专题01 第三章 圆锥曲线的方程　典型例题讲解（一）

目录

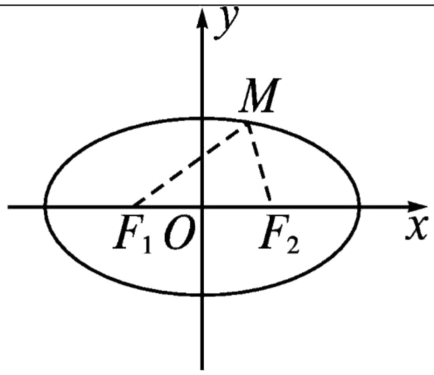
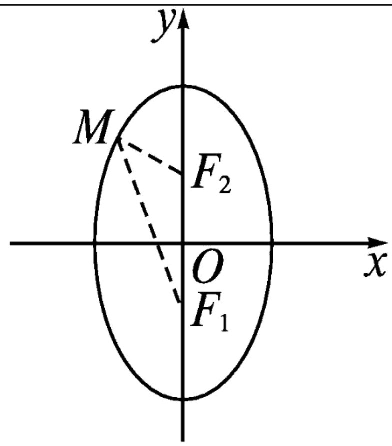
一、基本概念回归

知识回顾1：椭圆的定义

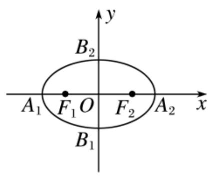
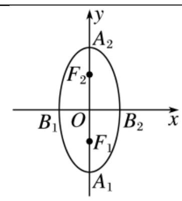
平面内一个动点P到两个定点F_1、F_2的距离之和等于常数$(|PF_1|+|PF_2|=2a>|F_1F_2|)$，这个动点$P$的轨迹叫椭圆. 这两个定点（$F_1,F_2$）叫椭圆的焦点，两焦点的距离（$|F_1F_2|$）叫作椭圆的焦距.

知识回顾2：椭圆的标准方程

焦点位置	焦点在x轴上	焦点在y轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）

图象		
焦点坐标	$F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$， $F_2(0,c)$
a,b,c **的关系**	$a^2=b^2+c^2$	

知识回顾 3：椭圆的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）	$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）
范围	$-a\le x\le a$， $-b\le y\le b$	$-b\le x\le b$， $-a\le y\le a$
顶点	$A_1(-a,0)$， $A_2(a,0)$， $B_1(0,-b)$， $B_2(0,b)$	$A_1(0,-a)$ $A_2(0,a)$ $B_1(-b,0)$ $B_2(b,0)$
轴长	短轴长＝$2b$，长轴长＝$2a$	
焦点	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c$	
对称性	对称轴：x 轴、y 轴　对称中心：原点	
离心率	$e=\dfrac{c}{a}$， $e\in(0,1)$	

知识回顾 4：双曲线的定义

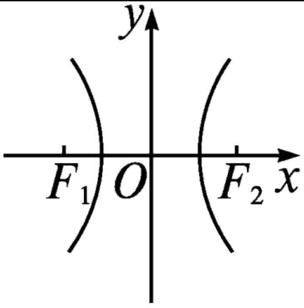
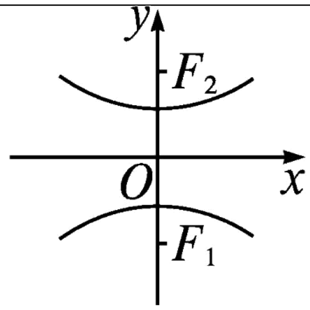
4.1、定义:一般地,我们把平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线.

这两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

4.2、集合语言表达式

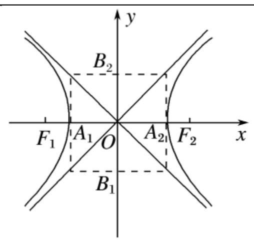
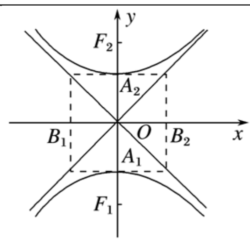
双曲线就是下列点的集合: $P=\{M \mid ||MF_1|-|MF_2||=2a, 0<2a<|F_1F_2|\}$.

