

# 第六章 机器人静力分析与动力学



**本章重点：**

机器人的静力分析

机器人静力雅克

比矩阵

机器人动力学分析

牛顿-欧拉方程

拉格朗日运动方

程

**本章难点：**

拉格朗日运动方程

# 引言

前面章节介绍的机器人运动学和逆运动学以及微分运动等均是以前位置为研究对象。除了位置控制方式外，力也是机器人的另一种重要控制方式。

机器人是一个复杂的动力学系统，机器人系统在外载荷和关节驱动力矩(驱动力)的作用下将取得**静力平衡**，在关节驱动力矩(驱动力)的作用下将发生运动变化。当机器人出于静力平衡时，可以对其进行静力分析，而当机器人出于运动模式时，需要对其进行动力学分析。

机器人的动态性能不仅与**运动学因素**有关，还与机器人的**结构形式、质量分布、执行机构的位置、传动装置**等对动力学产生重要影响的因素有关。

## 6.1 机器人静力分析

机器人在工作状态下会与环境之间引起相互作用的力和力矩。机器人各关节的驱动装置提供关节力和力矩，通过连杆传递到末端执行器，克服外界作用力和力矩。关节驱动力和力矩 $\tau$ 与末端执行器施加的力和力矩 $F$ 之间的关系是机器人操作臂力控制的基础。

### 6.1.1 操作臂力和力矩的平衡

如图2.3所示，杆*i*通过关节*i*和*i+1*分别与杆*i-1*和*i+1*相连接，建立两个坐标系*{i-1}*和*{i}*。

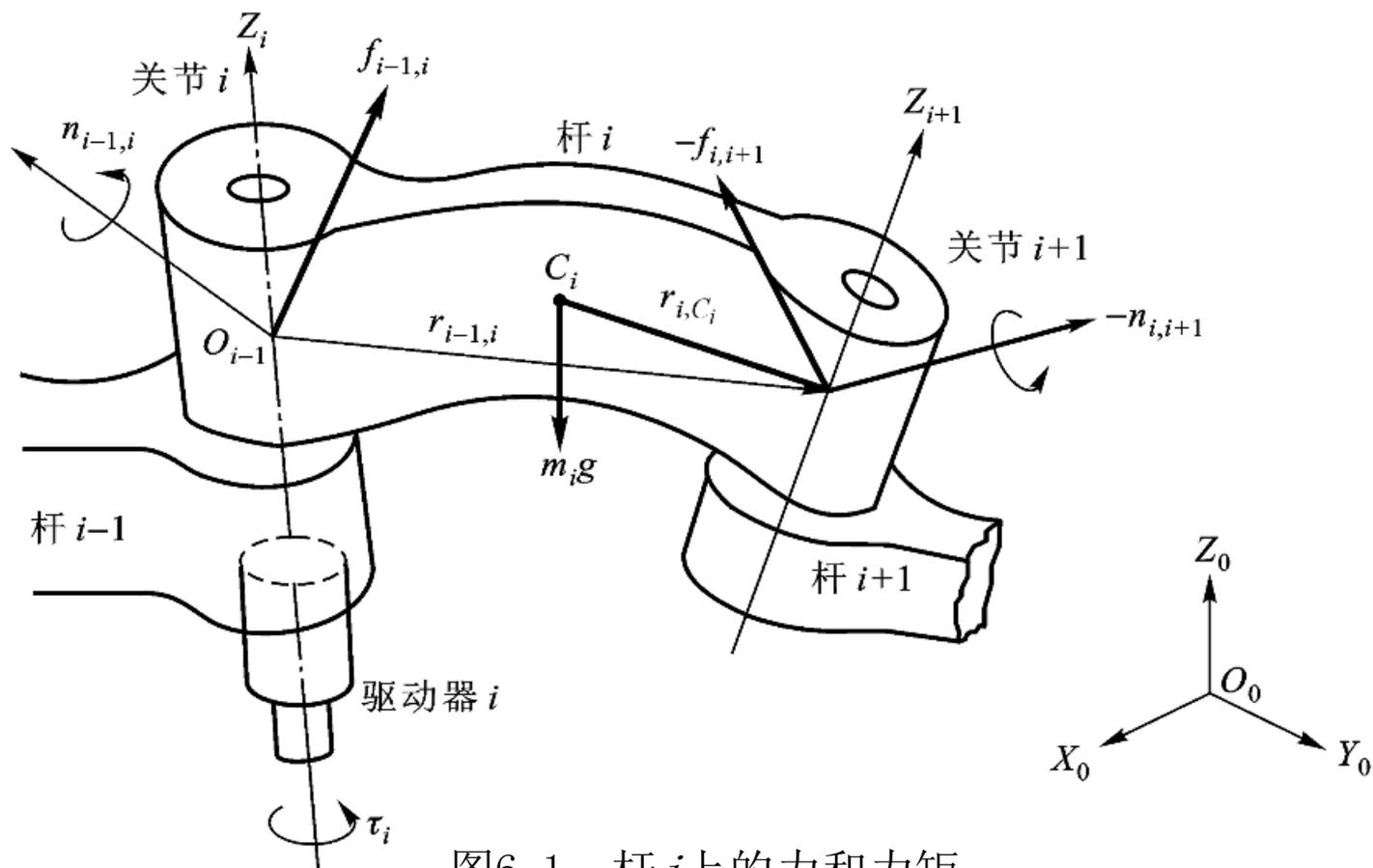


图6.1 杆*i*上的力和力矩

- 连杆的静力平衡条件为其上所受的合力和合力矩为零，因此力和力矩平衡方程式为

$$\begin{aligned} f_{i-1,i} + (-f_{i,i+1}) + m_i g &= 0 \\ n_{i-1,i} + (-n_{i,i+1}) + (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) \times f_{i-1,i} + (r_{i,c_i}) \times (-f_{i,i+1}) &= 0 \end{aligned}$$

