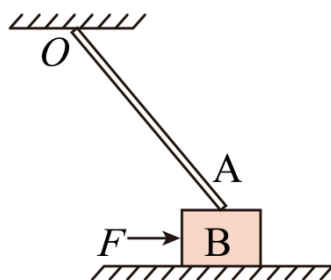


2024-2025 学年物理竞赛能力培优精练

专题 03 力矩有固定转轴的物体平衡

1. (2021 · 宣城强基计划) 如图所示, 杆 A 可绕固定轴 O 转动, 木块 B 在杆 A 下方的光滑桌面上, 今用逐渐增大的水平力 F 向右推 B, 整个装置仍保持静止, 由于水平力 F 的作用, B 对 A 的支持力将 ()



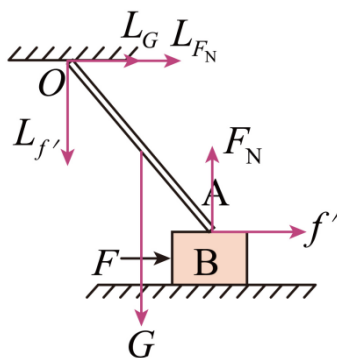
- A. 减小 B. 增大 C. 不变 D. 无法确定

【答案】A

【详解】根据题意可知, 物体 B 在水平方向上受水平向右的推力 F , 水平向左的 A 对 B 的摩擦力 f 作用, B 静止处于平衡状态, 由平衡条件得

$$f = F$$

推力 F 逐渐增大, 因此摩擦力 f 逐渐增大; 由牛顿第三定律可知, B 对 A 的摩擦力 f' 逐渐增大, 杆 A 是一个杠杆, O 点是支点, 杆 A 受力及力臂如图所示



由于杠杆 A 静止, 由杠杆平衡条件得

$$G \times L_G = F_N \times L_{F_N} + f' \times L_{f'}$$

由于在水平推力 F 逐渐增大的过程中, G 、 L_G 、 L_{F_N} 、 $L_{f'}$ 不变, f' 增大, 则 F_N 变小。

故选 A。

2. (2022 · 昆明强基计划) 用定滑轮提升质量为 M 的重物, 绳索与滑轮间的摩擦系数为 μ , 绳与滑轮接触的两个端点处的半径对轮心的张角为 θ 。设绳索质量不计, 现欲提升重物 M , 至少需要多大的力? ()

- A. Mg B. $Mg \cos \theta$ C. $Mge^{\frac{\mu\theta}{2}}$ D. $Mge^{\mu\theta}$

【答案】D

【详解】取一小段张角为 $d\theta$ 绳，切向方程为

$$(T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} - \mu N = 0$$

法向

$$N - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

整理得

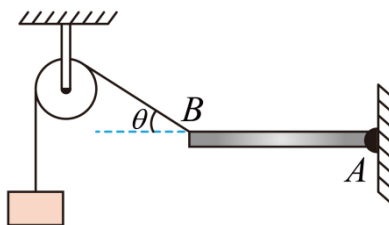
$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

积分得

$$T_B = T_A e^{\mu\theta} = Mge^{\mu\theta}$$

故选 D。

3. (2023 · 长沙竞赛) 如图所示，均匀细杆 AB 其 A 端装有转轴，B 端连接细线通过滑轮和质量为 m 的重物 C 相连，若杆 AB 呈水平，细线与水平方向夹角为 θ 时恰能保持平衡，不计一切摩擦，重力加速度为 g ，则下列结论正确的是 ()



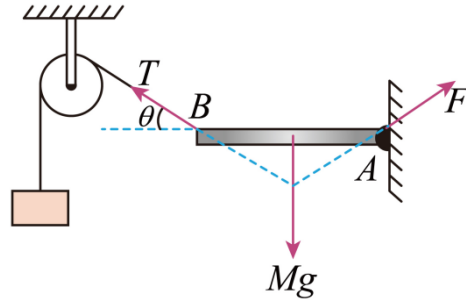
- A. 杆对轴 A 的作用力大小为 mg
 B. 杆的质量为 $M = 2m \sin \theta$
 C. 因为不知道杆的质量 M ，所以无法求出杆对轴 A 的作用力
 D. 杆的质量 M 一定大于重物 C 的质量

【答案】AB

【详解】AC. 由题可知，C 物体受到重力和绳子的拉力处于平衡状态，所以绳子的拉力与 C 物体的重力大小相等，即

$$T = mg$$

对杆 AB 进行受力分析如图



由受力图可知，轴 A 对杆的作用力的方向的反向延长线一定过绳子的拉力的延长线与重力的作用线的交点，由于重力的作用线过杆的中点，所以可知力 F 与绳子的拉力与水平方向之间的夹角是相等的，且

$$F \cos \theta = T \cos \theta$$

所以 F 与绳子的拉力的大小也相等，即

$$F = T = mg$$

则杆对轴 A 的作用力大小为 mg ，故 A 正确，C 错误；

BD. 设 AB 杆的长度为 L ，由图可知，杆的重力产生的力矩是逆时针方向的力矩，力臂的大小是 $\frac{1}{2}L$ ，绳子的拉力产生的力矩是顺时针方向的力矩，力臂的大小是 $L \sin \theta$ ，过转轴的力不产生力矩，由力矩平衡得

