

## 2023-2024 学年广西贺州市中学下学期高三联考数学试题

注意事项：

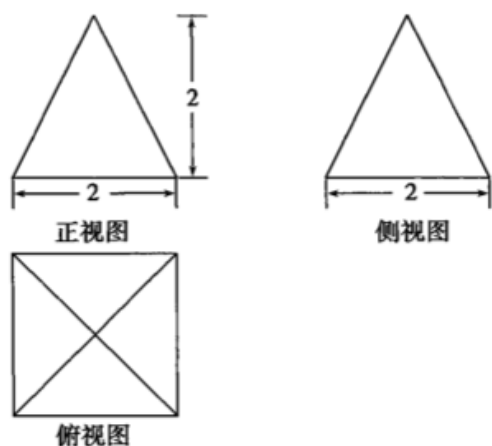
1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $x, y$  满足不等式  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq t \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$ ，且目标函数  $z = 9x + 6y$  最大值的变化范围  $[20, 22]$ ，则  $t$  的取值范围（ ）

- A.  $[2, 4]$       B.  $[4, 6]$       C.  $[5, 8]$       D.  $[6, 7]$

2. 某几何体的三视图如图所示（单位： $cm$ ），则该几何体的表面积是（ ）



- A.  $8cm^2$       B.  $12cm^2$       C.  $(4\sqrt{5} + 2)cm^2$       D.  $(4\sqrt{5} + 4)cm^2$

3. 若  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数(如  $[2.5] = 2$ ， $[4] = 4$ ， $[-2.5] = -3$ )，已知  $a_n = \left\lfloor \frac{2}{7} \times 10^n \right\rfloor$ ， $b_1 = a_1$ ，

$b_n = a_n - 10a_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ ，则  $b_{2019} =$ （ ）

- A. 2      B. 5      C. 7      D. 8

4. 已知  $0 < a < b < 1$ ，则（ ）

- A.  $(1-a)^{\frac{1}{b}} > (1-a)^b$       B.  $(1-a)^b > (1-a)^{\frac{b}{2}}$       C.  $(1+a)^a > (1+b)^b$       D.  $(1-a)^a > (1-b)^b$

5. 已知向量  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $\vec{b}$  是单位向量，若  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ ，则  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ （ ）

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{2\pi}{3}$

6. 记单调递增的等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_2 + a_4 = 10$ ， $a_2 a_3 a_4 = 64$ ，则（ ）

A.  $S_{n+1} - S_n = 2^{n+1}$     B.  $a_n = 2^n$     C.  $S_n = 2^n - 1$     D.  $S_n = 2^{n-1} - 1$

7. 设  $a, b \in \mathbf{R}^+$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a \cdot a_n^2 + b$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则 ( )

A. 对于任意  $a$ , 都存在实数  $M$ , 使得  $a_n < M$  恒成立

B. 对于任意  $b$ , 都存在实数  $M$ , 使得  $a_n < M$  恒成立

C. 对于任意  $b \in (2 - 4a, +\infty)$ , 都存在实数  $M$ , 使得  $a_n < M$  恒成立

D. 对于任意  $b \in (0, 2 - 4a)$ , 都存在实数  $M$ , 使得  $a_n < M$  恒成立

8. 阅读名著, 品味人生, 是中华民族的优良传统. 学生李华计划在高一年级每周星期一至星期五的每天阅读半个小时中国四大名著:《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》及《西游记》, 其中每天阅读一种, 每种至少阅读一次, 则每周不同的阅读计划共有 ( )

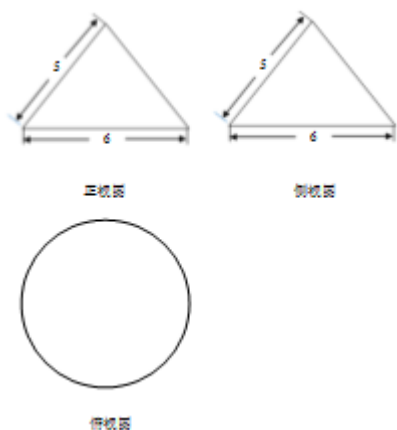
A. 120 种

B. 240 种

C. 480 种

D. 600 种

9. 如图所示, 已知某几何体的三视图及其尺寸 (单位:  $cm$ ), 则该几何体的表面积为 ( )