式中： $r_{i-1,i}$ —坐标系  $\{i\}$  的原点相对于坐标系  $\{i+1\}$  的位置矢量；

$r_{i,c_i}$ —质心相对于坐标系  $\{i\}$  的位置矢量。

假如已知外界环境对机器人最后一个连杆的作用力和力矩，那么可以  $i-1$ 、 $i$  和  $i+1$  关节对应的相邻两连杆的关系由最后一个连杆向零连杆(机座)依次递推，从而计算出每个连杆上的受力情况。

### 6.1.2 机器人力雅可比

- 为了便于表示机器人手部端点的力和力矩(简称为端点广义力  $F$  ), 可将  $f_{n, n+1}$  和  $n_{n, n+1}$  合并写成一个6维矢量

$$F = \begin{bmatrix} f_{n,n+1} \\ n_{n,n+1} \end{bmatrix} = [f_{n,n+1_x} \quad f_{n,n+1_y} \quad f_{n,n+1_z} \quad n_{n,n+1_x} \quad n_{n,n+1_y} \quad n_{n,n+1_z}]^T$$

各关节驱动器的驱动力或力矩可写成一个  $n$  维矢量的形式, 即:

$$\tau = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad \tau_n]^T$$

式中:  $n$  为关节的个数;  $\tau$  为关节力矩(或关节力)矢量, 简称广义关节力矩。对于转动关节,  $\tau_i$  表示关节驱动力矩; 对于移动关节,  $\tau_i$  表示关节驱动力。

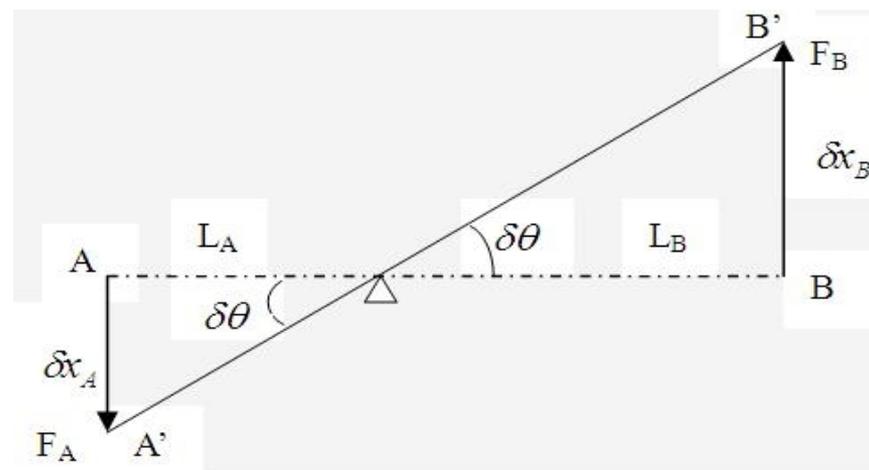
## 虚功原理 (principle of virtual work)

**虚功原理 (虚位移原理)**：约束力不做功的力学系统实现平衡的必要且充分条件是对结构上允许的任意位移 (虚位移) 施力所做功之和为零。

**虚位移**：系统力学结构的位移，不同于随时间一起产生的实际位移。

**约束力**：使系统动作 (运动) 受到制约的力。

例：已知作用在杠杆一端的力 $F_A$ ，试用虚功原理求作用于另一端的力 $F_B$ 。假设杠杆长度 $L_A$ 、 $L_B$ 已知。



例：已知作用在杠杆一端的力 $F_A$ ，试用虚功原理求作用于另一端的力 $F_B$ 。假设杠杆长度 $L_A$ 、 $L_B$ 已知。

解：设在力 $F_A$ 、 $F_B$ 的作用下，杠杆两端的虚位移分别为 $\delta x_A$ 、 $\delta x_B$ ，杠杆绕支点转动虚位移为 $\delta\theta$

$$\text{则： } \delta x_A = L_A \delta\theta, \delta x_B = L_B \delta\theta$$

按照虚功原理，杠杆两端受力所作的虚功分别为： $F_A \delta x_A, F_B \delta x_B$

由虚功原理得： $F_A \delta x_A + F_B \delta x_B = 0$

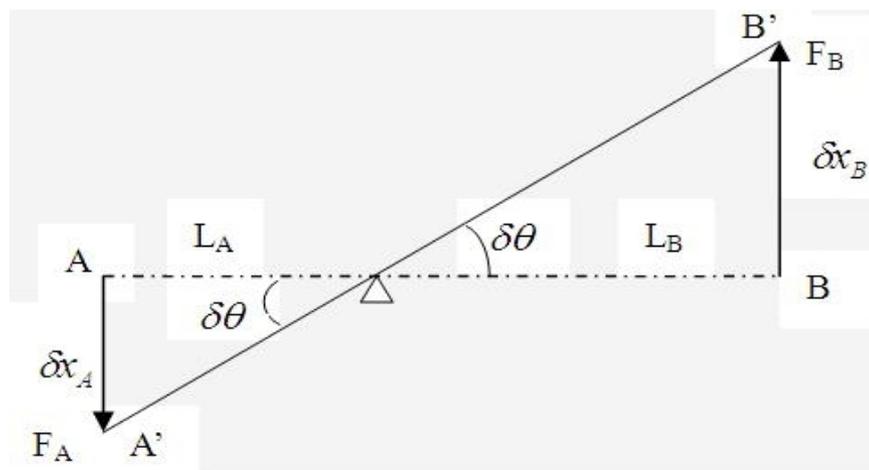
$$\text{即： } F_A L_A \delta\theta + F_B L_B \delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_A L_A + F_B L_B = 0$$

