

2023-2024 学年安徽省蚌埠田家炳中学高三一诊考试数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点，点 P 是其一条渐近线上一点，且以 F_1F_2 为直径的圆经过点

P ，若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}b^2$ ，则双曲线的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3

2. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距是虚轴长的 2 倍，则双曲线的渐近线方程为（ ）

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

3. 设函数 $g(x) = e^x + (1 - \sqrt{e})x - a$ ($a \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数), 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) = x^2$,

且当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) < x$. 若存在 $x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\}$, 且 x_0 为函数 $y = g(x) - x$ 的一个零点, 则实数

a 的取值范围为（ ）

- A. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$ B. $(\sqrt{e}, +\infty)$ C. $[\sqrt{e}, +\infty)$ D. $\left[\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$

4. 山东烟台苹果因“果形端正、色泽艳丽、果肉甜脆、香气浓郁”享誉国内外. 据统计, 烟台苹果 (把苹果近似看成球体) 的直径 (单位: mm) 服从正态分布 $N(80, 5^2)$, 则直径在 $(75, 90]$ 内的概率为（ ）

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

- A. 0.6826 B. 0.8413 C. 0.8185 D. 0.9544

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = -x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$,

都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是（ ）.

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$ C. $(-\infty, 7]$ D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别是 A, B ，双曲线的右焦点 F 为 $(2, 0)$ ，点 P 在过 F 且垂直于 x 轴的直线 l 上，当 $\triangle ABP$ 的外接圆面积达到最小时，点 P 恰好在双曲线上，则该双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

7. 已知点 F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的右焦点，直线 $y = kx$ 与双曲线交于 A, B 两点，若 $\angle AF_2B = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $\triangle AF_2B$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 3, AD = 2, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ，若 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = 12$ ，则 $\angle ADC = ()$

- A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

9. 已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f(x) = 3^x + \frac{4}{3}$ ，则 $f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) = ()$

- A. -2 B. 3 C. -3 D. 2

10. 新闻出版业不断推进供给侧结构性改革，深入推动优化升级和融合发展，持续提高优质出口产品供给，实现了行业的良性发展. 下面是 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收增长情况，则下列说法错误的是 ()



- A. 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
B. 2016 年我国数字出版业营收超过 2012 年我国数字出版业营收的 2 倍
C. 2016 年我国新闻出版业营收超过 2012 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
D. 2016 年我国数字出版营收占新闻出版营收的比例未超过三分之一

11. 用一个平面去截正方体，则截面不可能是（ ）
- A. 正三角形 B. 正方形 C. 正五边形 D. 正六边形
12. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$ (i 为虚数单位)，则 z 的虚部为（ ）
- A. $-i$ B. i C. 1 D. -1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\int_0^2 x^3 dx = n$ ，则 $\left(\frac{1}{x} - 2\right)(x+1)^n$ 展开式 x^2 的系数为_____.
14. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 DD_1 的中点， F 是侧面 CDD_1C_1 上的动点，且 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE ，记 B_1 与 F 的轨迹构成的平面为 α .
- ① $\exists F$ ，使得 $B_1F \perp CD_1$ ；
- ② 直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ；
- ③ α 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$ ；
- ④ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中，与 α 所成的锐二面角相等的侧面共四个.

其中正确命题的序号是_____.（写出所有正确命题的序号）

15. 函数 $f(x) = e^x - x - b$ (e 为自然对数的底数， $b \in R$)，若函数 $g(x) = f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$ 恰有 4 个零点，则实数 b 的取值范围为_____.

16. 某次足球比赛中， A, B, C, D 四支球队进入了半决赛. 半决赛中， A 对阵 C ， B 对阵 D ，获胜的两队进入决赛争夺冠军，失利的两队争夺季军. 已知他们之间相互获胜的概率如下表所示.

	A	B	C	D
A 获胜概率	—	0.4	0.3	0.8
B 获胜概率	0.6	—	0.7	0.5
C 获胜概率	0.7	0.3	—	0.3
D 获胜概率	0.2	0.5	0.7	—

则 A 队获得冠军的概率为_____.