$$Mg \cdot \frac{1}{2}L = mgL \sin \theta$$

解得

$$M = 2m \sin \theta$$

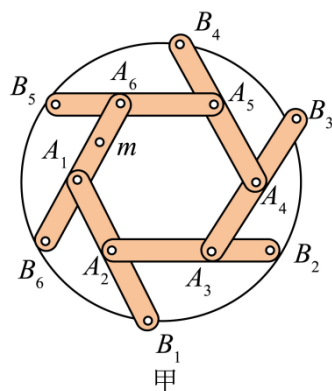
若当 $\theta \leq 30^\circ$ 时，有

$$M = 2m \sin \theta \leq m$$

可见杆的质量 M 不一定大于重物 C 的质量，故 B 正确，D 错误。

故选 AB。

4. (2019 • 全国竞赛) 有 6 个完全相同的刚性长条薄片 $A_i B_i (i=1, 2, \dots, 6)$ ，其两端下方各有一个小突起，薄片及突起的重量均可以不计。现将此 6 个薄片架在一只水平的碗口上，使每个薄片一端的小突起 B_i 恰在碗口上，另一端小突起 A_i 位于其下方薄片的正中，由正上方俯视如图甲所示。若将一质量为 m 的质点放在薄片 $A_6 B_6$ 上一点，这一点与此薄片中心的距离等于它与小突起 A_6 的距离，求薄片 $A_6 B_6$ 中点所受的（由另一薄片的小突起 A_i 所施的）压力。



【答案】 $P = \frac{1}{42}mg$.

【详解】解析 设所求的压力 $P_i = P$ （向下），并设任一突起 A_i 对其下的薄片中心的压力及其反作用力的大小为 P_i ，则根据以 B_i 点为支点的力矩平衡知 $P_{i+1} = 2P_i$ ，

即 $P_2 = 2P_1 = 2P$ ，

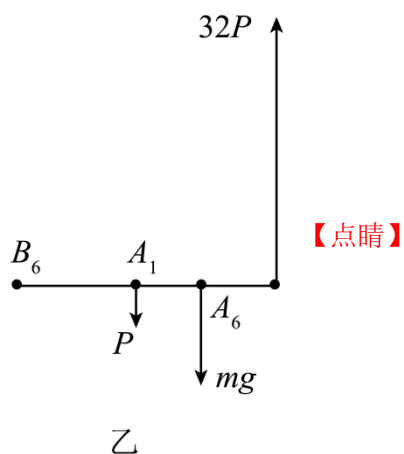
$P_3 = 2P_2 = 2^2P$ ，

.....

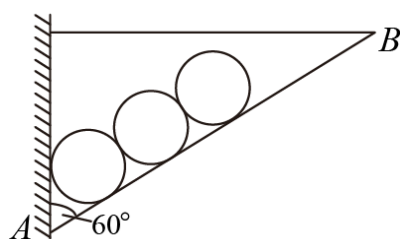
故 $P_6 = 2^5P = 32P$ 。

再考虑 A_6B_6 ，薄片以 B_6 点为支点的力矩平衡，由图乙可得 $\frac{P}{2} + \frac{3}{4}mg - 32P = 0$ ，

解得 $P = \frac{1}{42}mg$ 。



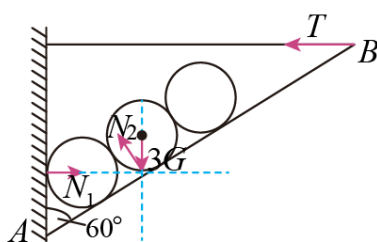
5. (2019 • 全国竞赛) 图中三个小球完全相同，所受重力均为 G ，半径 $R = 10\text{cm}$ 。匀质板 AB 长 $l = 100\text{cm}$ ，所受重力为 $2G$ 。板 A 端用光滑铰链固定在竖直墙上，板 B 端用细绳水平拉住，板与墙之间夹角为 60° 。设小球之间，小球与板、墙之间均无摩擦，试求水平绳中张力 T 。



【答案】 $3.97G$

【详解】 首先以三个小球整体为研究对象,受力如图乙所示,由图示的几何关系及平衡条件易得

$$N_1 = 3G \tan 30^\circ = \sqrt{3}G.$$



再以小球与板整体为研究对象,系统受小球的重力、板的重力、绳的拉力 T 、墙壁对小球的弹力 N_1 及 A 处铰链的作用力.以 A 处铰链为转轴,系统应满足力矩平衡,即