4.3 双曲线的标准方程

<table>
<tr><th>焦点位置</th><th>焦点在 x 轴上</th><th>焦点在 y 轴上</th></tr>
<tr><td>标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>焦点坐标</td><td>$F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$</td><td>$F_1(0,-c)$， $F_2(0,c)$</td></tr>
<tr><td>a,b,c 的关系</td><td colspan="2">$c^2=a^2+b^2$</td></tr>
</table>

两种双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$， $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ （$a>0,b>0$）的相同点是:它们的形状、大小都相同,都有 $a>0,b>0$,$c^2=a^2+b^2$;不同点是:两种双曲线的位置不同,它们的焦点坐标也不同.

知识回顾 5：双曲线的简单几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
（$a>0,b>0$）</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
（$a>0,b>0$）</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>范围</td><td>$x \geq a$ 或 $x \leq -a$</td><td>$y \leq -a$ 或 $y \geq a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">对称轴：坐标轴；对称中心：原点</td></tr>
<tr><td>顶点坐标</td><td>$A_1(-a,0)$， $A_2(a,0)$</td><td>$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$</td></tr>
<tr><td>渐近线</td><td>$y=\pm\frac{b}{a}x$</td><td>$y=\pm\frac{a}{b}x$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\frac{c}{a}$， $e\in(1,+\infty)$,</td></tr>
</table>

a，b，c 间的关系	$c^2=a^2+b^2$

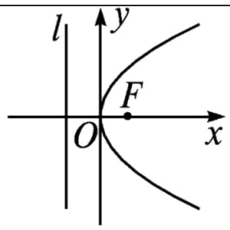
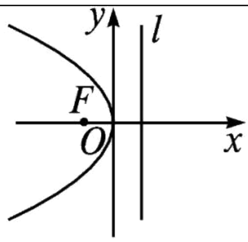
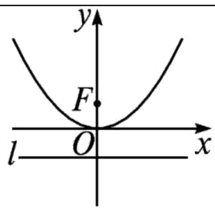
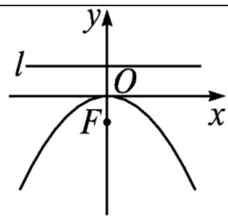
知识回顾 6：抛物线的定义

1、抛物线的定义：平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（其中定点 F 不在定直线 l 上）的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

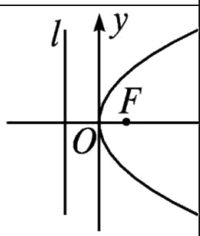
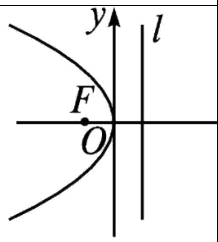
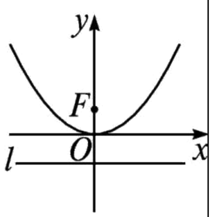
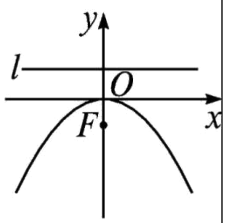
2、抛物线的数学表达式：$\{M \mid |MF|=d\}$（d 为点 M 到准线 l 的距离).