A.  $15\pi \text{ cm}^2$

B.  $21\pi \text{ cm}^2$

C.  $24\pi \text{ cm}^2$

D.  $33\pi \text{ cm}^2$

10. 若复数  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha (\alpha \in \mathbf{R})$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则  $|z_1 - z_2|$  的最大值为 ( )

A.  $\sqrt{5} - 1$

B.  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

C.  $\sqrt{5} + 1$

D.  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

11. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  是  $C$  的右支上一点, 连接  $PF_1$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 若  $|F_1O| = 2|OM|$  ( $O$  为坐标原点),  $PF_1 \perp PF_2$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )

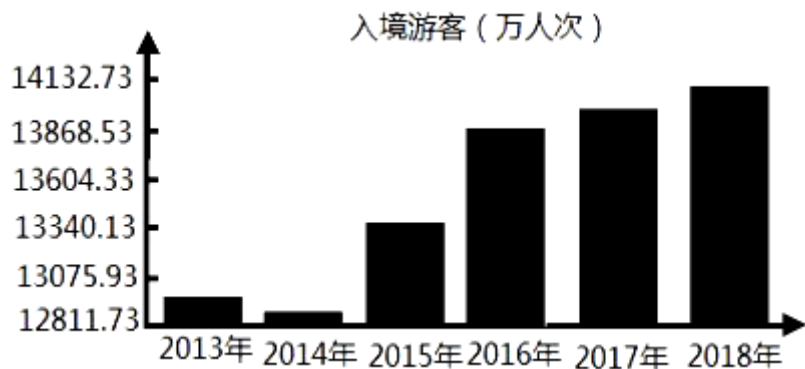
A.  $y = \pm 3x$

B.  $y = \pm \sqrt{3}x$

C.  $y = \pm 2x$

D.  $y = \pm \sqrt{2}x$

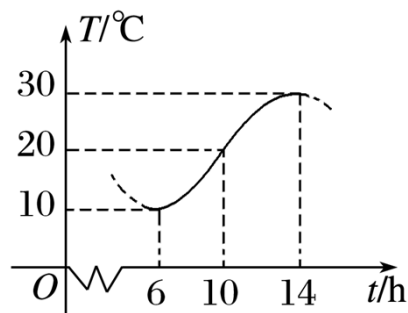
12. 如图是国家统计局公布的年入境游客（单位：万人次）的变化情况，则下列结论错误的是（ ）



- A. 2014 年我国入境游客万人次最少
- B. 后 4 年我国入境游客万人次呈逐渐增加趋势
- C. 这 6 年我国入境游客万人次的中位数大于 13340 万人次
- D. 前 3 年我国入境游客万人次数据的方差小于后 3 年我国入境游客万人次数据的方差

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图，某地一天从 6：14 时的温度变化曲线近似满足函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ，则这段曲线的函数解析式为\_\_\_\_\_。



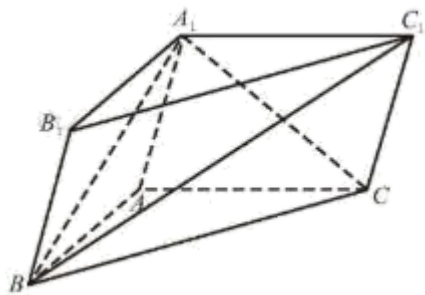
14. 若函数  $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ,  $\omega > 0$ ) 满足  $f(\alpha) = 0$ ,  $f(\beta) = 2$ , 且  $|\alpha - \beta|$  的最小值等于  $\frac{\pi}{2}$ , 则  $\omega$  的值为\_\_\_\_\_。

15.  $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的展开式中,  $x^3$  项的系数是\_\_\_\_\_。

16. 已知一组数据  $-1, 1, 0, -2, x$  的方差为 10, 则  $x =$ \_\_\_\_\_。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $\triangle ABC$  与  $\triangle A_1BC$  均为等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle BA_1C = 90^\circ$ ，侧面  $BAA_1B_1$  是菱形。



(1) 证明: 平面  $ABC \perp$  平面  $A_1BC$ ;

(2) 求二面角  $A-BC_1-C$  的余弦值.

18. (12 分) 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = t \ln x$ , 其中  $x \in (0, 1)$ ,  $t$  为正实数.

(1) 若  $f(x)$  的图象总在函数  $g(x)$  的图象的下方, 求实数  $t$  的取值范围;

(2) 设  $H(x) = (\ln x - x^2 + 1)e^x + (x^2 - 1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ , 证明: 对任意  $x \in (0, 1)$ , 都有  $H(x) > 0$ .