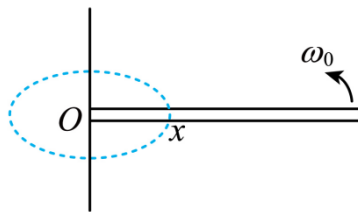
$$2G \cdot \frac{l}{2} \sin 60^\circ + G \cdot R + G \cdot (R + 2R \sin 60^\circ) + G \cdot (R + 4R \sin 60^\circ) + N_1 \cdot \frac{R}{\tan 30^\circ} - T \cdot l \cos 60^\circ = 0, \text{ 整理得}$$

$$T = 6\left(2 + \sqrt{3}\right) \frac{R}{l} G + \sqrt{3}G = 3.97G.$$

本题是比较基本的平衡问题,涉及共点力的平衡与力矩的平衡,但本题隐藏着一个易错点,即板 AB 对三个小球整体的弹力作用点很容易被认为是在中间球与板的接触处并垂直于板.实际上,由于板对三个小球的弹力并不是相等的,弹力的作用点也就会发生偏移.因弹力 N_1 、三球的重力 $3G$ 与板对三个球的弹力 N_2 三力交汇,才出现了图示的受力情况,由图可见,弹力虽是接触力,但弹力的作用线并非一定过其接触点.

6. (2022 • 全国竞赛) 一长为 L 、质量为 m 的均匀细杆,可绕轴 O 自由转动.设桌面与细杆间的滑动摩擦系数为 μ ,杆初始的转速为 ω_0 ,试求:

- (1) 摩擦力矩;
- (2) 从 ω_0 到停止转动共经历多少时间;
- (3) 一共转动多少圈。



【答案】(1) $M = \frac{1}{2} \mu mgL$; (2) $t = \frac{2L\omega_0}{3\mu g}$; (3) $n = \frac{\omega_0^2 L}{6\pi\mu g}$

【详解】(1) 杆在转动时，受到的摩擦力沿杆长连续分布，各元段的摩擦力臂不同，需采用微积分方法求解。

在杆上任取一元段 dx ，质量为 $dm = (d/L)dx$ ，所受的摩擦力为

$$dF = \mu g dm = \mu g \frac{m}{L} dx$$

对轴的摩擦力矩大小为

$$dM = x dF = \mu g \frac{m}{L} x dx$$

由于各元段受到的摩擦力矩方向相同，所以总力矩大小为

$$M = \int dM = \int_0^L \mu g \frac{m}{L} x dx = \frac{1}{2} \mu mgL$$

(2) 恒力矩作用下满足

$$\omega - \omega_0 = \beta t$$

其中 $\beta = \frac{M}{J} = \frac{3\mu g}{2L}$ ，当 $\omega = 0$ 时，有

$$t = \frac{2L\omega_0}{3\mu g}$$

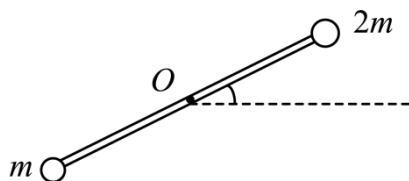
(3) 由 $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \beta t^2$ 及 $n = \frac{\theta}{2\pi}$ 得

$$n = \frac{\omega_0^2 L}{6\pi\mu g}$$

7. (2022 • 全国竞赛) 一长为 l 、质量可以忽略的直杆，两端分别固定有质量为 $2m$ 和 m 的小球，杆可绕通过其中心 O 且与杆垂直的水平光滑固定轴在铅直平面内转动。开始杆与水平方向成某一角度，处于静止状态，如图所示，释放后，杆绕 O 轴转动，则当杆转到水平位置时，求：

(1) 系统所受到的合外力矩的大小；

(2) 此时该系统角加速度的大小。



【答案】(1) $\frac{1}{2}mgl$; (2) $\frac{2g}{3l}$

【详解】(1) 根据题意可知，水平位置时，合外力矩为

$$M = 2mg \cdot \frac{l}{2} - mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2}mgl$$

(2) 根据题意，由公式 $M = Ja$ 可得，此时的角加速度为

$$a = \frac{M}{J}$$

又有

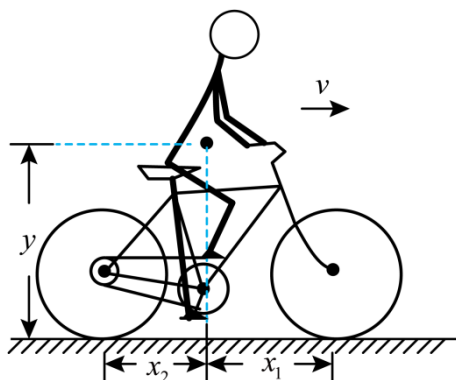
$$J = 2m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}ml^2$$

则

$$a = \frac{2g}{3l}$$

8. (2019 • 泉州竞赛) 共享单车极大地方便了人们的出行。如图所示，单车在水平地面上行驶的速度为 v ，单车与人的总质量为 m ，合质心离地高度为 y ，质心离前后轮的水平距离分别为 x_1 、 x_2 ，车轮与水平地面间的动摩擦因数为 μ ，若前后车轮同时刹车，同时被“抱死”。

- (1) 求地面对前、后轮的支持力大小 N_1 、 N_2 ，及车能滑行的距离；
(2) 若车速较快，为保证刹车时不发生危险， y 与 x_1 应满足什么关系？