知识回顾 7：抛物线的标准方程

设 $p>0$，抛物线的标准方程、类型及其几何性质：

方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
图形				
焦点	$F(\frac{p}{2},0)$	$F(-\frac{p}{2},0)$	$F(0,\frac{p}{2})$	$F(0,-\frac{p}{2})$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

知识回顾 8：抛物线的简单几何性质

标准方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
图形				
范围	$x\geq 0$，$y\in R$	$x\leq 0$，$y\in R$	$y\geq 0$，$x\in R$	$y\leq 0$，$x\in R$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
焦点坐标	$F(\frac{p}{2},0)$	$F(-\frac{p}{2},0)$	$F(0,\frac{p}{2})$	$F(0,-\frac{p}{2})$

准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
顶点坐标	$O(0,0)$			
离心率	$e=1$			
通径长	$2p$			

二、重点例题（高频考点）

高频考点一：圆锥曲线的定义

1．（2023·全国·高二专题练习）已知圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=25$，圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$，动圆 M 与圆 C_2 外切，同时与圆 C_1 内切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为（　）

A．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

C．$\frac{x^2}{9}+y^2=1$　　　　D．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

【答案】D

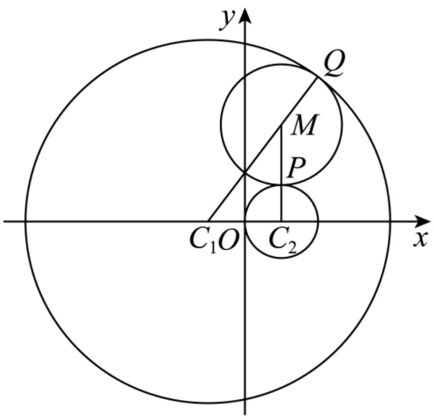
【详解】如图，由题意得：$|C_1M|=5-|MQ|$，$|C_2M|=1+|MP|$，其中 $|MQ|=|MP|$，

所以 $|C_1M|+|C_2M|=5-|MQ|+1+|MP|=6>2=|C_1C_2|$，

由椭圆定义可知：动圆圆心 M 的轨迹为以 C_1,C_2 为焦点的椭圆，设 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

则 $2a=6,c=1$，解得：$a=3,b^2=a^2-c^2=9-1=8$，

故动圆圆心 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.



故选：D

2．（2023 秋·高二课时练习）已知点 $F_1(-4,0),F_2(4,0)$，曲线上的动点 P 到 F_1,F_2 的距离之差为 6

，则曲线方程为（　）

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1\left(x>0\right)$　　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

C. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1\left(y>0\right)$　　D. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

【答案】A

【详解】由题意可得$\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=6<\left|F_1F_2\right|=8$,

由双曲线定义可知，所求曲线方程为双曲线一支，且$2a=6,2c=8$,即$a=3,c=4$，

所以$b^2=c^2-a^2=16-9=7$.

又因为焦点在x轴上，所以曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1\left(x>0\right)$.

故选:A.

3．（2023·江西·校联考三模）设圆$O:x^2+y^2=4$与y轴交于A，B两点（A在B的上方），过B作圆O的切线l，若动点P到A的距离等于P到l的距离，则动点P的轨迹方程为（　）

A. $x^2=8y$　　B. $x^2=16y$　　C. $y^2=8x$　　D. $y^2=16x$

【答案】A

【详解】因为圆$O:x^2+y^2=4$与y轴交于A，B两点（A在B的上方），

所以$A(0,2)$，$B(0,-2)$，

又因为过B作圆O的切线l，

所以切线l的方程为$y=-2$，

因为动点P到A的距离等于P到l的距离，

所以动点P的轨迹为抛物线，且其焦点为$(0,2)$，准线为$y=-2$，

所以P的轨迹方程为$x^2=8y$.

故选：A.

4．（2023秋·高二课时练习）分别写出满足下列条件的动点P的轨迹方程：

(1)点P到点$F_1\left(-3,0\right)$、$F_2\left(3,0\right)$的距离之和为10；

(2)点P到点$F_1\left(0,-2\right)$、$F_2\left(0,2\right)$的距离之和为12；

(3)点P到点$F_1\left(-4,0\right)$、$F_2\left(4,0\right)$的距离之和为8.

