

向量代数与空间解析几何

第一节 向量的概念及向量的表示

一. 向量的基本概念

二. 向量的坐标表示

一. 向量的基本概念

1. 向量及其几何表示.
2. 向量的加减法、向量与数乘.
3. 向量在轴上的投影.

1. 向量及其几何表示

物理量

```
graph LR; A[物理量] --- B[标量]; A --- C[向量];
```

标量: 仅用数值大小就可描述的量.

例如, 面积、体积、质量、温度、功...

向量: 除用数值描述其大小外, 还要指明它在空间中的方向的量.

例如, 速度、加速度、力、位移...

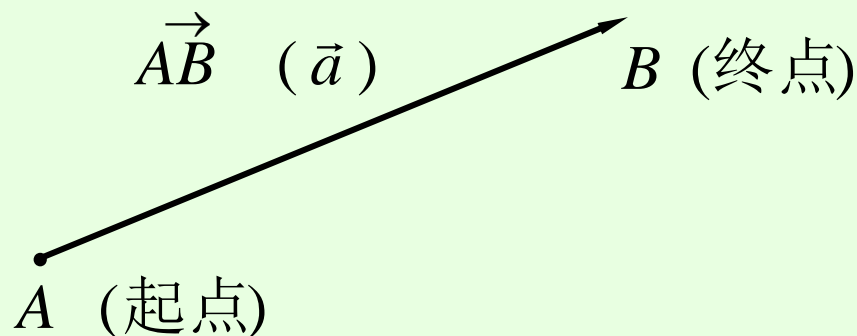
向量、模

一般说来，向量间不能比较大小，但向量的模可以比较大小。

在空间中，由数值大小，同时由方向确定的量，称为向量。

表示向量大小的数值，称为向量的模，它是一个非负数。

向量的几何表示



$\|\vec{AB}\|$ 和 $\|\vec{a}\|$ 表示向量的模。

向量相等

若向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足下列条件:

1. $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ (模相等);
2. 方向相同,

则称向量 \vec{a} 与 \vec{b} 相等, 记为 $\vec{a} = \vec{b}$ 。

在这种定义下,
向量可以在空间中任意平移。

具有这种性质的
向量称为“自由向量”。

若向量 \vec{a} 和 \vec{b} 位于同一直线或两条平行的直线上,
且指向相同, 则称 \vec{a} 与 \vec{b} 方向相同。

零向量、单位向量、向量的负向量

1. 模等于零的向量，称为零向量，记为 $\vec{0}$ 。

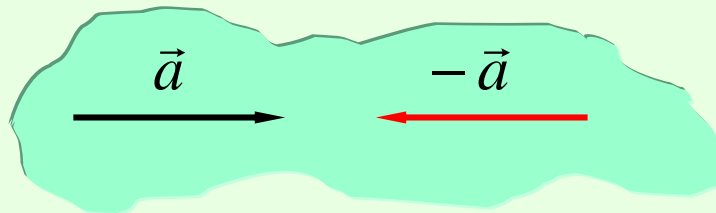
规定零向量的方向是任意的，可根据需要来确定。

几何上， $\vec{0}$ 表示为空间中的一个点， $\|\vec{0}\|=0$ 。

2. 与已知的非零向量 \vec{a} 同向，且模为1的向量，称为 \vec{a} 的单位向量，记为 \vec{a}^0 。 ($\|\vec{a}^0\|=1$)

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{a}^0$$

3. 与 \vec{a} 的模相等，方向相反的向量，称为 \vec{a} 的负向量，记为 $-\vec{a}$ 。



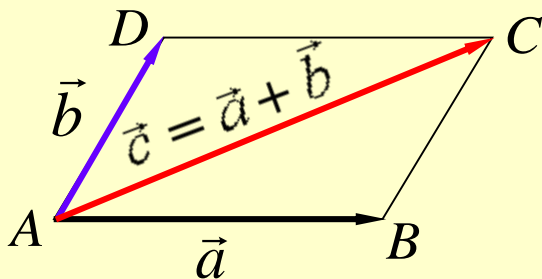
平行、共线、共面

1. 若向量 \vec{a} 与 \vec{b} 方向相同或相反, 则称 \vec{a} 与 \vec{b} 平行, 记作 $\vec{a} // \vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行;
2. 因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量共线.
3. 若 $k (\geq 3)$ 个向量经平移可移到同一平面上, 则称此 k 个向量共面.

