第1讲勾股定理与逆定理综合

1.**勾股定理：**直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

2.**勾股定理的逆定理**：如果三角形的三边长a、b、c满足$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

3.**命题与原命题**：勾股定理的逆定理的题设和结论恰好与勾股定理的题设和结论相反，我们把像这样的两个命题叫做互逆命题，如果把其中一个叫做原命题，那么另一个叫做它的逆命题.

4.**逆定理**：一般地，如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，它也是一个定理，称这两个定理互为逆定理。

5.**勾股数**：3、4、5这样，能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数.

练一练

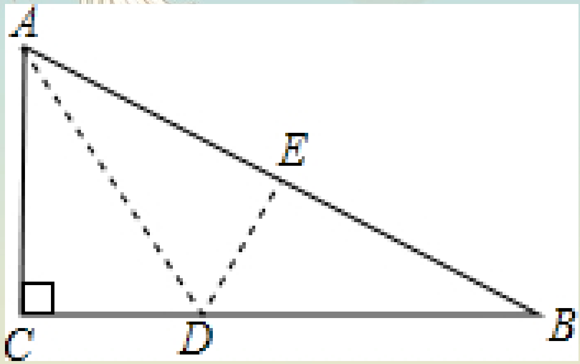
1．等边三角形的高为2，则它的面积是$\underline{\quad \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad}$．

练一练

2．直角三角形两直角边分别为6cm和 8 cm，则斜边上的中线长为__5cm__.

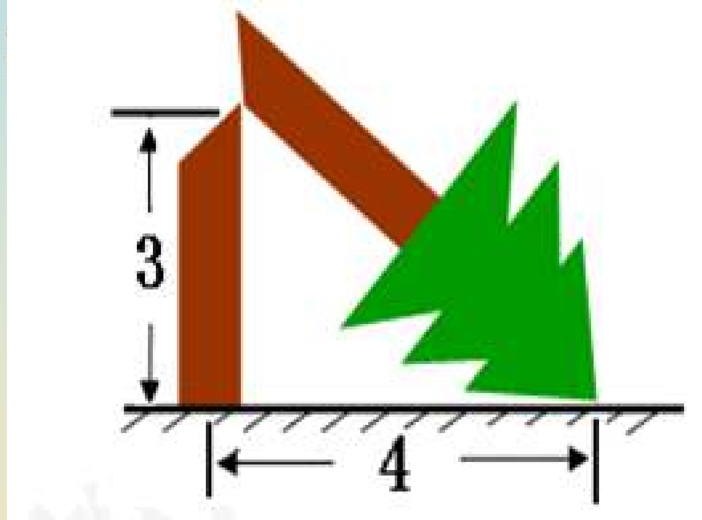
练一练

3．如图，有一块直角三角形纸片，两直角边AC=6cm，BC=8cm.现将直角边AC沿直线AD折叠，使它落在斜边AB上，且与AE重合，则CD等于__3cm__.



练一练

4.如下图，今年的冰雪灾害中，一棵大树在离地面3米处折断，树的顶端落在离树杆底部4米处，那么这棵树折断之前的高度是（　8　）米.



练一练

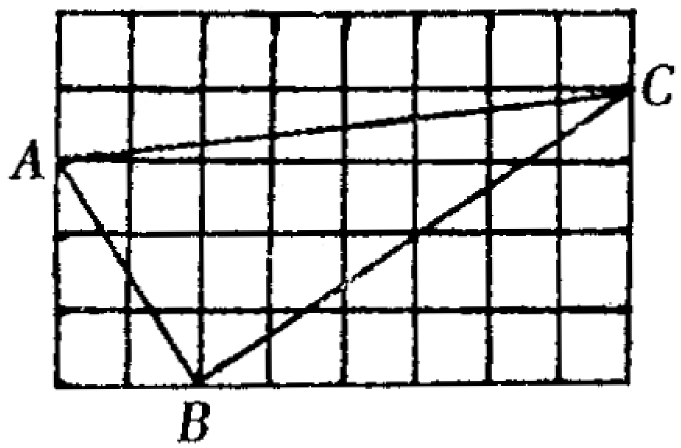
5．分别以下列四组数为一个三角形的边长：(1)6、8，10，(2)5、12、13，(3)8、15、17，(4)4、5、6，其中能构成直角三角形的有<u>（1）（2）（3）</u>(填序号)．

练一练

6．若△ABC中，$(b-a)(b+a)=c^2$，则∠B＝___90°___.