【答案】(1)$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(2)$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$

(3)$y=0(-4\leq x\leq 4)$

【详解】（1）因为$|PF_1|+|PF_2|=10>|F_1F_2|=6$，

所以动点 P 的轨迹是焦点在 x 轴上的椭圆，

这里 $2a=10$， $2c=6$，即 $a=5$， $c=3$，

所以 $b^2=a^2-c^2=25-9=16$，

所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

（2）因为 $|PF_1|+|PF_2|=12>|F_1F_2|=4$，

所以动点 P 的轨迹是焦点在 y 轴上的椭圆，

这里 $2a=12$， $2c=4$，即 $a=6$， $c=2$，

所以 $b^2=a^2-c^2=36-4=32$，

所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$.

（3）因为 $|PF_1|+|PF_2|=8=|F_1F_2|=8$，

所以动点 P 的轨迹是线段 F_1F_2，其方程为 $y=0(-4\le x\le 4)$.

5. （2023 秋·高二课时练习）已知 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$ 两点，根据下列条件，写出动点 M 的轨迹方程.

(1) $|MF_1|-|MF_2|=10$；

(2) $|MF_1|-|MF_2|=8$；

(3) $||MF_1|-|MF_2||=6$.

【答案】(1) $y=0$ （$x\geqslant 5$）

(2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ （$x\ge 4$）

(3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

【详解】（1）因为 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$，则 $|F_1F_2|=10$，

又 $|MF_1|-|MF_2|=10=|F_1F_2|$，

所以点 M 的轨迹是 x 轴上以 F_2 为端点向右的一条射线，则轨迹方程为 $y=0$ （$x\geqslant 5$）.

（2）因为 $|MF_1|-|MF_2|=8<|F_1F_2|$，

所以点 M 的轨迹是以 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$ 为焦点的双曲线的右支，且 $a=4$、$c=5$，

所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=3$，

所以轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ （$x\ge 4$）.

（3）因为 $||MF_1|-|MF_2||=6<|F_1F_2|$，

所以点 M 的轨迹是以 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$ 为焦点的双曲线，且 $a=3$、$c=5$，

所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=4$，

所以轨迹方程为$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

6．（2023秋·高二课时练习）若动圆M与圆$C:(x-2)^2+y^2=1$外切，又与直线$x+1=0$相切，求动圆圆心的轨迹方程.

【答案】$y^2=8x$

【详解】设动圆圆心为$M(x,y)$，半径为R，

由已知可得圆C的圆心为$C(2,0)$，半径$r=1$.

因为两圆外切，所以$|MC|=R+1$.

又动圆M与已知直线$x+1=0$相切，

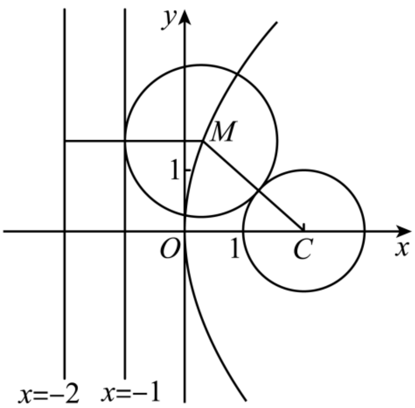
所以圆心M到直线$x+1=0$的距离$d=R$，

所以$|MC|=d+1$，

即动点M到定点$C(2,0)$的距离等于它到定直线$x+2=0$的距离.

由抛物线的定义可知，点M的轨迹是以C为焦点，$x=-2$为准线的抛物线，

且$\dfrac{p}{2}=2, p=4$，故动圆圆心M的轨迹方程为$y^2=8x$.



高频考点二：圆锥曲线的的条件

1．（多选）（2023·全国·高二专题练习）已知方程$\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$表示的曲线为$C$，则下列四个结论中正确的是（　）

A．当$1<t<4$时，曲线C是椭圆

B．当$t>4$或$t<1$时，曲线C是双曲线

C．若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则$1<t<\dfrac{5}{2}$

D．若曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$t>4$

【答案】BCD

【详解】对于A，当$t=\dfrac{5}{2}$时，$4-t=\dfrac{3}{2}=t-1$，则曲线C是圆，A错误；

对于 B，当$t>4$或$t<1$时，$(4-t)(t-1)<0$，曲线C是双曲线，B 正确；

对于 C，若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则$4-t>t-1>0$，解得$1<t<\frac{5}{2}$，C 正确；

对于 D，若曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$4-t<0<t-1$，解得$t>4$，D 正确.