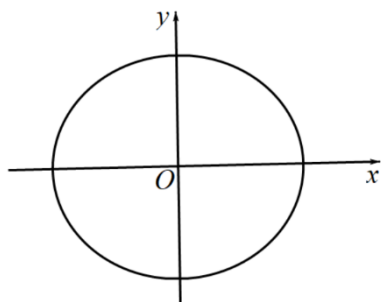
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $2a + c = 2b \cos C$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 若 $a=3$, 且 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $|\vec{BG}| = \frac{\sqrt{19}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $(0, \sqrt{3})$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知 $\triangle BMN$ 是椭圆 C 的内接三角形,

①若点 B 为椭圆 C 的上顶点, 原点 O 为 $\triangle BMN$ 的垂心, 求线段 MN 的长;

②若原点 O 为 $\triangle BMN$ 的重心, 求原点 O 到直线 MN 距离的最小值.

19. (12 分) 设函数 $f(x) = |x+a| + |x-1| (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;

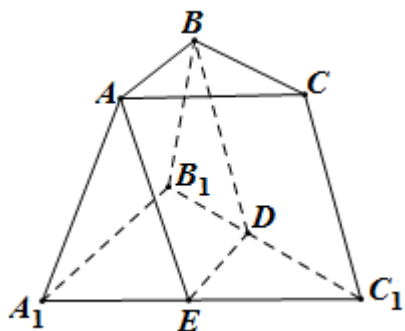
(2) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \geq 2$, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 垂直于 x 轴, 垂足为 T , 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于不同的两点 P, Q , 且 $\vec{F_1P} \cdot \vec{F_2Q} = -5$, 过 F_2 的直线 m 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 设 $\vec{F_2A} = \lambda \vec{F_2B}$, 且 $\lambda \in [-2, -1]$.

(1) 求点 T 的坐标;

(2) 求 $|\vec{TA} + \vec{TB}|$ 的取值范围.

21. (12 分) 如图, 已知在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = 2AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $A_1B_1 \perp BB_1$.

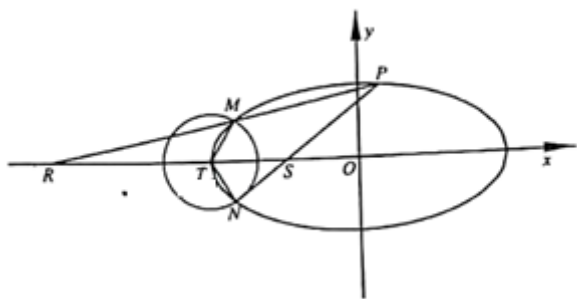


(1) 求证: $AB \perp CC_1$;

(2) 过 AB 的平面 $ABDE$ 分别交 B_1C_1 , A_1C_1 于点 D , E , 且分割三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 所得两部分几何体的体积比为 $V_{AA_1E-BB_1D} = V_{ABC-BDC_1} = 4:3$, 几何体 $ABC-EDC_1$ 为棱柱, 求 A_1B_1 的长.

提示: 台体的体积公式 $V = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$ (S' , S 分别为棱台的上、下底面面积, h 为棱台的高).

22. (10 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 以椭圆 C 左顶点 T 为圆心作圆 $T: (x+2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 设圆 T 与椭圆 C 交于点 M 与点 N .