【答案】(1) $\frac{x_2 + \mu y}{x_1 + x_2}mg$ ， $\frac{x_1 - \mu y}{x_1 + x_2}mg$ ， $\frac{v^2}{2\mu g}$; (2) $y < \frac{x_1}{\mu}$

【详解】(1) 自行车刹车时，合质心的合外力矩为零，则

$$\mu(N_1 + N_2)y - N_1x_1 + N_2x_2 = 0$$

其中

$$N_1 + N_2 = mg$$

解得

$$N_1 = \frac{x_2 + \mu y}{x_1 + x_2} mg$$

$$N_2 = \frac{x_1 - \mu y}{x_1 + x_2} mg$$

根据牛顿第二定律可得自行车刹车时的加速度大小为

$$a_1 = \frac{\mu mg}{m}$$

根据位移速度关系可得车能滑行的距离为

$$s_1 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

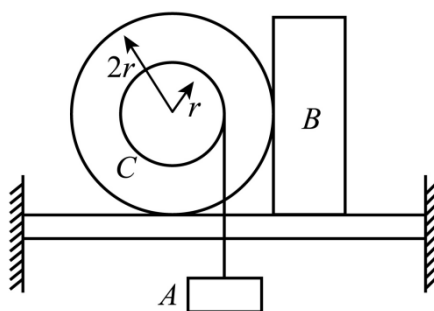
(2) 若车速较快, 刹车时后轮有离地趋势, 为保证刹车时不发生危险, 应有

$$N_2 > 0$$

解得

$$y < \frac{x_1}{\mu}$$

9. (2019 • 全国竞赛) 如图所示, 物体 A 、 B 及滚轮 C 质量均为 M . 滚轮 C 由固定在一起的两个同心圆盘组成, 半径分别为 $2r$ 和 r , 各接触面静摩擦系数均为 μ . 问: 系统维持平衡时, μ 的最小值为多少?



【答案】 $\mu \leq \frac{1}{3}$

【详解】 对滚轮 C , 有

$$N_C = mg + T - f_B = 2mg - f_B.$$

对 B 物体, 有 $N_{地} = f_B + mg$.

对滚轮 C , 以 O 为轴有

$$f_B \bullet 2r + f_C \bullet 2r = T \bullet r = mg \bullet r ,$$

$$\text{即 } f_B + f_C = \frac{1}{2}mg ,$$

$$\text{亦即 } f_B < \frac{1}{2}mg ,$$

$$\text{故 } N_C < N_{\text{地}} .$$

$$\text{而对整个轮子有 } f_{\text{地}} = f_C .$$

这表明 B 和地面之间先于滚轮 C 和地面之间达到最大静摩擦力.

若 B 和地面之间先达到最大静摩擦力,而 B 和滚轮 C 之间没有达到最大静摩擦力,则

$$f_{\text{地}} = \mu N_{\text{地}} = \mu(f_B + mg) = f_C .$$

$$\text{而 } f_B + f_C = \frac{1}{2}mg ,$$

$$\text{故 } f_B = \frac{1-2\mu}{2(1+\mu)}mg , \quad f_C = \frac{3\mu}{2(1+\mu)}mg .$$

对滚轮 C 与物体 B 的接触处,满足

$$\mu \leq \frac{f_B}{N_B} = \frac{f_B}{f_C} = \frac{1-2\mu}{3\mu} ,$$

$$\text{即 } 3\mu^2 + 2\mu - 1 \leq 0 ,$$

$$\text{易得 } \mu \leq \frac{1}{3} .$$

若 B 和地面之间未达到最大静摩擦力,而 B 和滚轮 C 之间已达到最大静摩擦力,则

$$f_B = \mu N_B = \mu f_C = \mu \left(\frac{1}{2}mg - f_B \right) ,$$

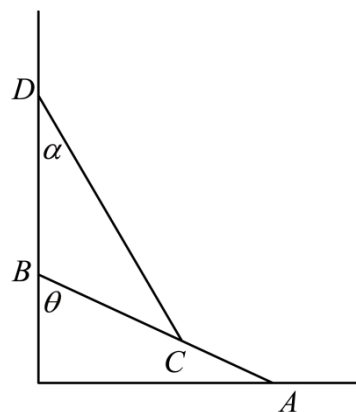
$$\text{得 } f_B = \frac{\mu}{2(1+\mu)}mg , f_C = \frac{1}{1+\mu}mg .$$

对物体 B 与地面之间,满足

$$\mu \leq \frac{f_{\text{地}}}{N_{\text{地}}} = \frac{f_C}{f_B + mg} = \frac{1}{2+3\mu} ,$$

$$\text{易得 } \mu \leq \frac{1}{3} .$$

10. (2011 • 全国竞赛) 质量均匀分布的刚性杆 AB 、 CD 如图放置, A 点与水平地面接触, 与地面间的静摩擦系数为 μ_A , B 、 D 两点与光滑竖直墙面接触, 杆 AB 和 CD 接触处的静摩擦系数为 μ_C , 两杆的质量均为 m , 长度均为 l .