故选：BCD

2. （多选）（2023·广东韶关·统考模拟预测）曲线 C 的方程为$x^2-\frac{y^2}{\lambda}-4=0$，则（　）

A. 当$\lambda>0$时，曲线 C 是焦距为$4\sqrt{1+\lambda}$的双曲线

B. 当$\lambda<-1$时，曲线 C 是焦距为$4\sqrt{1-\lambda}$的双曲线

C. 曲线 C 不可能为圆

D. 当$-1<\lambda<0$时，曲线 C 是焦距为$4\sqrt{1+\lambda}$的椭圆

【答案】AD

【详解】对于 A，当$\lambda>0$时，方程$x^2-\frac{y^2}{\lambda}-4=0$化为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4\lambda}=1$，曲线$C$是焦距为$2\sqrt{4+4\lambda}=4\sqrt{1+\lambda}$的双曲线，A 正确；

对于 B，当$\lambda<-1$时，方程$x^2-\frac{y^2}{\lambda}-4=0$化为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4(-\lambda)}=1$，

曲线C是焦点在y轴上，焦距为$2\sqrt{4(-\lambda)-4}=4\sqrt{-1-\lambda}$的椭圆，B 错误；

对于 C，当$\lambda=-1$时，曲线C表示圆$x^2+y^2=4$，C 错误；

对于 D，当$-1<\lambda<0$时，方程$x^2-\frac{y^2}{\lambda}-4=0$化为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4(-\lambda)}=1$，

曲线C是焦点在x轴上，焦距为$2\sqrt{4-4(-\lambda)}=4\sqrt{1+\lambda}$的椭圆，D 正确.

故选：AD

3. （多选）（2023 秋·浙江宁波·高二统考期末）关于 x，y 的方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1(m\in\mathrm{R})$表示的曲线可以是（　）

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

【答案】BC

【详解】显然$m\neq 0$且$m\neq 1$，

若$\begin{cases}m>0\\m-1>0\end{cases}$，即$m>1$时，此时$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示椭圆；

若$m(m-1)<0$，即$0<m<1$时，此时$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1$表示双曲线；

若$m<0$，此时$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1$无解，

综上：方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1(m\in \mathrm{R})$表示的曲线可以是椭圆，也可以是双曲线.

故选：BC

4．（多选）（2023·全国·高一专题练习）若方程$\frac{x^2}{\lambda-4}+\frac{y^2}{8-\lambda}=1$表示的曲线为$E$，则下列说法正确的是（　）

A．曲线E可能为抛物线　　B．当$\lambda=6$时，曲线E为圆

C．当$\lambda<4$或$\lambda>8$时，曲线E为双曲线　　D．当$4<\lambda<8$时，曲线E为椭圆

【答案】BC

【详解】曲线E的方程为：$\frac{x^2}{\lambda-4}+\frac{y^2}{8-\lambda}=1$，显然$\lambda\neq4$且$\lambda\neq8$，

对于A，因为不论λ取符合条件的任何实数，曲线E的方程都不符合抛物线方程的特征，因此曲线E不可能为抛物线，A错误；

对于B，当$\lambda=6$时，曲线E的方程为：$x^2+y^2=2$，曲线E为圆，B正确；

对于C，当$\lambda<4$时，曲线E的方程为：$\frac{y^2}{8-\lambda}-\frac{x^2}{4-\lambda}=1$，曲线$E$为焦点在$y$轴上的双曲线，

当$\lambda>8$时，曲线E的方程为：$\frac{x^2}{\lambda-4}-\frac{y^2}{\lambda-8}=1$，曲线$E$为焦点在$x$轴上的双曲线，

因此当$\lambda<4$或$\lambda>8$时，曲线E为双曲线，C正确；

对于D，因为当$\lambda=6$时，曲线E为圆，因此当$4<\lambda<8$时，曲线E不一定为椭圆，D错误.