练一练

7．如图，正方形网格中，每个小正方形的边长为1，则网格上的△ABC是__直角__三角形.



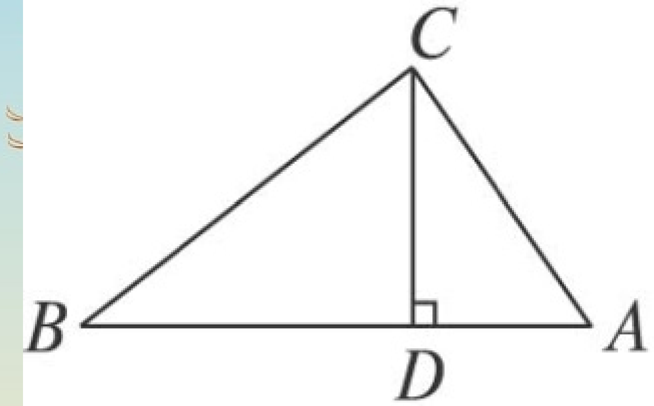
练一练

8．若一个三角形的三边长分别为1、a、8(其中a为正整数)，则以a－2、a、a＋2为边的三角形的面积为___24___.

典例分析

例1.已知：如图，在△ABC中，CD是AB边上的高，且$CD^2=AD\cdot BD$.

求证：△ABC是直角三角形.



证明：∵CD⊥AB，

∴∠ADC=∠BDC=90°，

∴在RT△ACD中，根据勾股定理，得

$AC^2=AD^2+CD^2$，

在RT△ACD中，根据勾股定理，得$BC^2=CD^2+BD^2$

，

∴$AC^2+BC^2=AD^2+2CD^2+BD^2$

$=AD^2+2AD\bullet BD+BD^2=(AD+BD)^2=AB^2$，

∴∠ACB=90°.

∴△ABC是直角三角形.

练习1

（1）知：在△ABC中，∠A、∠B、∠C的对边分别是a、b、c，满足$a^2+b^2+c^2+200=12a+16b+20c$.试判断△ABC的形状.

解：∵$a^2+b^2+c^2+200=12a+16b+20c$，

∴$(a-6)^2+(b-8)^2+(c-10)^2=0$，

∴$(a-6)=0$，$(b-8)=0$，$(c-10)=0$，

∴$a=6$，$b=8$，$c=10$，

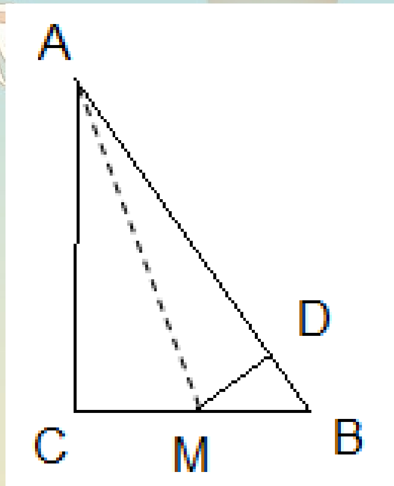
∵$6^2+8^2=10^2$，

∴$a^2+b^2=c^2$，

∴△ABC是直角三角形．

练习1

（2）如图，已知：在ΔABC中，$\angle C=90^\circ$，M是BC的中点，$MD\perp AB$于D，求证：$AD^2=AC^2+BD^2$.