19. (12 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}t \\ y = \sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, a \in \mathbb{R})$$
 .在以坐标原点为

极点、 $x$  轴的非负半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $3\rho^2 \cos 2\theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 3$ .

(1) 若点  $A(2, 0)$  在直线  $l$  上, 求直线  $l$  的极坐标方程;

(2) 已知  $a > 0$ , 若点  $P$  在直线  $l$  上, 点  $Q$  在曲线  $C$  上, 且  $|PQ|$  的最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , 求  $a$  的值.

20. (12 分) 已知函数  $f(x) = x + a\sqrt{x} + \ln x$  ( $a$  为常数)

(I) 当  $a = -5$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 若  $f(x)$  为增函数, 求实数  $a$  的取值范围.

21. (12 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线  $C_1$  的参数方程是  $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$

的极坐标方程是  $\rho = 2 \sin \theta$ .

(1) 写出  $C_1$  的极坐标方程和  $C_2$  的直角坐标方程;

(2) 已知点  $M_1$ 、 $M_2$  的极坐标分别为  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  和  $(2, 0)$ ，直线  $M_1M_2$  与曲线  $C_2$  相交于  $P$ ， $Q$  两点，射线  $OP$  与曲线

$C_1$  相交于点  $A$ ，射线  $OQ$  与曲线  $C_1$  相交于点  $B$ ，求  $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$  的值.

22. (10 分) 已知双曲线  $C: x^2 - y^2 = 1$  及直线  $l: y = kx + 1$ .

(1) 若  $l$  与  $C$  有两个不同的交点，求实数  $k$  的取值范围；

(2) 若  $l$  与  $C$  交于  $A$ ， $B$  两点， $O$  是原点，且  $S_{\triangle OAB} = \sqrt{2}$ ，求实数  $k$  的值.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

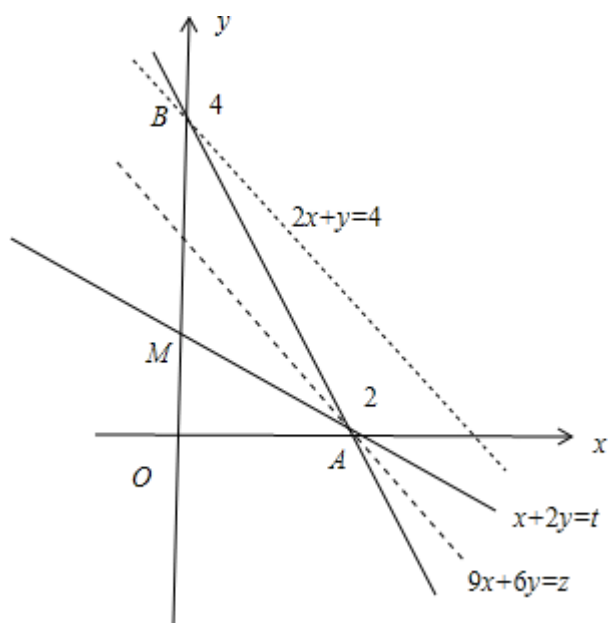
1、B

【解析】

作出可行域，对  $t$  进行分类讨论分析目标函数的最大值，即可求解.

【详解】

画出不等式组  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$  所表示的可行域如图  $\triangle AOB$



当  $t \leq 2$  时, 可行域即为如图中的  $\triangle OAM$ , 此时目标函数  $z=9x+6y$  在  $A(2, 0)$  取得最大值  $Z=18$  不符合题意

$t > 2$  时可知目标函数  $Z=9x+6y$  在  $\begin{cases} x+2y=t \\ 2x+y=4 \end{cases}$  的交点  $(\frac{8-t}{3}, \frac{2t-4}{3})$  处取得最大值, 此时  $Z=t+16$

由题意可得,  $20 \leq t+16 \leq 22$  解可得  $4 \leq t \leq 6$

故选: B.

【点睛】

此题考查线性规划, 根据可行域结合目标函数的最大值的取值范围求参数的取值范围, 涉及分类讨论思想, 关键在于熟练掌握截距型目标函数的最大值最优解的处理办法.

2、D

【解析】

根据三视图判断出几何体为正四棱锥, 由此计算出几何体的表面积.