故选：BC

5．（多选）（2023春·江西宜春·高二江西省丰城中学校考开学考试）下列关于二次曲线$\frac{x^2}{3-k}-\frac{y^2}{k}=1$与$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$的说法正确的是（　）

A．当$0<k<3$时，它们分别是双曲线与椭圆

B．当$k<0$时，它们都是椭圆

C．当$0<k<3$时，它们的焦点不同，但焦距相等.

D．当$k<0$时，它们的焦点相同

【答案】ABC

【详解】对于A，当$0<k<3$时，$\frac{x^2}{3-k}-\frac{y^2}{k}=1$是双曲线，$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$是椭圆，故A正确，

对于B，当$k<0$时，$\frac{x^2}{3-k}-\frac{y^2}{k}=1$是椭圆，故B正确，

对于C，当$0<k<3$时，$\frac{x^2}{3-k}-\frac{y^2}{k}=1$焦点在$x$轴上，$c=\sqrt{3}$，

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$焦点在$y$轴上，$c=\sqrt{3}$，两曲线的焦距相等，故 C 正确，

对于 D，当$k<0$时$\frac{x^2}{3-k}-\frac{y^2}{k}=1$焦点在$x$轴上，$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$焦点在$y$轴上，故 D 错误，

故选：ABC

高频考点三：圆锥曲线的标准方程

1．（2023·江苏·高二假期作业）下列选项中的曲线与$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$共焦点的双曲线是（　　）

A．$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=2$　　B．$\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$

C．$\frac{y^2}{26}-\frac{x^2}{10}=1$　　D．$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{26}=1$

【答案】D

【详解】双曲线$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$的焦点在$x$轴上，半焦距$c=\sqrt{12+24}=6$，

对于 A，方程$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=2$，即$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{24}=1$，是焦点在$x$轴上的双曲线，而半焦距为$\sqrt{48+24}=6\sqrt{2}$，A 不是

对于 B，C，方程$\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$、$\frac{y^2}{26}-\frac{x^2}{10}=1$都是焦点在$y$轴上的双曲线，BC 不是；

对于 D，方程$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{26}=1$是焦点在$x$轴上的双曲线，半焦距为$\sqrt{10+26}=6$，D 是.

故选：D

2．（2023 春·江苏淮安·高二洪泽湖高级中学校考开学考试）以双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的焦点为顶点，顶点为焦点的椭圆方程是（　）

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$　　C．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

【答案】D

【详解】由题，双曲线的焦点坐标为：$(-4,0),(4,0)$.顶点坐标为：$(-2,0),(2,0)$.

设椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$c^2=a^2-b^2$.由题有：$a=4$，$c=2$.

故椭圆方程为：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

故选：D

3．（2023·新疆·统考三模）已知抛物线$y^2=2px(p>0)$上任意一点到焦点F的距离比到y轴的距离大 1，则抛物线的标准方程为（　）

A． $y^2=x$　　B． $y^2=2x$　　C． $y^2=4x$　　D． $y^2=8x$

【答案】C

【详解】由题意抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上任意一点到焦点 F 的距离与它到直线 $x=-1$ 的距离相，因此 $-\frac{p}{2}=-1$，

$p=2$，抛物线方程为 $y^2=4x$．

故选：C．

4．（2023·全国·高二课堂例题）分别求满足下列条件的椭圆的标准方程：

(1)两个焦点分别是 $F_1(-3,0),F_2(3,0)$，椭圆上的点 P 与两焦点的距离之和等于 8；

(2)两个焦点分别是 $F_1(0,-4),F_2(0,4)$，并且椭圆经过点 $(\sqrt{3},-\sqrt{5})$．

【答案】(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

(2) $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1$

【详解】（1）由已知得 $2a=8$，因此 $a=4$．

又因为 $c=3$，所以 $b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=7$，

易知椭圆的焦点在 x 轴上，

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$．

（2）因为椭圆的焦点在 y 轴上，设它的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$．

由已知得 $c=4$，又因为 $c^2=a^2-b^2$，所以 $a^2=b^2+16$．

因为点 $(\sqrt{3},-\sqrt{5})$ 在椭圆上，所以 $\frac{(-\sqrt{5})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$，即 $\frac{5}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$．