证明：连接MA，

$\because MD\perp AB$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore AD^2=AM^2-MD^2$，$BM^2=BD^2+MD^2$，

$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore AM^2=AC^2+CM^2$

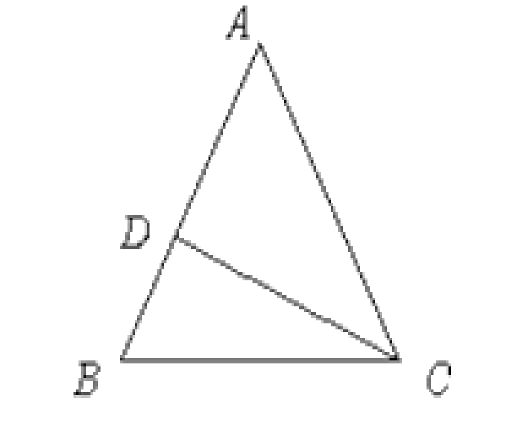
$\because$M为BC中点，

$\therefore BM=MC$．

$\therefore AD^2=AC^2+BD^2$．

典例分析

例2.如图，等腰△ABC中，底边BC＝20，D为AB上一点，CD＝16，BD＝12，求△ABC的周长



解：∵BC=20，BD=12，CD=16，

$BD^2+CD^2=12^2+16^2=20^2=BC^2$，

∴∠BDC=90°，

∴∠ADC=90°，

∴$AD^2+CD^2=AC^2$，

即$AD^2+16^2=(AD+12)^2$，

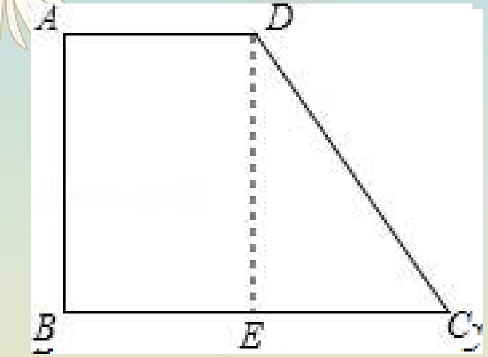
∴$AD=\frac{14}{3}$，

∴$AC=AB=12+\frac{14}{3}$，

∴△ABC的周长=AB+AC+BC=$53\frac{1}{3}$.

练习2

（1）已知：如图，四边形ABCD，AD∥BC，AB=4，BC=6，CD=5，AD=3.求：四边形ABCD的面积.



解：过D作DE∥AB，交CB于E点，

又∵AD∥CB，

∴四边形ABED是平行四边形，

∴EB=AD=3，DE=AB=4，

∵CB=6，

∴EC=BC－BE=6－3=3，

∵CD=5，

∴$CD^2=DE^2+CE^2$，

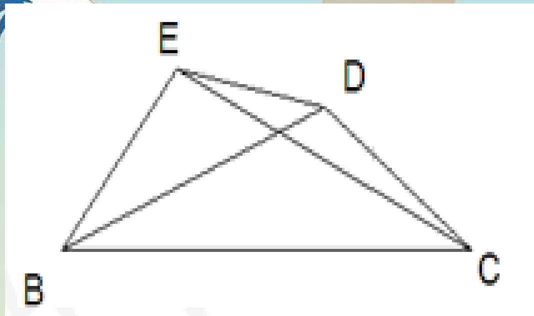
∴△DEC是直角三角形，

∴∠DEC=90°，

∴四边形ABCD的面积是：$\frac{1}{2}$（AD+CB）•DE=18.

练习2

（2）已知：如图，DE=m,BC=n,∠EBC与∠DCB互余，求BD^2+CE^2.



解：作辅助线延长BE、CD交于点A

∵∠EBC与∠DCB互余

∴∠BAC是直角

$BD^2=AD^2+AB^2$，$CE^2=AE^2+AC^2$

$AD^2+AE^2=DE^2$, $AB^2+AC^2=BC^2$

$BD^2+CE^2=AB^2+AD^2+AE^2+AC^2=DE^2+BC^2=m^2+n^2$