信息论与编码-最优译码和最大似然译码

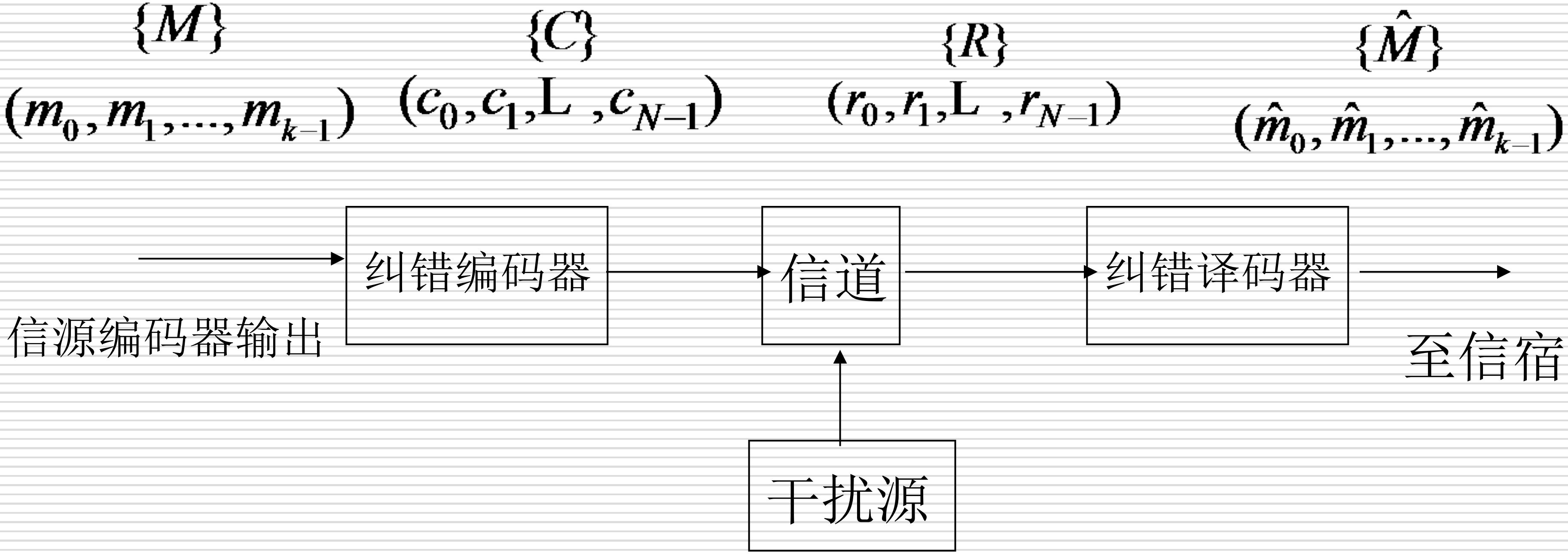
- 最优译码和最大似然译码

信道的输入是一种二（或q）进制序列，而译码器的输出时一种信息序列M的估值序列 $\hat{M}$ 。如下图所示。

译码器的基本任务就是根据一套译码规则，由接受序列R给出与发送的信息序列最接近（最佳是相同）的估值序列 $\hat{M}$

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

分组码数字通信模型



信息论与编码-最优译码和最大似然译码

- 因为M与码字C之间存在一一相应关系，所以这等价于译码其根据R产生一种C的估值序列，$\hat{C}$
- 显然，当且仅当$\hat{C} = C$ 时，$\hat{M} = M$。这时译码器正确译码。
- 假如$\hat{C} \neq C$ ，则译码器产生错误译码。
- 当给定接受序列R时，译码器的条件译码错误概率定义为

$$P(E/R) = P(\hat{C} \neq C/R)$$

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

- 所以译码器的错误译码概率为

$$P_E = \sum_R P(E/R)p(R)$$

其中，$p(R)$ 是接受R的概率，与译码措施无关，

- 译码错误概率最小的最佳译码规则是使P_E 最小，即

$$\min P_E = \min P(E/R) = \min P(\hat{C} \neq C/R)$$

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

而 $\min P(\hat{C} \neq C/R) \Rightarrow \max P(\hat{C} = C/R)$

所以，假如译码器对输入的R，能在 2^k 个码字中选择一种使 $P(C_i = C/R)(i = 1,2,\cdots,2^k)$ 最大的码字 C_i 作为C的估值序列 $\hat{C}$ ，即

$$\hat{C}_i = \max p(C_i / R)$$

则这种译码规则一定能使译码器输犯错误概率最小，称这种译码规则为最大后验概率译码MAP (maximum aposteriori),也叫做最佳译码。是一种经过经验与归纳由收码推测发码的措施，是最优的译码措施。

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

由贝叶斯公式

$$p(C_i / R) = \frac{p(C_i)p(R / C_i)}{p(R)}$$

可知，假如发送端发送每一种码字的概率 $p(C_i)$ 均相同,且p(R)对全部R也相等（信道对称均衡），则有

$$\max_{i=1,2,\cdots,2^k} p(C_i / R) \Rightarrow \max_{i=1,2,\cdots,2^k} p(R / C_i)$$

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

- 一种译码器假如能选择

$$\hat{C}_i = \max_{i=1,2,\cdots,2^k} p(R/C_i)$$

即在已知r的情况下使先验概率最大，则这种译码规则称为最大似然译码（MLD：Maximum Likelihood)，$p(R/C_i)$ 称为似然函数。相应的译码器称为最大似然译码器。

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

- 因为log$x$与x是单调关系，所以最大似然规则也能够写成

$$\max_{i=1,2,\cdots,2^k} \log p(R/C_i) = \max_{i=1,2,\cdots,2^k} \sum_{j=1}^{N} \log p(r_j/c_{ij})$$

称log$p$(R/C)为对数似然函数。

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

- 对于DMC信道，假如发送端发送每一种码字的概率 $p(C_i)$ 相等，则一般可以为MLD就是译码错误概率最小的一种最佳译码规则。
- 因为最佳译码要求懂得后验概率p(R/C)，这在诸多时候是很困难的，所以经常使用的是最大似然译码，在诸多情况下，能够以为最大似然译码就是最佳译码。

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

对于BSC信道，在译码的时候，假如我们逐比特地比较发码和收码，就只有两种可能性：相同或者不同，其概率分别是：

$$p(r_j / c_{ij}) = \begin{cases} p & c_{ij} \neq r_j\text{时} \\ 1-p & c_{ij} = r_j\text{时} \end{cases}$$

信息论与编码-最优译码和最大似然译码

假如R中有d个码元与C_i 不同，我们称R和C_i之间的距离为d，这么定义的距离称为汉明距离。接受码字R和发送码字C_i 之间的汉明距离，就是两者模2加后的重量，即

$$d = dis(R, C_i) = W(R \oplus C_i) = \sum_{j=1}^{N} r_j \oplus c_{ij}$$