$$\Rightarrow F_B = -\frac{L_A}{L_B} F_A$$

当 $F_A$ 取向下为正值时， $F_B$ 为负值。

由于 $F_B$ 的正方向规定为向上，所以 $F_B$ 实际朝下。



- 假定关节无摩擦，并忽略各杆件的重力，现利用虚功原理推导机器人手部端点力  $F$  与关节力矩  $\tau$  的关系。

若关节虚位移为  $\delta q_i$ ，末端执行器的虚位移为  $\delta X$ ，即：

$$\begin{cases} \delta X = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} \\ \delta q = [\delta q_1 \quad \delta q_2 \quad \dots \quad \delta q_n]^T \end{cases}$$

式中： $d = [d_x, d_y, d_z]^T$ 、  
 $\delta = [\delta \varphi_x, \delta \varphi_y, \delta \varphi_z]^T$   
 分别对应于末端执行器的  
 线虚位移和角虚位移；

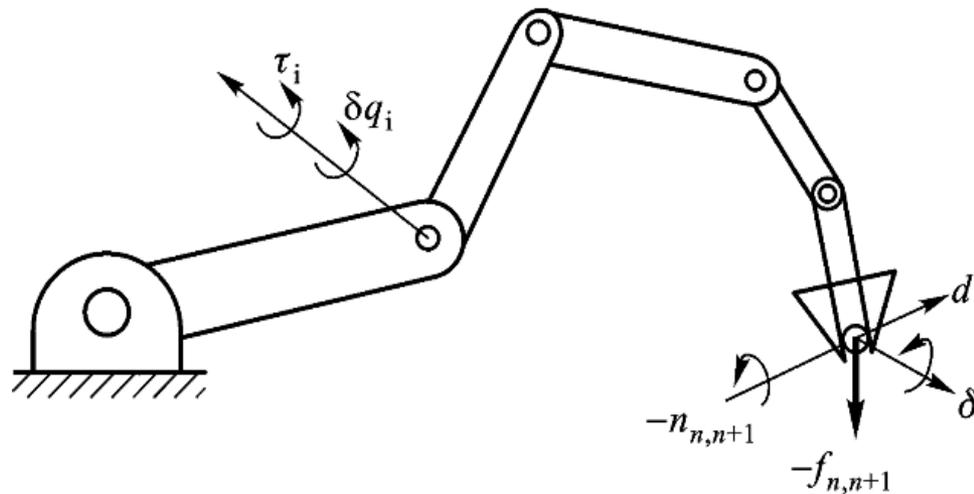


图6.2 末端执行器及各关节的虚位移

$\delta q$  为由各关节虚位移  $\delta q_i$  组成的机器人关节虚位移矢量。

- 假设发生上述虚位移时，各关节力矩为  $\tau_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，环境作用在机器人手部端点上的力和力矩分别为  $-f_{n, n+1}$  和  $-n_{n, n+1}$ 。由上述力和力矩所作的虚功可以由下式求出：

$$\delta W = \tau_1 \delta q_1 + \tau_2 \delta q_2 + \dots + \tau_n \delta q_n - f_{n, n+1} \delta d - n_{n, n+1} \delta$$

或写成

$$\delta W = \tau^T \delta q - F^T \delta X$$

根据虚位移原理，机器人处于平衡状态的充分必要条件是对任意符合几何约束的虚位移有  $\delta W=0$ ，并注意到虚位移  $\delta q$  和  $\delta X$  之间符合杆件的几何约束条件。利用式  $\delta X=J \delta q$

$$\delta W = \tau^T \delta q - F^T J \delta q = (\tau - J^T F) \delta q$$

式中， $\delta q$  表示从几何结构上允许位移的关节独立变量。

对任意的 $\delta q$ ，欲使 $\delta W = 0$ 恒成立，必有：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T \boldsymbol{F} \quad (6-1)$$

上式表示了静态平衡状态下，手部端点力 $\boldsymbol{F}$ 和广义关节力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 之间的线性映射关系。 $\boldsymbol{J}^T$ 与手部端点力 $\boldsymbol{F}$ 和广义关节力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 之间的力传递有关，称为**机器人力雅可比**。

显然，**机器人力雅可比** $\boldsymbol{J}^T$ 是**速度雅可比** $\boldsymbol{J}$ 的转置矩阵。

### 6.1.3 机器人静力计算

机器人操作臂静力计算可分为两类问题：

- (1) 已知外界环境对机器人手部的作用力  $F'$ ，利用式 (2.20) 求相应的满足静力平衡条件的关节驱动力矩  $\tau$ 。
- (2) 已知关节驱动力矩  $\tau$ ，确定机器人手部对外界环境的作用力或负载的质量。