2. 向量的加减法、向量与数乘

向量的加法

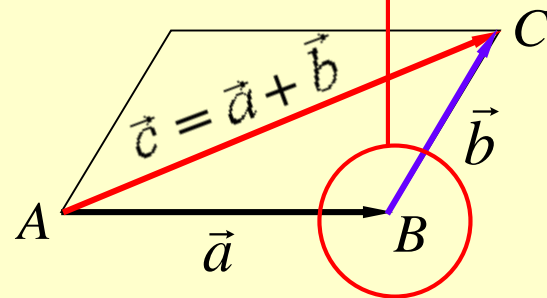
平行四边形法



$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

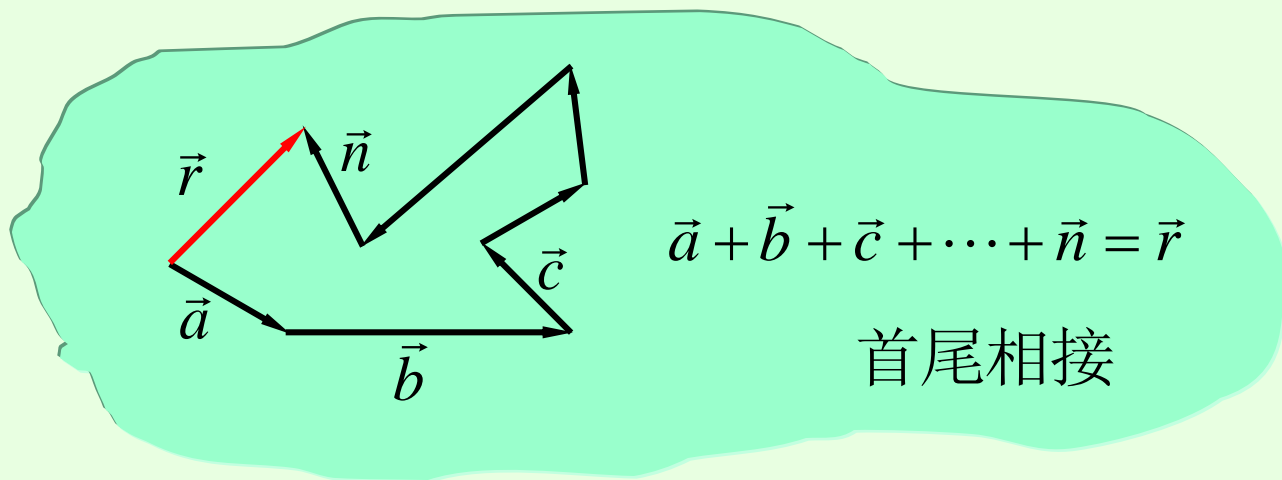
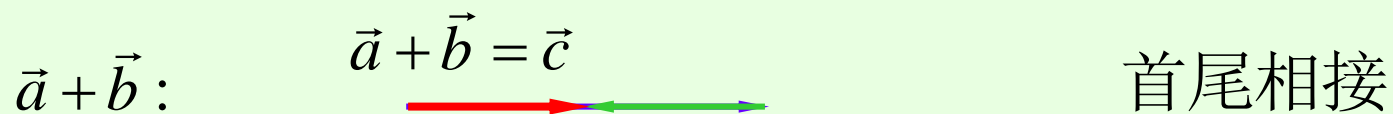
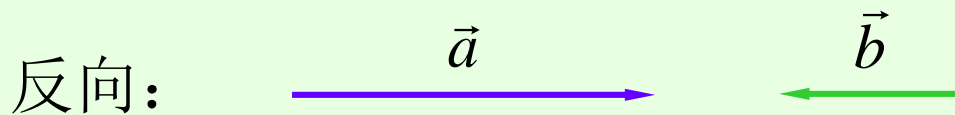
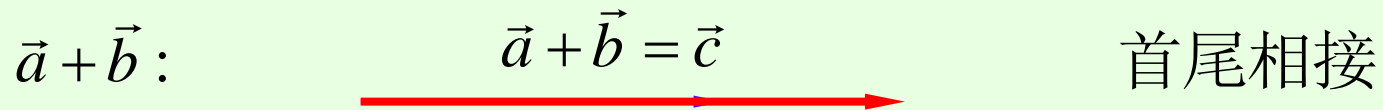
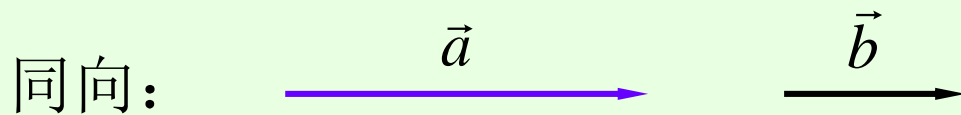
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