从而有 $\frac{5}{b^2+16}+\frac{3}{b^2}=1$，

解得 $b^2=4$ 或 $b^2=-12$（舍去）．

因此 $a^2=4+16=20$，

从而所求椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1$．

5．（2023 秋·高二课时练习）求焦点在 x 轴上，焦距为 $2\sqrt{6}$，且过点 $\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 的椭圆的标准方程．

【答案】 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$

【详解】由椭圆焦点在 x 轴上，所以可设其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，

因为椭圆的焦距为 $2\sqrt{6}$，可得 $2c=2\sqrt{6}$，所以 $c=\sqrt{6}$，所以 $a^2=b^2+6$，

又因为椭圆过点$\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$，所以$\frac{3}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，

联立方程组，可得$a^2=9,b^2=3$，所以所求的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

6．（2023·全国·高二课堂例题）分别根据下列条件，求抛物线的焦点坐标和标准方程：

(1)抛物线的焦点到x轴的距离是2，而且焦点在y轴的正半轴上．

(2)抛物线的焦点是双曲线$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$的焦点之一．

【答案】(1)$(0,2)$，$x^2=8y$

(2)答案见解析

【详解】（1）由已知可得焦点坐标为$(0,2)$，因此抛物线的标准方程具有$x^2=2py$的形式，且$p=4$，

从而所求抛物线的标准方程是$x^2=8y$.

（2）因为双曲线$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$中，$c=\sqrt{9+16}=5$，

又因为双曲线的焦点在y轴上，所以的焦点坐标为$(0,-5)$或$(0,5)$.

如果抛物线的焦点坐标为$(0,-5)$，则抛物线的标准方程具有$x^2=-2py$的形式，且$p=10$，

此时抛物线的标准方程是$x^2=-20y$；

如果抛物线的焦点坐标为$(0,5)$，则抛物线的标准方程具有$x^2=2py$的形式，且$p=10$,

此时抛物线的标准方程是$x^2=20y$.

高频考点四：焦点三角形问题

1．（2023秋·浙江·高三校联考阶段练习）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在$C$上，且$PF_1\perp F_1F_2$，直线$PF_2$与$C$交于另一点$Q$，与$y$轴交于点$M$，若$\overrightarrow{MF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$，则$C$的离心率为（　）

A．$\frac{3\sqrt{3}}{7}$　　B．$\frac{4}{7}$　　C．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{21}}{7}$

【答案】D

【详解】如图，因为$OM//PF_1$，所以点M是PF_2的中点，

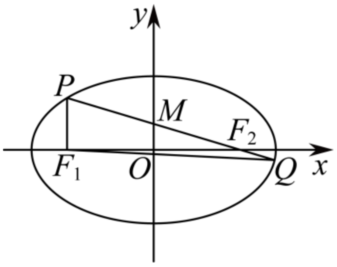
连接F_1Q，由$\overrightarrow{MF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$，得$|PF_2|=4|F_2Q|$，

设$|F_2Q|=t$，则$|PF_2|=4t$，$|PF_1|=2a-4t$，$|QF_1|=2a-t$.

由余弦定理得$|QF_1|^2=|PF_1|^2+|PQ|^2-2|PF_1||PQ|\cos\angle F_1PQ$，

即$(2a-t)^2=(2a-4t)^2+(5t)^2-2(2a-4t)\times5t\times\frac{2a-4t}{4t}$，整理得$t=\frac{5}{14}a$，

则$|F_1F_2|=\sqrt{(4t)^2-(2a-4t)^2}=\sqrt{16at-4a^2}=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$，故$e=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{2a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.