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 求 $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TN}$ 的最小值, 并求此时圆 T 的方程;

(3) 设点 P 是椭圆 C 上异于 M , N 的任意一点, 且直线 MP , NP 分别与 x 轴交于点 R , S , O 为坐标原点, 求证:

$|OR| \cdot |OS|$ 为定值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据题意，设点 $P(x_0, y_0)$ 在第一象限，求出此坐标，再利用三角形的面积即可得到结论。

【详解】

由题意，设点 $P(x_0, y_0)$ 在第一象限，双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，

所以， $y_0 = \frac{b}{a}x_0$ ，

又以 F_1F_2 为直径的圆经过点 P ，则 $|OP| = c$ ，即 $x_0^2 + y_0^2 = c^2$ ，解得 $x_0 = a$ ， $y_0 = b$ ，

所以， $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot y_0 = c \cdot b = \frac{2\sqrt{3}}{3}b^2$ ，即 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$ ，即 $c^2 = \frac{4}{3}(c^2 - a^2)$ ，

所以，双曲线的离心率为 $e = 2$ 。

故选：B.

【点睛】

本题主要考查双曲线的离心率，解决本题的关键在于求出 a 与 c 的关系，属于基础题。

2、A

【解析】

根据双曲线的焦距是虚轴长的 2 倍，可得出 $c = 2b$ ，结合 $c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$ ，得出 $a^2 = 3b^2$ ，即可求出双曲线的渐近线方程。

【详解】

解：由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 可知，焦点在 x 轴上，

则双曲线的渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

由于焦距是虚轴长的 2 倍，可得： $c = 2b$ ，

$$\therefore c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{即: } a^2 = 3b^2, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质, 以及双曲线的渐近线方程.

3、D

【解析】

先构造函数 $T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$, 由题意判断出函数 $T(x)$ 的奇偶性, 再对函数 $T(x)$ 求导, 判断其单调性, 进而可求出结果.

【详解】

构造函数 $T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$,

因为 $f(-x) + f(x) = x^2$,

所以 $T(x) + T(-x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + f(-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 = f(x) + f(-x) - x^2 = 0$,

所以 $T(x)$ 为奇函数,

当 $x \leq 0$ 时, $T'(x) = f'(x) - x < 0$, 所以 $T(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减,

所以 $T(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

因为存在 $x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\}$,

所以 $f(x_0) + \frac{1}{2} \geq f(1-x_0) + x_0$,

所以 $T(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2} \geq T(1-x_0) + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 + x_0$,

化简得 $T(x_0) \geq T(1-x_0)$,

所以 $x_0 \leq 1-x_0$, 即 $x_0 \leq \frac{1}{2}$

令 $h(x) = g(x) - x = e^x - \sqrt{e}x - a \left(x \leq \frac{1}{2}\right)$,

因为 x_0 为函数 $y = g(x) - x$ 的一个零点,

所以 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时有一个零点

因为当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) = e^x - \sqrt{e} \leq e^{\frac{1}{2}} - \sqrt{e} = 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时单调递减,

由选项知 $a > 0$, $-\frac{a}{\sqrt{e}} < 0 < \frac{1}{2}$,

又因为 $h\left(-\frac{a}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{a}{\sqrt{e}}} - \sqrt{e}\left(-\frac{a}{\sqrt{e}}\right) - a = e^{-\frac{a}{\sqrt{e}}} > 0$,

所以要使 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时有一个零点,

只需使 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}\sqrt{e} - a \leq 0$, 解得 $a \geq \frac{\sqrt{e}}{2}$,

所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$, 故选 D.

【点睛】

本题主要考查函数与方程的综合问题, 难度较大.

4、C

【解析】

根据服从的正态分布可得 $\mu = 80$, $\sigma = 5$, 将所求概率转化为 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$, 结合正态分布曲线的性质可求得结果.

【详解】

由题意, $\mu = 80$, $\sigma = 5$, 则 $P(75 < X, 85) = 0.6826$, $P(70 < X, 90) = 0.9544$,

所以 $P(85 < X, 90) = \frac{1}{2} \times (0.9544 - 0.6826) = 0.1359$, $P(75 < X, 90) = 0.6826 + 0.1359 = 0.8185$.

故果实直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 0.8185.