三角形法



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

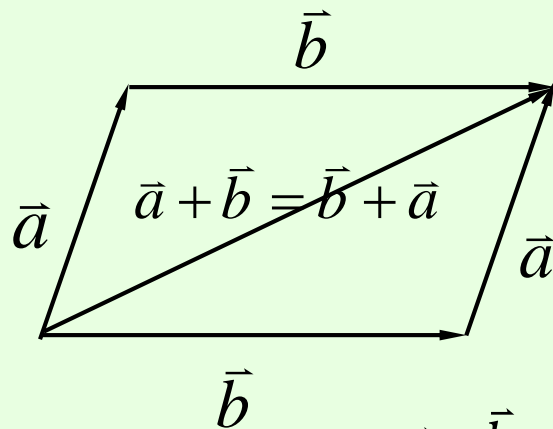
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



向量加法的运算律

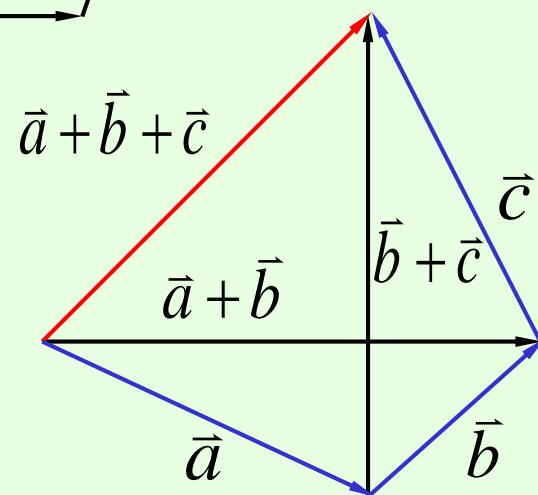
(1) 交换律:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



(2) 结合律:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



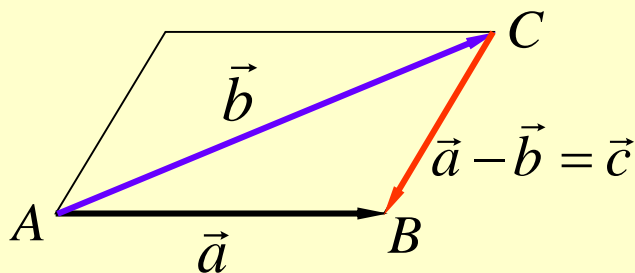
向量的减法

向量的减法是其加法的逆运算：

若 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ ，则称向量 \vec{c} 为向量 a 与 b 之差，记为

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}。$$

三角形法



$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

由减项的终点指向被减项的终点

向量与数乘

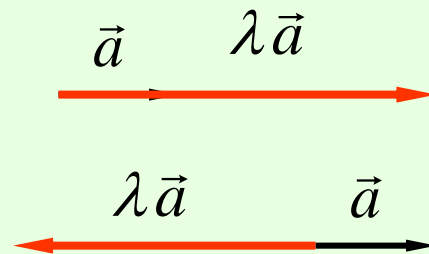
向量 \vec{a} 与实数 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 为满足下列条件的向量:

1. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$;

2. $\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向,

$\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向,

$\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ 。



向量与数相乘,

相当于将向量沿原方向或反向进行拉长或缩短。

向量数乘的运算律

(1) 结合律 $\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = \lambda \mu \vec{a}$

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

向量平行

若向量 \vec{a} 和 \vec{b} 位于同一直线或两条平行的直线上，
则称向量 \vec{a} 与 \vec{b} 平行，记为 $a \parallel b$ 。

规定： $\vec{0}$ 与任何一个向量平行。

"
←

"

已知 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 则

当 $\lambda = 0$ 时, $\vec{b} = \vec{0}$

当 $\lambda > 0$ 时, \vec{a}, \vec{b} 同向

当 $\lambda < 0$ 时, \vec{a}, \vec{b} 反向

} $\longrightarrow \vec{a} // \vec{b}$

向量运算的性质

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}), \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, \quad \underbrace{\vec{a} + \cdots + \vec{a}}_{n \uparrow} = n \vec{a},$$

$$\vec{a} \pm \vec{0} = \vec{a}, \quad \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, \quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda,$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

$$\lambda \mu \vec{a} = (\lambda \mu) \vec{a} = \lambda (\mu \vec{a}),$$

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a},$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$