第二类问题是第一类问题的逆解。逆解的关系式为：

$$F = (J^T)^{-1} \tau$$

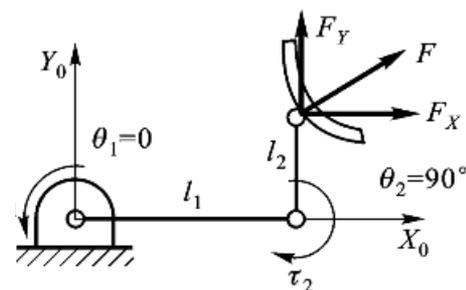
机器人的自由度不是6时，例如  $n > 6$  时，力雅可比矩阵就不是方阵，则  $J^T$  就没有逆解。所以，对第二类问题的求解就困难得多，一般情况不一定能得到惟一的解。如果  $F$  的维数比  $\tau$  的维数低，且  $J$  满秩，则可利用最小二乘法求得  $F$  的估计值。

例：对于2自由度机械手（如图所示），当其关节处于红线所示状态时，若要产生手爪力 $F_A = [f_x, 0]^T$ 和 $F_B = [0, f_y]^T$ 时，求关节1和2所需的关节力矩 $\tau_A$ 和 $\tau_B$ 。

解：由图可知：

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$



(b) 机械手受力图

即：

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

因此：

$$\begin{aligned} \tau_A = J^T F &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 f_x \\ -l_2 f_x \end{bmatrix} \\ \tau_B = J^T F &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可以看出：驱动力的大小为手爪力的大小和手爪到作用线距离的乘积。

## 6.2 机器人动力学分析

机器人的运动是通过在关节轴上施加驱动力来实现的。机器人运动与驱动力的关系称为机器人动力学，是本章要讨论的主要问题。

机器人动力学问题分为两类：

一类是已知作用在机器人上驱动力随时间的变规律，求机器人的运动规律（位置、速度和加速度轨迹），称为机器人正动力学问题；

另一类是已知机器人随时间的运动规律，求期望的驱动力，称为机器人逆动力学问题。

## 6.2 机器人动力学分析

机器人动力学的研究有牛顿-欧拉 (Newton-Euler) 法、拉格朗日 (Lagrange) 法、高斯 (Gauss) 法、凯恩 (Kane) 法及罗伯逊-魏登堡 (Roberson-Wittenburg) 法等。本节介绍动力学研究常用的**牛顿-欧拉方程**和**拉格朗日方程**。

**牛顿-欧拉法**：利用牛顿力学的刚体力学知识导出逆动力学递推公式，再归纳出相应的链式规则。

**拉格朗日法**：引入拉格朗日方程直接获得机器人动力学方程解析公式。

其中拉格朗日法运算量最大，牛顿欧拉法次之，凯恩法运算量最小，效率最高。

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

### ■刚体直线运动

质量为 $m$ 的质点，其在直线上运动的动力学问题可以用牛顿第二定律描述：

$$m\ddot{x} = f \quad \text{或者} \quad m\ddot{z} = f$$

### ■刚体定轴转动与惯性矩

刚体定轴转动微分方程：

$$I\ddot{\alpha} = \tau$$

其中 $I$ 称为绕固定轴的惯性矩（也称为转动惯量）， $\tau$ 是作用在固定轴上的合外力矩。

比较上面两式可以发现，刚体定轴转动和质点的直线运动的动力学方程的形式是完全相同的。因此， $I$ 可以看成刚体定轴转动的惯性质量。

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

下面以图6.2所示质量为 $M$ 半径为 $R$ 的均匀圆盘绕过圆心的 $Z$ 轴的惯性矩计算问题给出惯性矩的定义：

$$I = \int_V r^2 dm$$

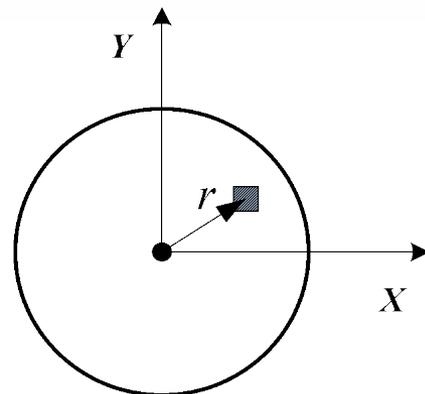


图6.2 圆盘绕过圆心轴惯性矩

上式给出了任意刚体绕固定轴惯性矩的定义，其中 $dm$ 是微元体质量， $r$ 是微元体到转轴的距离， $V$ 是刚体的体积，因此上式表示在整个体积上的积分。

对于图6.2所示均匀圆盘，面密度 $\rho = M/(\pi R^2)$ ，取极坐标微元体，则：

$$I = \int_V r^2 dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho g r dr d\theta = 2\pi\rho \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} g \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

例如图6.3所示匀质杆，质量为 $M$ ，杆长为 $L$ ，计算绕质心的惯性矩。

解：匀质杆的线密度 $\rho=M/L$ ，取微元体 $dx$ ，则：

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = 2 \int_0^{L/2} x^2 \rho dx = 2\rho \frac{(L/2)^3}{3} \\ &= 2 \frac{M}{L} \frac{L^3}{3 \times 8} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