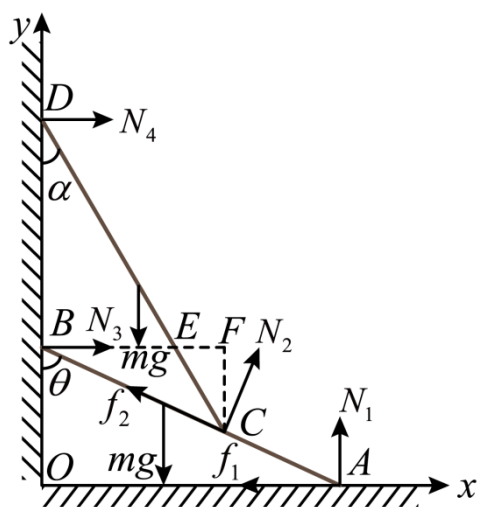


(1) 已知系统平衡时 AB 杆与墙面夹角为 θ ，求 CD 杆与墙面夹角 α 应该满足的条件（用 α 及已知量满足的方程式表示）。

(2) 若 $\mu_A=1.00$ ， $\mu_C=0.866$ ， $\theta=60.0^\circ$ 。求系统平衡时 α 的取值范围（用数值计算求出）。

【答案】 (1) $\tan \alpha \leq \frac{2(\mu_C \sin \theta - \cos \theta)}{\mu_C \cos \theta + \sin \theta} \frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} - \frac{2 \sin \alpha}{\cos \theta} \leq 4\mu_A - 3 \tan \theta$ (2) $19.5^\circ \leq \alpha \leq 21.1^\circ$

【详解】 (1). 建立如图所示坐标系 Oxy . 两杆的受力情况如图:



f_1 为地面作用于杆 AB 的摩擦力， N_1 为地面对杆 AB 的支持力， f_2 、 N_2 为杆 AB 作用于杆 CD 的摩擦力和支持力， N_3 、 N_4 分别为墙对杆 AB 和 CD 的作用力， mg 为重力. 取杆 AB 和 CD 构成的系统为研究对象，系统平衡时，由平衡条件有

$$N_4 + N_3 - f_1 = 0 \quad (1)$$

$$N_1 - 2mg = 0 \quad (2)$$

以及对 A 点的力矩

$$\frac{1}{2} mgl \sin \theta + mg \left(l \sin \theta - \frac{1}{2} l \sin \alpha \right) - N_3 l \cos \theta - N_4 (l \cos \theta + l \cos \alpha - CF) = 0$$

即

$$\frac{3}{2}mgl \sin \theta - \frac{1}{2}mgl \sin \alpha - N_3 l \cos \theta - N_4 (l \cos \theta + l \cos \alpha - CF) = 0 \quad (3)$$

式中 CF 待求. F 是过 C 的竖直线与过 B 的水平线的交点, E 为 BF 与 CD 的交点. 由几何关系有

$$CF = l \sin \alpha \cot \theta \quad (4)$$

取杆 CD 为研究对象, 由平衡条件有

$$N_4 + N_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$N_2 \sin \theta + f_2 \cos \theta - mg = 0 \quad (6)$$

以及对 C 点的力矩

$$N_4 l \cos \alpha - \frac{1}{2}mgl \sin \alpha = 0 \quad (7)$$

解以上各式可得

$$N_4 = \frac{1}{2}mg \tan \alpha \quad (8)$$

$$N_3 = \left(\frac{3}{2} \tan \theta - \frac{1}{2} \tan \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} \right) mg \quad (9)$$

$$f_1 = \left(\frac{3 \tan \theta}{2} - \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} \right) mg \quad (10)$$

$$N_1 = 2mg \quad (11)$$

$$N_2 = \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \tan \alpha \cos \theta \right) mg \quad (12)$$

$$f_2 = \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \tan \alpha \sin \theta \right) mg \quad (13)$$

CD 杆平衡的必要条件为

$$f_2 \leq \mu_c N_2 \quad (14)$$

由 (12)、(13)、(14) 式得

$$\tan \alpha \leq \frac{2(\mu_c \sin \theta - \cos \theta)}{\mu_c \cos \theta + \sin \theta} \quad (15)$$

AB 杆平衡的必要条件为

$$f_1 \leq \mu_A N_1 \quad (16)$$

由 (10)、(11)、(16) 式得

$$\frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} - \frac{2 \sin \alpha}{\cos \theta} \leq 4\mu_A - 3 \tan \theta \quad (17)$$

因此，使系统平衡， α 应满足的条件为 (15) 式和 (17) 式。

(2). 将题给的数据代入 (15) 式可得

$$\alpha \leq \arctan 0.385 = 21.1^\circ \quad (18)$$

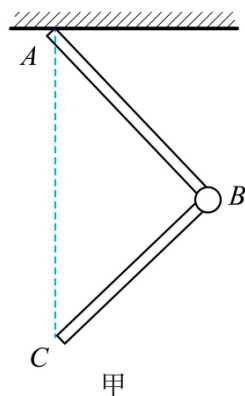
将题给的数据代入 (17) 式，经数值计算可得

$$\alpha \geq 19.5^\circ \quad (19)$$

因此， α 的取值范围为

$$19.5^\circ \leq \alpha \leq 21.1^\circ \quad (20)$$

11. (2019 • 全国竞赛) 如图甲所示，一根细棒上端 A 处用铰链与天花板相连，下端用铰链与另一细棒相连，两棒的长度相等，两棒限在图示的竖直平面内运动，且不计铰链处的摩擦，当在 C 端加一个适当的外力 (在纸面内)，可使两棒平衡在图示的位置处，即两棒间的夹角为 90° ，且 C 端正处于 A 端的正下方。