设 \vec{a} 为非零向量, 则 $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ 。

证 因为 a 是非零向量, 故 $\|\vec{a}\| \neq 0$, 所以, 可令 $\lambda = \frac{1}{\|\vec{a}\|}$ 。

由于 $\lambda > 0$, 所以, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向。

$$\text{又} \quad \|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \|\vec{a}\| = 1,$$

故 $\lambda\vec{a}$ 是一个单位向量。

综上所述, $\lambda\vec{a}$ 为 \vec{a} 的单位向量, 即 $\lambda\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{a}^0$ 。

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{a}^0$$



设 $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{v} = 3\vec{b} - \vec{a}$, 求 $\vec{u} - \vec{v}$ 。

解

$$\vec{u} - \vec{v} = (\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) - (3\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} - 3\vec{b} + \vec{a}$$

$$= 2\vec{a} - 5\vec{b} + 4\vec{c}。$$



在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$
试用 \vec{a} 和 \vec{b} 表示向量 \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} 和 \overrightarrow{MD} .
其中, M 是平行四边形对角线的交点.

解: 由 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MC}$

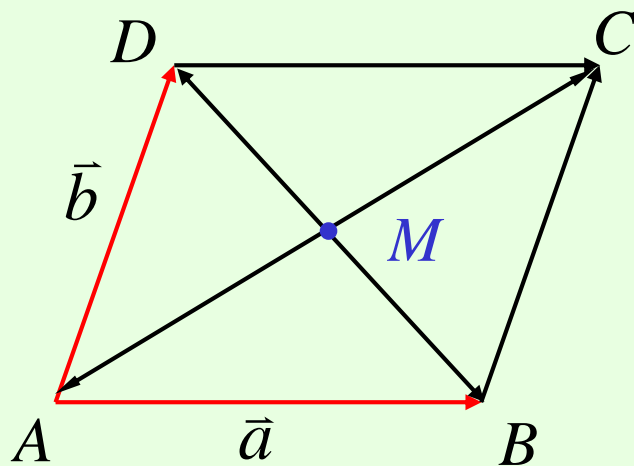
$$\text{有 } \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{又 } \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD}$$

$$\text{有 } \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$



3. 向量在轴上的投影

向量间的夹角

设 \vec{a} 与 \vec{b} 是两个非零向量。

平移 \vec{b} 使它的起点与 \vec{a} 的起点重合, 此时它们可确定

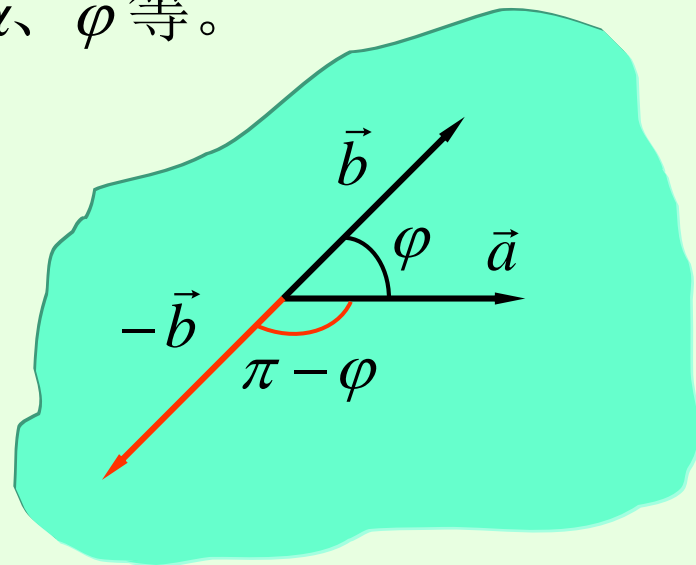
一个平面。在该平面上, \vec{a} 与 \vec{b} 正向间不超过 π 的夹角称为