【详解】

根据三视图可知, 该几何体为正四棱锥. 底面积为  $2 \times 2 = 4$ . 侧面的高为  $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ , 所以侧面积为

$4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ . 所以该几何体的表面积是  $(4\sqrt{5} + 4) \text{ cm}^2$ .

故选: D

【点睛】

本小题主要考查由三视图判断原图, 考查锥体表面积的计算, 属于基础题.

3、B

【解析】

求出  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ , 判断出  $\{b_n\}$  是一个以周期为 6 的周期数列, 求出即可.

【详解】

解:  $a_n = \left\lfloor \frac{2}{7} \times 10^n \right\rfloor$ .  $b_1 = a_1, b_n = a_n - 10a_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ ,

$\therefore a_1 = \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 2 = b_1, a_2 = \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor = 28,$

$b_2 = 28 - 10 \times 2 = 8,$

同理可得:  $a_3 = 285, b_3 = 5; a_4 = 2857, b_4 = 7; a_5 = 28571, b_5 = 1. a_6 = 285714, b_6 = 4; a_7 = 2857142,$

$b_7 = 2, \dots\dots$

$\therefore b_{n+6} = b_n.$

故  $\{b_n\}$  是一个以周期为 6 的周期数列,

则  $b_{2019} = b_{6 \times 336 + 3} = b_3 = 5$ .

故选: **B**.

【点睛】

本题考查周期数列的判断和取整函数的应用.

4、**D**

【解析】

根据指数函数的单调性, 即当底数大于 1 时单调递增, 当底数大于零小于 1 时单调递减, 对选项逐一验证即可得到正确答案.

【详解】

因为  $0 < a < 1$ , 所以  $0 < 1 - a < 1$ , 所以  $y = (1 - a)^x$  是减函数,

又因为  $0 < b < 1$ , 所以  $\frac{1}{b} > b$ ,  $b > \frac{b}{2}$ ,

所以  $(1 - a)^{\frac{1}{b}} < (1 - a)^b$ ,  $(1 - a)^b < (1 - a)^{\frac{b}{2}}$ , 所以 **A, B** 两项均错;

又  $1 < 1 + a < 1 + b$ , 所以  $(1 + a)^a < (1 + b)^a < (1 + b)^b$ , 所以 **C** 错;

对于 **D**,  $(1 - a)^a > (1 - a)^b > (1 - b)^b$ , 所以  $(1 - a)^a > (1 - b)^b$ ,

故选 **D**.

【点睛】

这个题目考查的是应用不等式的性质和指对函数的单调性比较大小, 两个式子比较大小的常用方法有: 做差和 0 比, 作商和 1 比, 或者直接利用不等式的性质得到大小关系, 有时可以代入一些特殊的数据得到具体值, 进而得到大小关系.

5、**C**

【解析】

设  $\vec{b} = (x, y)$ , 根据题意求出  $x, y$  的值, 代入向量夹角公式, 即可得答案;

【详解】

设  $\vec{b} = (x, y)$ ,  $\therefore \vec{a} - \vec{b} = (1 - x, \sqrt{3} - y)$ ,

Q  $\vec{b}$  是单位向量,  $\therefore x^2 + y^2 = 1$ ,

Q  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ ,  $\therefore (1 - x)^2 + (\sqrt{3} - y)^2 = 3$ ,

联立方程解得:  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$

当  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$  时,  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$ ;  $\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$

当  $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$  时,  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$ ;  $\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$

综上所述:  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ .

故选: C.

【点睛】

本题考查向量的模、夹角计算, 考查函数与方程思想、转化与化归思想, 考查逻辑推理能力、运算求解能力, 求解时注意  $\vec{b}$  的两种情况.

6、C

【解析】

先利用等比数列的性质得到  $a_3$  的值, 再根据  $a_2, a_4$  的方程组可得  $a_2, a_4$  的值, 从而得到数列的公比, 进而得到数列的通项和前  $n$  项和, 根据后两个公式可得正确的选项.

【详解】

因为  $\{a_n\}$  为等比数列, 所以  $a_3^2 = a_2 a_4$ , 故  $a_3^3 = 64$  即  $a_3 = 4$ ,

由  $\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_2 a_4 = 16 \end{cases}$  可得  $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a_2 = 8 \\ a_4 = 2 \end{cases}$ , 因为  $\{a_n\}$  为递增数列, 故  $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$  符合.

此时  $q^2 = 4$ , 所以  $q = 2$  或  $q = -2$  (舍, 因为  $\{a_n\}$  为递增数列).