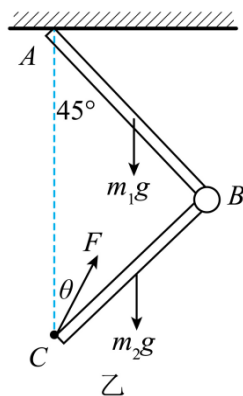


(1) 不管两棒质量如何，此外力只可能在哪个方向范围内？试说明道理 (不要求推算)。

(2) 如果 AB 棒的质量 $m_1 = 1.0\text{kg}$ ，BC 棒的质量 $m_2 = 2.0\text{kg}$ ，求此外力的方向和大小。

【答案】(1). 只有当此外力指向竖直线以右且在 BC 棒以上 (如图乙所示) 时，棒才有可能平衡。(2) $F = 19\text{N}$ ， $\theta = \arcsin 0.395 = 23.3^\circ$ 。

【详解】(1) 过 C 点画受力示意图，则力 F 不可能指向竖直线以左，因为这样对两棒整体来说，力 F 对 A 点的力矩与重力矩相同，物体不可能平衡；力 F 也不可能指向竖直线以右且在 BC 棒以下，因为这样对于 B 点来说，力 F 对 B 的力矩与下棒的重力矩同向，也不可能平衡。只有当此外力指向竖直线以右且在 BC 棒以上 (如图乙所示) 时，棒才有可能平衡。



(2) .设外力 F 与竖直线之间的夹角为 θ , 两棒长均为 L , 根据题意, 对 A 点列出整个物体的平衡方程,

$$\text{即 } (m_1 + m_2)g \cdot \frac{L}{2} \cos \frac{\pi}{4} = F \sin \theta \cdot \sqrt{2}L .$$

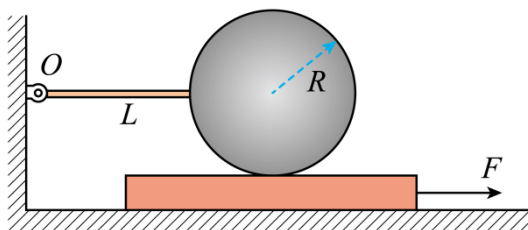
对 B 点列出下棒的转动平衡方程, 即 $F \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) L = m_2 g \cdot \frac{L}{2} \cos \frac{\pi}{4} .$

由上述两式可解得 $F = \frac{1}{4} g \sqrt{2m_1^2 + 10m_2^2 + 8m_1m_2} ,$

$$\sin \theta = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{2m_1^2 + 10m_2^2 + 8m_1m_2}} .$$

代入数值, 可得 $F = 19N$, $\theta = \arcsin 0.395 = 23.3^\circ .$

12. (2019 • 全国竞赛) 如图所示, 一个半径为 R 的均质金属球上固定着一根长为 L 的轻质细杆, 细杆的左端用铰链与墙壁相连, 球下边垫上一块木板后, 细杆恰好水平, 而木板下面是光滑的水平面. 由于金属球和木板之间有摩擦 (已知摩擦因素为 μ), 所以要将木板从球下面向右抽出时, 至少需要大小为 F 的水平拉力. 试问: 现要将木板继续向左插进一些, 至少需要多大的水平推力?



【答案】 $f = \frac{\mu G(R+L)}{R+L+\mu R}$; 当 $R+L-\mu R < 0$, 即 $\mu > \frac{R+L}{R}$ 时, 出现自锁, 木板无法插入.

【详解】 解析 以球和杆为对象, 研究其对称轴 O 的转动平衡, 设木板拉出时给球体的摩擦力为 f , 支持力为 N , 重力为 G , 力矩平衡方程为

$$fR + N(R+L) = G(R+L) . \quad (1)$$

球和板已相对滑动, 故 $f = \mu N$. (2)

解①②可得 $f = \frac{\mu G(R+L)}{R+L+\mu R}$.

再看木板的平衡条件: $F = f$.

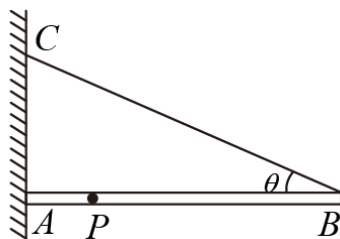
同理, 木板插进去时, 球体和木板之间的摩擦力 $f' = \frac{\mu G(R+L)}{R+L-\mu R} = F'$.

显然, 当 $R+L-\mu R < 0$, 即 $\mu > \frac{R+L}{R}$ 时, 出现自锁, 木板无法插入.