向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角, 记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 或 α 、 φ 等。

$$0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$$

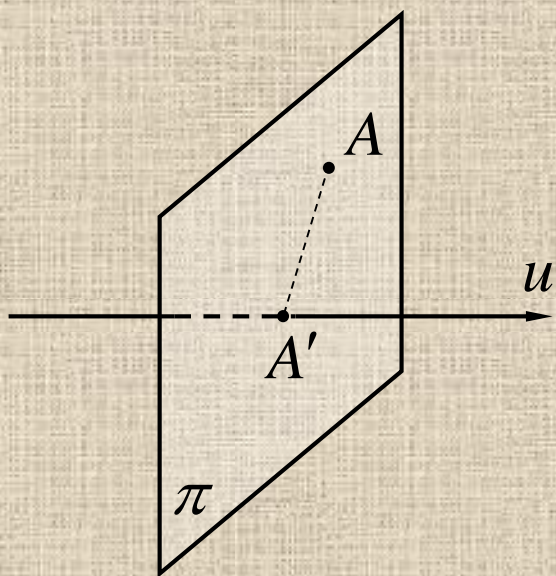
$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, -\vec{b} \rangle = \pi - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

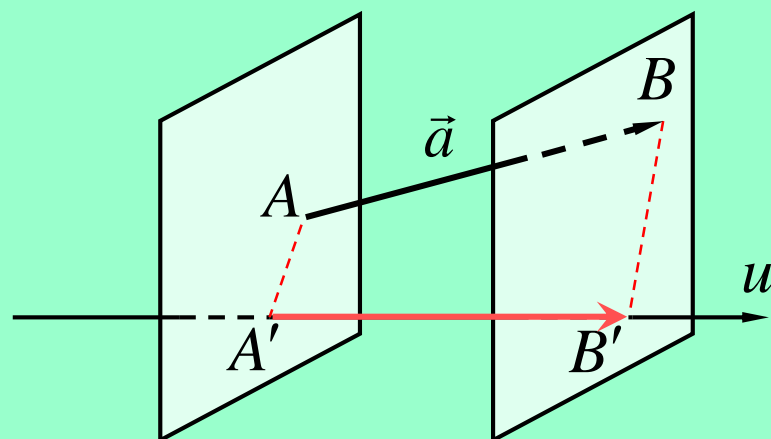


向量在轴上的投影

空间中一点在轴上的投影



prj 是 $project$ 的缩写



轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 为
向量 \vec{a} 在轴 u 上的投影向量。

向量 \vec{a} 在轴 u 上的投影:

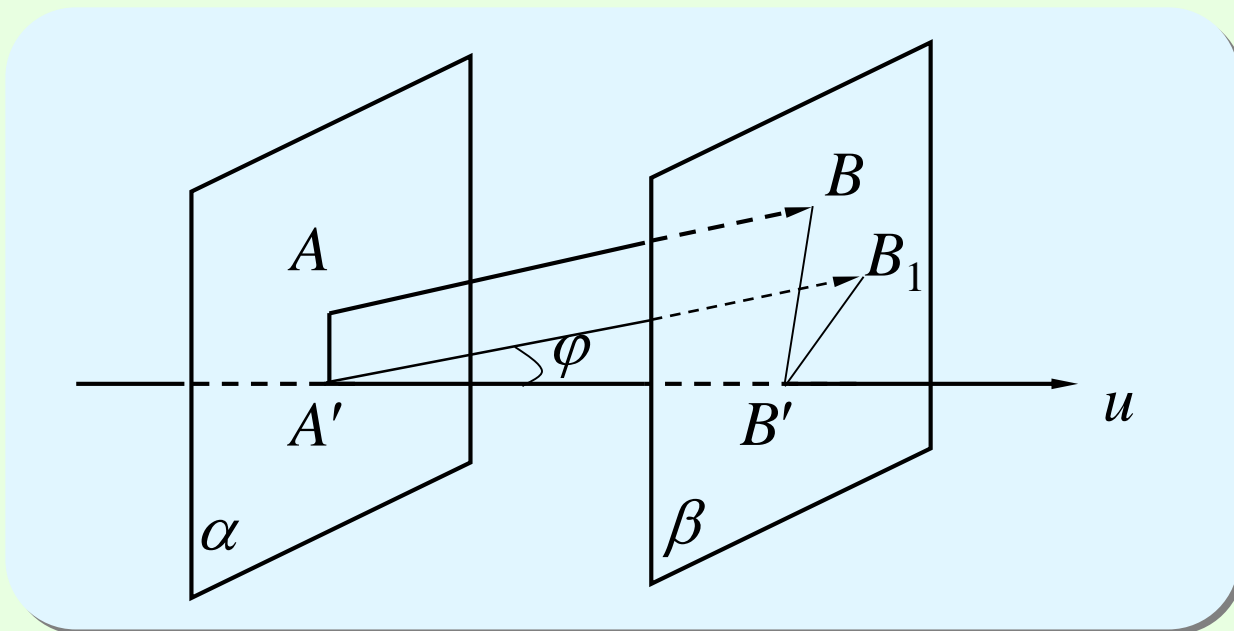
$$prj_u \vec{a} = \begin{cases} \|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'} \text{ 与轴 } u \text{ 同向} \\ -\|\overrightarrow{A'B'}\| & \overrightarrow{A'B'} \text{ 与轴 } u \text{ 反向} \end{cases}$$