故选: C

【点睛】

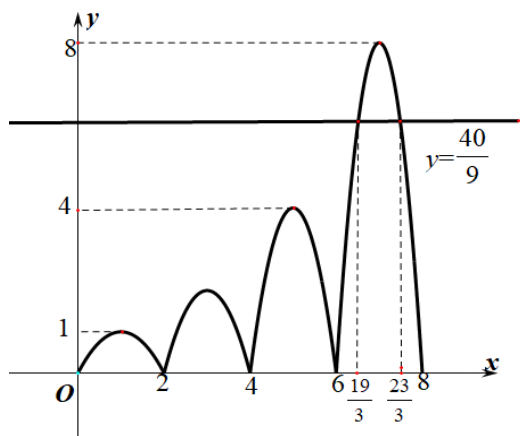
本题考查根据正态分布求解特定区间的概率问题, 考查了正态曲线的对称性, 属于基础题.

5、B

【解析】

求出 $f(x)$ 在 $x \in (2n, 2n+2]$ 的解析式, 作出函数图象, 数形结合即可得到答案.

【详解】



当 $x \in (2n, 2n+2]$ 时, $x-2n \in (0, 2]$, $f(x) = 2^n f(x-2n) = -2^n(x-2n)(x-2n-2)$,

$f(x)_{\max} = 2^n$, 又 $4 < \frac{40}{9} < 8$, 所以 m 至少小于 7, 此时 $f(x) = -2^3(x-6)(x-8)$,

令 $f(x) = \frac{40}{9}$, 得 $-2^3(x-6)(x-8) = \frac{40}{9}$, 解得 $x = \frac{19}{3}$ 或 $x = \frac{23}{3}$, 结合图象, 故 $m \leq \frac{19}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查不等式恒成立求参数的范围, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

6、A

【解析】

点 P 的坐标为 $(2, m)$ ($m > 0$), $\tan \angle APB = \tan(\angle APF - \angle BPF)$, 展开利用均值不等式得到最值, 将点代入双曲线计算得到答案.

【详解】

不妨设点 P 的坐标为 $(2, m)$ ($m > 0$), 由于 $|AB|$ 为定值, 由正弦定理可知当 $\sin \angle APB$ 取得最大值时, $\triangle APB$ 的外接圆面积取得最小值, 也等价于 $\tan \angle APB$ 取得最大值,

因为 $\tan \angle APF = \frac{a+2}{m}$, $\tan \angle BPF = \frac{2-a}{m}$,

所以 $\tan \angle APB = \tan(\angle APF - \angle BPF) = \frac{\frac{2+a}{m} - \frac{2-a}{m}}{1 + \frac{2+a}{m} \cdot \frac{2-a}{m}} = \frac{2a}{m + \frac{b^2}{m}} \leq \frac{2a}{2\sqrt{m \cdot \frac{b^2}{m}}} = \frac{a}{b}$,

当且仅当 $m = \frac{b^2}{m}$ ($m > 0$), 即当 $m = b$ 时, 等号成立,

此时 $\angle APB$ 最大, 此时 APB 的外接圆面积取最小值,

点 P 的坐标为 $(2, b)$ ，代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$ 。

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查了求双曲线方程，意在考查学生的计算能力和应用能力。

7、D

【解析】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，连接 AF_1, BF_1 ，由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$ ，得 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \frac{\pi}{3}$ ，求出 r_1r_2 的值，即得解。

【详解】

设双曲线 C 的左焦点为 F_1 ，连接 AF_1, BF_1 ，

由对称性可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = S_{\triangle AF_2B}$ ， $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$ 。

设 $|AF_1| = r_1, |AF_2| = r_2$ ，则 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \frac{\pi}{3} = r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2$ ，

又 $|r_1 - r_2| = 2a$ ，故 $r_1r_2 = 4b^2 = 16$ ，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$ 。

故选：D

【点睛】

本题主要考查双曲线的简单几何性质，考查余弦定理解三角形和三角形面积的计算，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平。

8、C

【解析】

由 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ，利用平面向量的数量积运算，先求得

$\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，利用平行四边形的性质可得结果。

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/897115042164006063>