故  $a_n = a_3 q^{n-3} = 4 \times 2^{n-3} = 2^{n-1}$ ,  $S_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$ .

故选 C.

【点睛】

一般地, 如果  $\{a_n\}$  为等比数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 则有性质:

(1) 若  $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*, m+n = p+q$ , 则  $a_m a_n = a_p a_q$ ;

(2) 公比  $q \neq 1$  时, 则有  $S_n = A + Bq^n$ , 其中  $A, B$  为常数且  $A + B = 0$ ;

(3)  $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$  为等比数列 ( $S_n \neq 0$ ) 且公比为  $q^n$ .

7、D

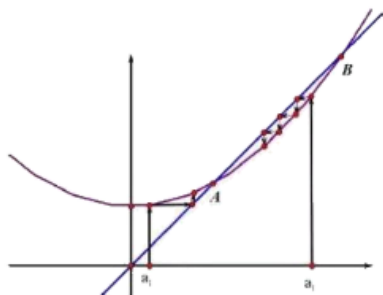
【解析】

取  $a = b = 1$ , 可排除 AB; 由蛛网图可得数列  $\{a_n\}$  的单调情况, 进而得到要使  $a_n < M$ , 只需  $2 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$ , 由此可得到答案.

【详解】

取  $a = b = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ , 数列  $\{a_n\}$  恒单调递增, 且不存在最大值, 故排除 AB 选项;

由蛛网图可知,  $ax^2 + b = x$  存在两个不动点, 且  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$ ,



因为当  $0 < a_1 < x_1$  时, 数列  $\{a_n\}$  单调递增, 则  $a_n < x_1$ ;

当  $x_1 < a_1 < x_2$  时, 数列  $\{a_n\}$  单调递减, 则  $x_1 < a_n \leq a_1$ ;

所以要使  $a_n < M$ , 只需要  $0 < a_1 < x_2$ , 故  $2 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$ , 化简得  $b < 2 - 4a$  且  $b > 0$ .

故选: D.

【点睛】

本题考查递推数列的综合运用, 考查逻辑推理能力, 属于难题.

8、B

【解析】

首先将五天进行分组, 再对名著进行分配, 根据分步乘法计数原理求得结果.

【详解】

将周一至周五分为 4 组, 每组至少 1 天, 共有:  $\frac{C_5^2 C_3^1 C_2^1}{A_3^3} = 10$  种分组方法;

将四大名著安排到4组中，每组1种名著，共有： $A_4^4 = 24$ 种分配方法；

由分步乘法计数原理可得不同的阅读计划共有： $10 \times 24 = 240$ 种

本题正确选项： $B$

【点睛】

本题考查排列组合中的分组分配问题，涉及到分步乘法计数原理的应用，易错点是忽略分组中涉及到的平均分组问题.

9、C

【解析】

由三视图知，该几何体是一个圆锥，其母线长是 $5\text{ cm}$ ，底面直径是 $6\text{ cm}$ ，据此可计算出答案.

【详解】

由三视图知，该几何体是一个圆锥，其母线长是 $5\text{ cm}$ ，底面直径是 $6\text{ cm}$ ，

$\therefore$  该几何体的表面积  $S = \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 5 = 24\pi$ .

故选：C

【点睛】

本题主要考查了三视图的知识，几何体的表面积的计算.由三视图正确恢复几何体是解题的关键.

10、C

【解析】

由复数的几何意义可得 $|z_1 - z_2|$ 表示复数 $z_1 = 2 + i$ ， $z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ 对应的两点间的距离，由两点间距离公式即可求解.

【详解】

由复数的几何意义可得，复数 $z_1 = 2 + i$ 对应的点为 $(2, 1)$ ，复数 $z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ 对应的点为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ，所以

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(2 - \cos\alpha)^2 + (1 - \sin\alpha)^2} = \sqrt{1 - 2\sin\alpha + 4 - 4\cos\alpha + 1} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}\sin(\alpha + \varphi)} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$ ，其中 $\tan\varphi = 2$ ，

故选 C

【点睛】

本题主要考查复数的几何意义，由复数的几何意义，将 $|z_1 - z_2|$ 转化为两复数所对应点的距离求值即可，属于基础题型.

11、C

【解析】

利用三角形 $\triangle OMF_1$ 与 $\triangle PF_2F$ 相似得 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，结合双曲线的定义求得 $a, b, c$ 的关系，从而求得双曲线的渐近线方程。

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/898055067030006134>