13. (2007·全国竞赛) 有一长为 l , 重为 W_0 的均匀杆 AB, A 端顶在竖直的粗糙墙壁上, 杆端与墙面间的静摩擦系数为 μ ; B 端用一强度足够而不可伸长的绳悬挂, 绳的另一端固定在墙壁 C 点, 木杆呈水平状态, 绳与杆的夹角为 θ , 如图所示.

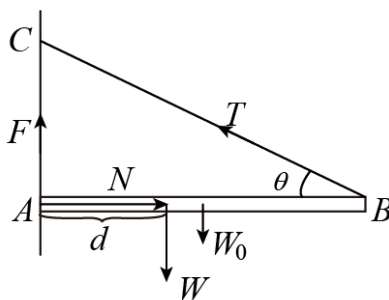
(1) 求杆能保持平衡时, μ 与 θ 应满足的条件.

(2) 杆保持平衡时, 杆上有一点 P 存在, 若在 A 点与 P 点间任一点悬挂一重物, 则当重物的重量 W 足够大时总可以使平衡破坏; 而在 P 点与 B 点之间任一点悬挂任意重量的重物, 都不能使平衡破坏, 求出这一 P 点与 A 点的距离.



【答案】(1) $\mu \geq \tan \theta$; (2) $\frac{l}{1 + \mu \tan \theta}$

【详解】设绳的张力为 T , 墙对杆的摩擦力为 F (向上), 正压力为 N (向外), W 的悬挂点距 A 的距离为 d (如图), 则根据刚体平衡的条件可得:



$$F + T \sin \theta = W_0 + W \quad (1)$$

$$N = T \cos \theta \quad (2)$$

$$Fl = W_0 \frac{l}{2} + W(l-d) \quad (3)$$

$$F \leq \mu N \quad (4)$$

由③式得

$$F = \frac{1}{2}W_0 + (1 - \frac{d}{l})W \quad (5)$$

由①式及⑤式得

$$T \sin \theta = W_0 + W - F = \frac{1}{2}W_0 + \frac{d}{l}W \quad (6)$$

由②，⑥式得。

$$N = ctg \left(\frac{1}{2}W_0 + \frac{d}{l}W \right) \quad (7)$$

将⑤，⑦两式代入④式中，得

$$F = \frac{1}{2}W_0 + (1 - \frac{d}{l})W \leq \mu ctg \left(\frac{1}{2}W_0 + \frac{d}{l}W \right)$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(\mu ctg \theta - 1)W_0 \geq \left[1 - \frac{d}{l}(\mu ctg \theta + 1) \right]W \quad (8)$$

根据这一结果作如下分析：

1. 当不挂重物时， $W=0$ ，这时式成为

$$\frac{1}{2}(\mu ctg \theta - 1)W_0 \geq 0$$

$$\text{即 } \mu \geq tg \theta \quad (9)$$

此即第 1 问的答案。

2. 在⑨式条件下挂上重物 W ，这时⑧式左方 $(\mu ctg \theta - 1) \geq 0$ ，为了对任意 W ⑧式均能成立，必须要求

⑧式右方 W 的系数小于或等于零，否则当 W 足够大时，⑧式肯定不能成立。

因此，平衡条件为

$$1 - \frac{d}{l}(\mu ctg \theta + 1) \leq 0$$

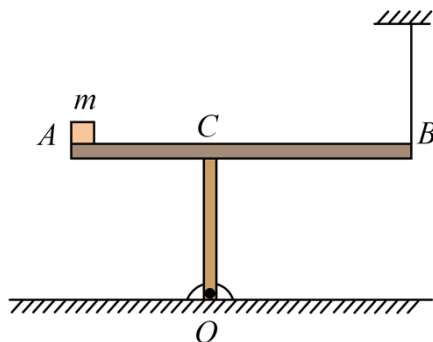
$$\text{即 } d \geq \frac{l}{1 + \mu ctg \theta}$$

第 2 问中所求 P 点与 A 点的距离为

$$\overline{AP} = d_{\min} = \frac{l}{1 + \mu ctg \theta}$$

14. (2021 · 上海竞赛) 如图所示，T 形金属支架与固定转轴 O 相连， AB 水平， CO 与 AB 垂直， B 端由竖直细线悬吊， $AC=CO=0.2\text{m}$ ， $CB=0.3\text{m}$ ，支架各部分质量均匀分布。小滑块质量 $m=0.5\text{kg}$ ，静止于 A 端时细线恰不受力。现给小滑块初速使其水平向右滑动，滑块与 AB 间的动摩擦因数 $\mu=0.5$ ， $g=10\text{m/s}^2$ ，求：