**注意：**上面讨论的都是以刚体质心为中心的惯性矩。

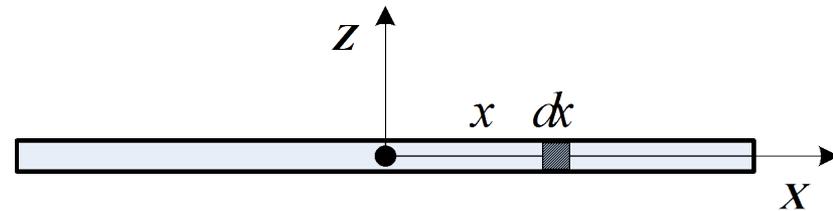


图6.3 匀质杆绕质心惯性矩

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

### ■刚体的惯性张量

对于在三维空间自由运动的刚体，存在无穷多个可能转轴，计算绕所有转轴的惯性矩显然是不现实的。

因此需要考虑这样的问题：是否存在一个量，它能够表示刚体绕任意转轴的惯性矩？

答案是肯定的，该量就是刚体的惯性张量。它描述了刚体的三维质量分布，若惯性张量在某坐标系 $\{A\}$ 下为 ${}^A I$ ，则：

$${}^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

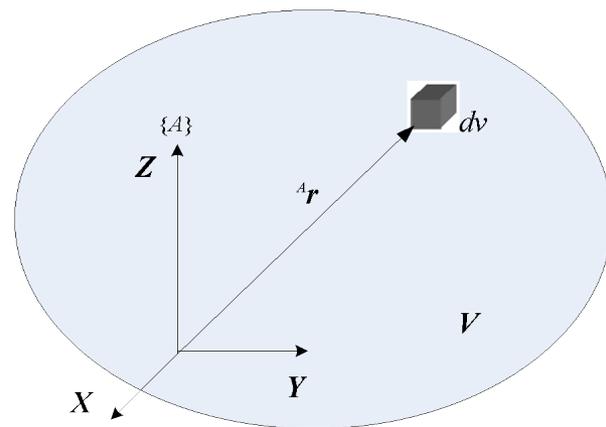


图 空间刚体的惯性张量

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

惯性张量是一个对称矩阵，各元素的值为：

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_V (y^2 + z^2) \rho dv & I_{xy} &= \int_V xy \rho dv \\
 I_{yy} &= \int_V (x^2 + z^2) \rho dv & I_{xz} &= \int_V xz \rho dv \\
 I_{zz} &= \int_V (x^2 + y^2) \rho dv & I_{yz} &= \int_V yz \rho dv
 \end{aligned} \tag{6-2}$$

其中 $dv$ 表示单元体， $\rho$ 表示单元体密度，单元体的位置 ${}^A r = [x \ y \ z]^T$ 。

惯性张量中 $I_{xx}$ ， $I_{yy}$ 和 $I_{zz}$ 称为惯性矩，交叉项 $I_{xy}$ ， $I_{xz}$ 和 $I_{yz}$ 称为惯性积。

惯性张量中元素的数值与坐标系的选择有关，一般存在某个坐标系，使得交叉项全为0。称其坐标轴为惯性主轴，该坐标系称为惯性主轴坐标系。

对于质量均匀分布的规则物体，惯性主轴就是物体的对称轴。

### 6.2.1 牛顿-欧拉方程

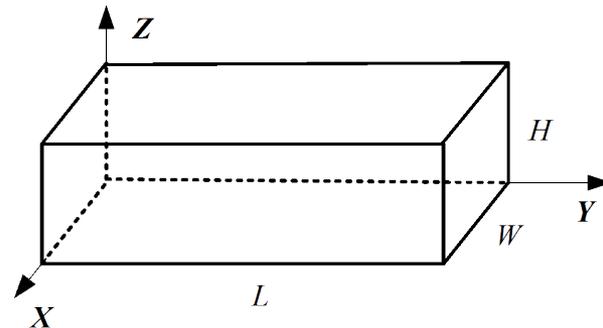
例 如图6.4所示质量均匀分布的长方形刚体，密度为 $\rho$ ，质量为 $M$ ，计算其惯性张量。

解：单元体 $dv=dx dy dz$ ，根据（6-2）得：

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V (y^2 + z^2) \rho dv = \rho \int_0^H \int_0^L \int_0^W (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \rho W \int_0^H \int_0^L (y^2 + z^2) dy dz = \rho W \int_0^H (L^3 / 3 + Lz^2) dz \\ &= \rho W \left( \frac{HL^3}{3} + \frac{LH^3}{3} \right) = \frac{M}{3} (L^2 + H^2) \end{aligned}$$

同理可以得到另外两个惯性矩：

$$I_{yy} = \frac{M}{3} (W^2 + H^2), \quad I_{zz} = \frac{M}{3} (W^2 + L^2)$$



## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

下面计算惯性积：

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_V xy\rho dv = \rho \int_0^H \int_0^L \int_0^W xy dx dy dz = \rho \int_0^H \int_0^L yW^2 / 2 dy dz \\ &= \frac{\rho W^2 L^2}{4} \int_0^H dz = \frac{\rho W^2 L^2 H}{4} = \frac{M}{4} WL \end{aligned}$$

同理可以得到另外两个惯性积：

$$I_{xz} = \frac{M}{4} WH, \quad I_{yz} = \frac{M}{4} HL$$

因此，长方形刚体的惯性张量  $I$  为：

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(W^2 + L^2)/3 & -MWL/4 & -MWH/4 \\ -MWL/4 & M(W^2 + H^2)/3 & -MHL/4 \\ -MWH/4 & -MHL/4 & M(H^2 + L^2)/3 \end{bmatrix}$$