投影定理

投影定理 1

$$\text{prj}_u \vec{a} = \|\vec{a}\| \cos \varphi$$

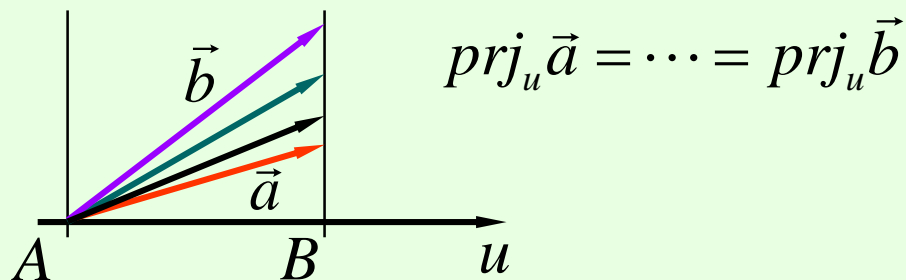
其中 $\varphi = \langle \vec{a}, u \rangle$ 。



投影定理 1 的推论

若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $\text{prj}_u \vec{a} = \text{prj}_u \vec{b}$ 。

该推论的逆命题不成立。



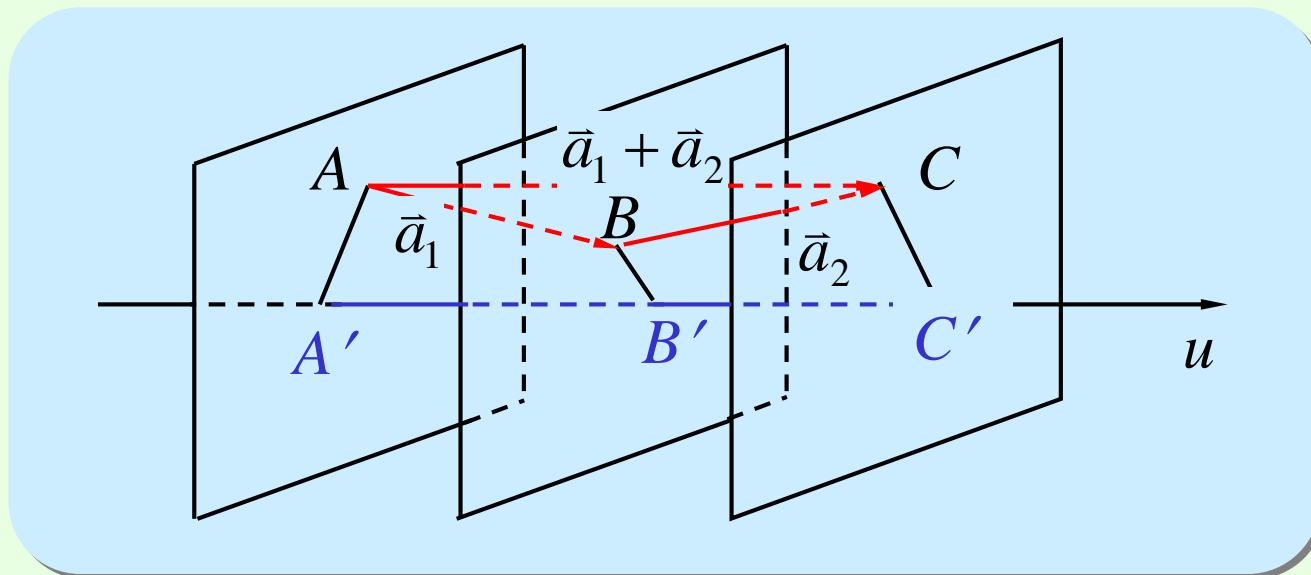
将轴 u 换成向量，则可得到向量间的投影：

$$\text{prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \|\vec{a}\| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle。$$

投影定理 2

$$\text{prj}_u \sum_{k=1}^n \vec{a}_k = \sum_{k=1}^n \text{prj}_u \vec{a}_k \circ$$

有限个向量的和在某轴上的投影等于各向量投影的和。



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/898024050142007021>