云南昆明·高三云南民族大学附属中学校考阶段练习) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_4}{S_8} = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{S_{16}}{S_4 + S_8} =$ ()

A . 8 B . 9 C . 16 D . 17

【答案】 A

【解析】 设 $S_4 = x (x \neq 0)$, 则 $S_8 = 4x$,

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}$ 仍成等比数列.

易知 $\frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{4x - x}{x} = 3$,

所以 $\begin{cases} S_{12} - S_8 = 3(S_8 - S_4) = 9x \\ S_{16} - S_{12} = 3(S_{12} - S_8) = 27x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{12} = 13x \\ S_{16} = 40x \end{cases}$, 故 $\frac{S_{16}}{S_4 + S_8} = \frac{40x}{x + 4x} = 8$. 故选: A.

【变式 4-3】(2023·河北保定·高三保定市第三中学校联考期末) (多选) 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d ; 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q , 则下列说法正确的是 ()

A . 存在 d 和 q , 使得 $a_n = b_n$.

B . 若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 成等差数列

C . 若 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 则 $T_n, T_{2n} - T_n, T_{3n} - T_{2n}, \dots$ 成等比数列

D . 当 $b_n > 0$ 时, 存在实数 A, a 使得 $A \cdot a^n = b_n$

【答案】 ABD

【解析】 对于选项 A: 例如 $d = 0, b = 1$, $a_n = b_n = 1$, 故 A 正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/897104120023006062>