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

### ■ 平行移轴定理

假设{C}是以刚体质心为原点的坐标系，{A}为任意平移后的坐标系，则刚体在两坐标系间的惯性矩和惯性积为：

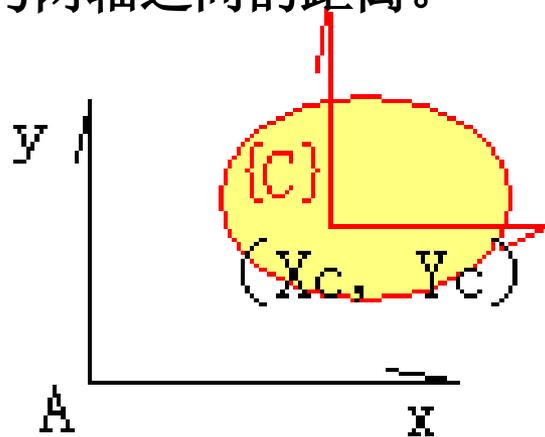
$${}^A I = {}^C I + m(P_C^T P_C I_3 - P_C P_C^T)$$

即：

$$\begin{cases} {}^A I_{zz} = {}^C I_{zz} + m(x_C^2 + y_C^2) \\ {}^A I_{xy} = {}^C I_{xy} - m x_C y_C \end{cases}$$

其它的惯性矩和惯性积可通过交换x、y、z的顺序得到。其中， ${}^C I$ 表示刚体绕质心轴的惯性矩， $m$ 为刚体质量， $d$ 为两轴之间的距离。

若已知刚体绕质心轴的惯性矩，则刚体绕任意平行轴的惯性矩可以非常方便地利用平行移轴定理进行计算。



## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

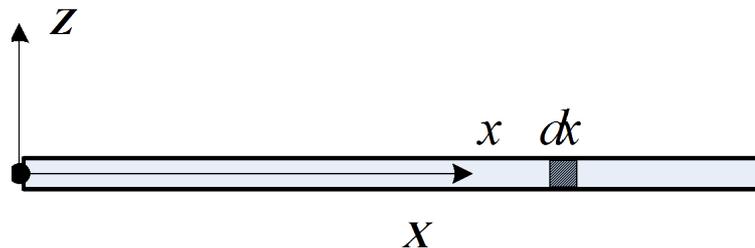
### ■ 平行移轴定理

例如，计算下图所示匀质杆绕杆端点的惯性矩

解：根据平行移轴定理，

$$I = {}^c I + Md^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

可以验证，与采用积分方法计算的结果相同。



### 6.2.1 牛顿-欧拉方程

例 如图6-4所示质量均匀分布的长方形刚体在质心坐标系（原点位于质心，坐标系姿态与原坐标系姿态相同）下表示的惯性张量。

解：根据平行移轴定理计算，其中：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W \\ L \\ H \end{bmatrix}$$

因此得，

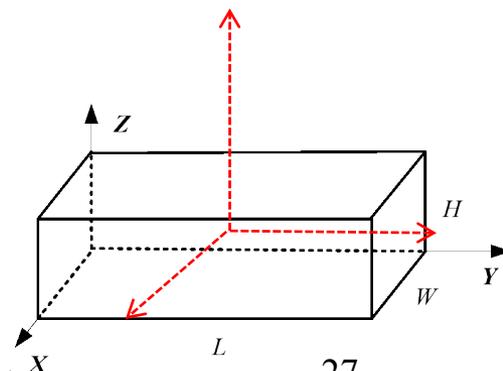
$${}^C I_{zz} = {}^A I_{zz} - M(x_c^2 + y_c^2) = \frac{M}{3}(L^2 + W^2) - M\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{W}{2}\right)^2\right] = \frac{M}{12}(L^2 + W^2)$$

$${}^C I_{xy} = {}^A I_{xy} - M(x_c y_c) = \frac{M}{4}WL - M\left(\frac{L}{2} \times \frac{W}{2}\right) = 0$$

其它四个值可以采用类似的方法获得。

因此，在质心坐标系{C}下，刚体的惯性张量为：

$${}^C I = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} H^2 + L^2 & 0 & 0 \\ 0 & W^2 + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 + W^2 \end{bmatrix}$$