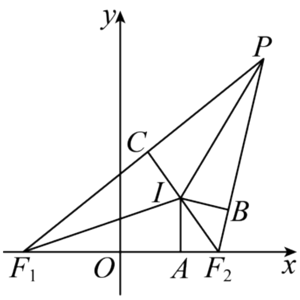
故选：D

2．（2023·四川成都·模拟预测）已知F_1、F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，且$|F_1F_2|=\frac{2b^2}{a}$，点$P$为双曲线右支上一点，$I$为$\triangle PF_1F_2$内心，若$S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+\lambda S_{\triangle IF_1F_2}$，则$\lambda$的值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【详解】如图所示：



由题意I为$\triangle PF_1F_2$内心，

设$IA\perp F_1F_2$，$IB\perp PF_2$，$IC\perp F_1P$，$\triangle PF_1F_2$内切圆半径为r，

所以$IA=IB=IC=r$，又因为$S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+\lambda S_{\triangle IF_1F_2}$，

即$\frac{1}{2}r\cdot PF_1=\frac{1}{2}r\cdot PF_2+\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}r\right)\cdot F_1F_2$，

化简得$PF_1=PF_2+\lambda F_1F_2$，

由双曲线定义可知$PF_1-PF_2=2a=\lambda\cdot(2c)=\lambda F_1F_2$，因此有$\lambda=\frac{a}{c}$；

注意到$|F_1F_2|=\frac{2b^2}{a}$，且$|F_1F_2|=2c$以及$c^2=a^2+b^2$，

联立并化简得$c^2-a^2=b^2=ac$，即$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{a}{c}-1=0$，

解得$\lambda=\frac{a}{c}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$或$\lambda=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$（舍去，因为$\lambda=\frac{a}{c}>0$）

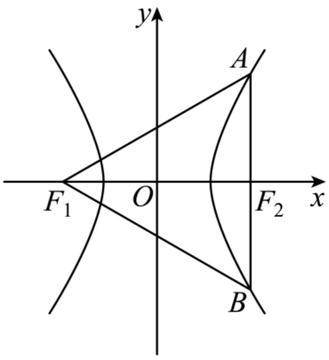
故选：C

3．（2023 春·新疆巴音郭楞·高二校考开学考试）设F_1、F_2分别是双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{b}=1$的左、右焦点，过F_2作x轴的垂线与C相交于A、B两点，若$\triangle ABF_1$为正三角形，则C的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

【答案】D

【详解】设$|AF_2|=t$，因为$AB\perp x$轴，则点A、B关于x轴对称，则F_2为线段AB的中点，



因为$\triangle ABF_1$为等边三角形，则$\angle AF_1F_2=30^\circ$，所以，$|AF_1|=2|AF_2|=2t$，

所以，$|AF_1|-|AF_2|=|AF_2|=t=2a=2$，则$|AF_1|=2|AF_2|=2t=4$，

所以，$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2-|AF_2|^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，则$c=\sqrt{3}$，

因此，该双曲线C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

故选：D.

4．（2023 秋·河北保定·高三校联考开学考试）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线$l$与$C$交于$P$，$Q$两点，若$|F_2Q|:|PQ|:|F_1Q|=1:4:5$，则（　）

A．$PF_1\perp PF_2$　　B．$\triangle QF_1F_2$的面积等于$\frac{a^2}{6}$

C．直线l的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．C的离心率等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】ABD

【详解】由$|F_2Q|:|PQ|:|F_1Q|=1:4:5$可知，

不妨设$|F_2Q|=m,|PQ|=4m,|F_1Q|=5m$，又$|PQ|=|QF_2|+|PF_2|=4m$，可得$|PF_2|=3m$；

利用椭圆定义可知$|QF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|=6m$，所以可得$|PF_1|=3m$；

即$|PF_1|=|PF_2|=3m$，所以点P即为椭圆的上顶点或下顶点，如下图所示：