- (1) 支架的重力相对转轴 O 的力矩；
 (2) 小滑块滑至 C 点时细线对 B 的拉力。



【答案】(1) 1Nm ；(2) 5N

【详解】(1) 根据力矩平衡可知，支架的重力相对转轴 O 的力矩为

$$M_G = mgL_{AC}$$

解得

$$M_G = 1\text{N} \cdot \text{m}$$

(2) 滑动摩擦力的力矩

$$M_f = \mu mgL_{CO}$$

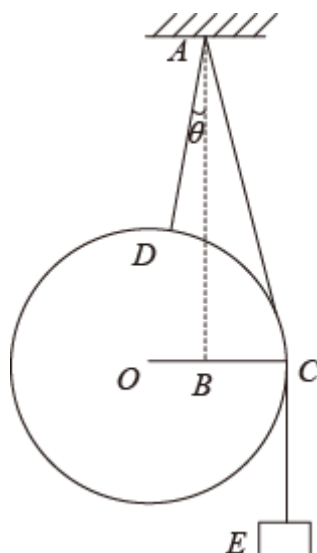
根据力矩平衡有

$$M_G + M_f = TL_{CB}$$

解得

$$T = 5\text{N}$$

15. (2007 • 全国竞赛) 半径为 R 、质量为 M_1 的均匀圆球与一质量为 M_2 的重物分别用细绳 AD 和 ACE 悬挂于同一点 A ，并处于平衡，如图所示，已知悬点 A 到球心 O 的距离为 L ，不考虑绳的质量和绳与球的摩擦，试求悬挂圆球的绳 AD 与竖直方向 AB 的夹角 θ 。



【答案】 $\theta = \arcsin \frac{M_2 R}{L(M_1 + M_2)}$

【详解】作用在球上的力有重力 $M_1 g$ 、 AD 绳的拉力 T 和 ACE 绳的压力 N . 由于不考虑绳与球的摩擦, 所以 N 的方向沿半径指向球心. 重力也是通过球心的. 由于球平衡, 所以绳 AD 的拉力也必过球心, 因此可判断绳一定沿 OA 方向 (如图)

对球和重物组成的系统, 根据平衡条件, $M_1 g$ 和 $M_2 g$ 对 A 点的力矩大小相等. 即

$$M_1 g \cdot \overline{OB} = M_2 g \cdot \overline{BC} \quad (1)$$

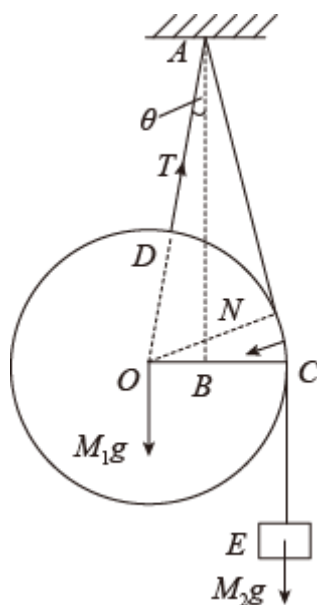
由图可知 $\overline{OB} = L \sin \theta$, $\overline{BC} = R - L \sin \theta$

代入①式, 可解得

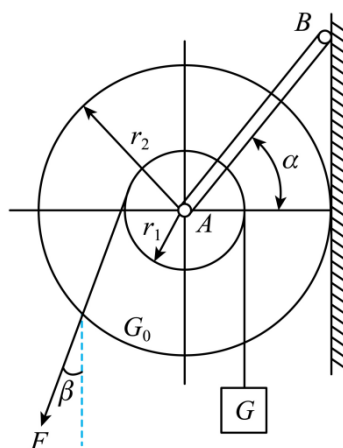
$$\sin \theta = \frac{M_2 R}{L(M_1 + M_2)}$$

$$\theta = \arcsin \frac{M_2 R}{L(M_1 + M_2)}$$

利用对 A 点的力矩的平衡关系, 要比讨论过球心的三力平衡要简捷得多, 因为无需知道 T 和 N 的大小



16. (2019 · 全国竞赛) 一个半径为 r_1 和 r_2 ，重量为 $G_0 = 200\text{N}$ ，可绕轴 A 转动的滑轮通过一个固定在墙上可转动的叉子 AB 支撑，其中 $\frac{r_2}{r_1} = 3$ ， $\alpha = 30^\circ$ ，如图所示。绳索在滑轮较小半径 r_1 的轴肩上缠绕了一圈，绳索右端用重力 $G = 500\text{N}$ 加载，滑轮与墙之间以及滑轮与绳之间的摩擦因数相同，静摩擦因数为 $\mu_s = 0.3$ ，动摩擦因数为 $\mu = 0.2$ 。试问：



- (1) 如果要使重物 G 悬起，左边绳子在 $\beta = 0$ 的情况下，至少要施加多大力 F ？
- (2) 如果要使重物 G 缓慢升起，左边绳子在 $\beta = 0$ 时需用多大为 F ？
- (3) 在什么角度下，提升重物所需的拉力最小；其值为多大？

【答案】(1) $F = 29.6(\text{N})$ (2) $F = 3293(\text{N})$ (3) 因此，在滑轮开始转动前，所需的最小拉力

为 $F_{\min} = 583.8(\text{N})$ ；在滑轮进入滑动之后，最小拉力为 $F_{\min} = 568.8(\text{N})$

【详解】(1) 首先分析滑轮是绕着轴 A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/905103014100012022>