结果是对角矩阵，此时坐标系{C}的坐标轴是刚体的惯性主轴。

## 6.2.1 牛顿-欧拉方程

我们知道：刚体的运动=质心的平动+绕质心的转动

其中，质心平动涉及直线运动，包含**速度、加速度**；

绕质心的转动涉及转动，包含**角速度、角加速度**。

应用牛顿-欧拉方程建立机器人机构的动力学方程是指：研究构件质心的运动使用牛顿方程，研究相对于构件质心的转动使用欧拉方程。

牛顿-欧拉方程表征了力、力矩、惯性张量和加速度之间的关系。

### 6.2.1 牛顿-欧拉方程

质量为 $m$ 、质心在 $C$ 点的刚体，作用在其质心的力 $F$ 的大小与质心加速度 $\dot{v}_c$ 的关系

$$F = M\dot{v}_c \quad (6-3)$$

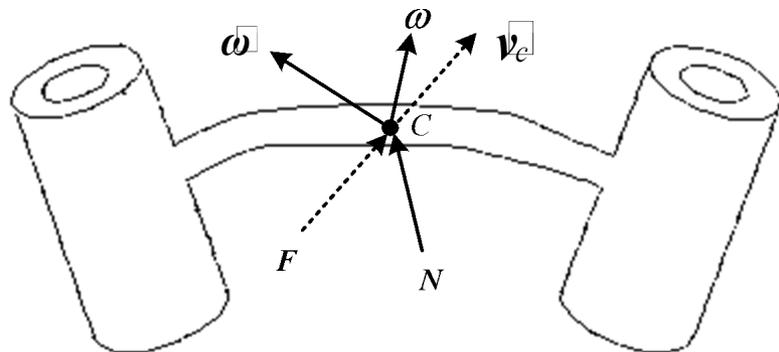
其中 $M$ 表示刚体质量， $F$ 表示作用在刚体上的合外力矢量， $\dot{v}_c$ 表示质心速度矢量，上式称为牛顿方程。

欲使刚体得到角速度为 $\omega$ 、角加速度为 $\dot{\omega}$ 的转动，则作用在刚体上力矩 $N$ 的大小为

$$N = {}^C I \dot{\omega} + \omega \times {}^C I \omega \quad (6-4)$$

式中： $N$ 、 $\omega$ 、 $\dot{\omega}$ 均为三维矢量； ${}^C I$ 为刚体相对于原点通过质心 $C$ 并与刚体固结的刚体坐标系的惯性张量，上式称为欧拉方程。

式(6-3)和(6-4)一起称为刚体的牛顿-欧拉方程。分析机械臂的动力学问题时，首先对每个连杆列出牛顿-欧拉方程，同时需要分析连杆间的速度、加速度传递关系以及力的传递关系。



## 机器人的杆件的速度和加速度

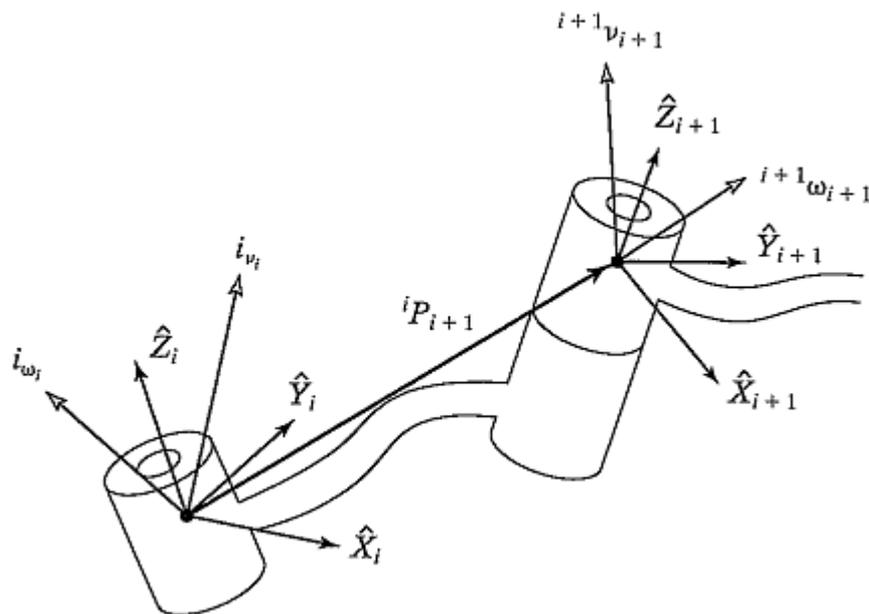
### 基本思路:

已知基座速度和各关节的相对速度，从基座速度开始，一步一步递推出末端执行器的速度。

# 机器人的杆件的速度

机器人杆件的速度包括线速度和角速度，下面介绍如何从*i*杆件的速度递推计算*i+1*杆件的线速度和角速度。

如图所示，设已知*i*杆件的速度为 $\omega_i$ 和 $v_i$ ，*i+1*杆件绕 $Z_{i+1}$ 轴旋转的角速度为 $\dot{\theta}_{i+1}$ 。



# 机器人的杆件的速度

则：在  $\{i+1\}$  坐标系中表示的  $i+1$  杆件杆的角速度为：

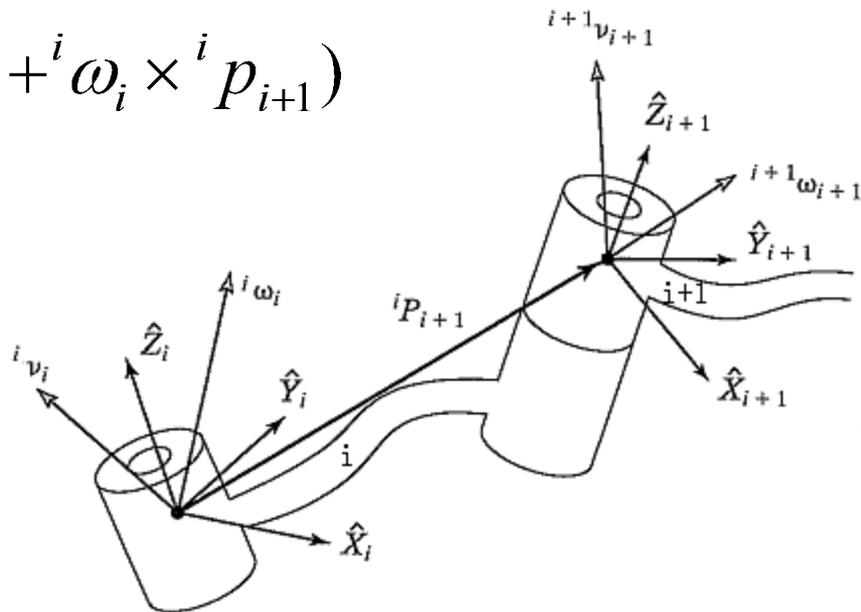
在  $\{i+1\}$  中表示的  
 $i+1$  杆的角速度

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i R^{i+1} \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \hat{Z}_{i+1}$$

在  $\{i+1\}$  坐标系中表示的  $i+1$  坐标系原点的线速度为：

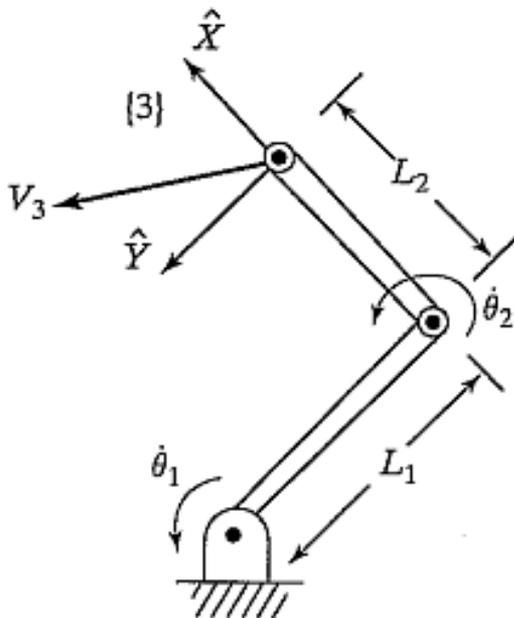
$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^i R^{i+1} ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i p_{i+1})$$

其中， ${}^i p_{i+1}$  是在  $\{i\}$  中表示的指向  $\{i+1\}$  原点的距离。



## 机器人的杆件的速度

例 一两杆关节机器人如图所示，计算以关节速度为函数的指尖处的速度。



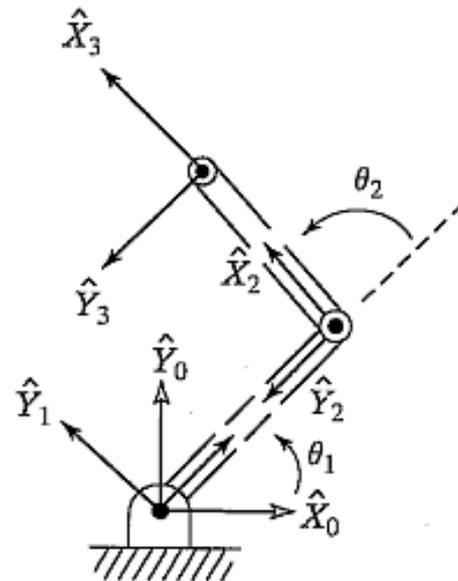
# 机器人的杆件的速度

解：1、建立坐标系，如图：  
2、求位姿矩阵：

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & l_1 \\ s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# 机器人的杆件的速度

得:

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad {}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1杆在{1}中表示的速度

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad {}^2v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\omega_3 = {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad {}^3v_3 = R_{23} \left[ \begin{bmatrix} l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1c_2\dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 机器人的杆件的速度

如果在基座坐标系中表示，仅需乘以 $R_{03}$ 。

$${}^0_3R = {}^0_1R {}^1_2R {}^2_3R = \begin{bmatrix} c12 & -s12 & 0 \\ s12 & c12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则：

$${}^0\omega_3 = {}^3\omega_3$$

$${}^0v_3 = {}^0_3R {}^3v_3 = \begin{bmatrix} -l_1s1\dot{\theta}_1 - l_2s12(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1c1\dot{\theta}_1 + l_2c12(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 机器人的杆件的速度

例2、试求例1中两杆关节机器人的雅克比矩阵。

解：由例1知：

$${}^3\omega_3 = {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad {}^3v_3 = \begin{bmatrix} l_1 s 2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c 2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{则：} \quad {}^3v = \begin{bmatrix} {}^3v_3 \\ {}^3\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s 2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c 2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 s 2 & 0 \\ l_1 c 2 + l_2 & l_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = {}^3J \dot{\theta}$$

## 机器人的杆件的速度

雅克比矩阵的行数等于笛卡尔空间自由度，列数等于机器人的关节数。

同理，我们可以求相对基座坐标系的雅克比矩阵。

$${}^0v_3 = {}^0R^3 v_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s1 \dot{\theta}_1 - l_2 s12 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c1 \dot{\theta}_1 + l_2 c12 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以：

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s1 - l_2 s12 & -l_2 s12 \\ l_1 c1 + l_2 c12 & l_2 c12 \end{bmatrix}$$

## 机器人的杆件的加速度

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}_i^{i+1}R ({}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i p_{i+1})$$



$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^i\dot{\omega}_i + {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}_i^{i+1}R [ {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ( {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1} ) + {}^i\dot{v}_i ]$$

$${}^i\dot{v}_{C_i} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{C_i} + {}^i\omega_i \times ( {}^i\omega_i \times {}^i P_{C_i} ) + {}^i\dot{v}_i$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/905110022331011131>