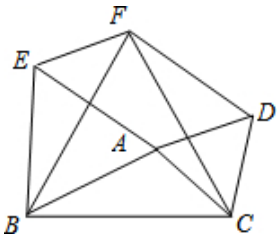
培优专题 02　四边形压轴题综合

01 中考直击

本考点是中考五星高频考点，难度中等及中等偏上，在全国各地市的中考试卷中都有考查。

（2022 年攀枝花中考试卷第 16 题）如图，以△*ABC* 的三边为边在 *BC* 上方分别作等边△*ACD*、△*ABE*、△*BCF*．且点 *A* 在△*BCF* 内部．给出以下结论：①四边形 *ADFE* 是平行四边形；②当∠*BAC*＝150°时，四边形 *ADFE* 是矩形；③当 *AB*＝*AC* 时，四边形 *ADFE* 是菱形；④当 *AB*＝*AC*，且∠*BAC*＝150°时，四边形 *ADFE* 是正方形．其中正确结论有 _____（填上所有正确结论的序号）．



【考点】正方形的判定；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质；平行四边形的判定与性质；菱形的判定与性质；矩形的判定与性质．

【分析】①利用 *SAS* 证明△*EFB*≌△*ACB*，得出 *EF*＝*AC*＝*AD*；同理由△*CDF*≌△*CAB*，得 *DF*＝*AB*＝*AE*；根据两边分别相等的四边形是平行四边形得出四边形 *ADFE* 是平行四边形，即可判断结论①正确；

②当∠*BAC*＝150°时，求出∠*EAD*＝90°，根据有一个角是 90°的平行四边形是矩形即可判断结论②正确；

③先证明 *AE*＝*AD*，根据一组邻边相等的平行四边形是菱形即可判断结论③正确；

④根据正方形的判定：既是菱形，又是矩形的四边形是正方形即可判断结论④正确．

【解答】解：①∵△*ABE*、△*CBF* 是等边三角形，

∴*BE*＝*AB*，*BF*＝*CB*，∠*EBA*＝∠*FBC*＝60°；

∴∠*EBF*＝∠*ABC*＝60°－∠*ABF*；

∴△*EFB*≌△*ACB*（*SAS*）；

∴*EF*＝*AC*＝*AD*；

同理由△*CDF*≌△*CAB*，得 *DF*＝*AB*＝*AE*；

由 *AE*＝*DF*，*AD*＝*EF* 即可得出四边形 *ADFE* 是平行四边形，故结论①正确；

②当∠*BAC*＝150°时，∠*EAD*＝360°－∠*BAE*－∠*BAC*－∠*CAD*＝360°－60°－150°－60°＝90°，

由①知四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

∴平行四边形 $ADFE$ 是矩形，故结论②正确；

③由①知 $AB=AE$，$AC=AD$，四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

∴当 $AB=AC$ 时，$AE=AD$，

∴平行四边形 $AEFD$ 是菱形，故结论③正确；

④综合②③的结论知：当 $AB=AC$，且 $\angle BAC=150°$ 时，四边形 $AEFD$ 既是菱形，又是矩形，

∴四边形 $AEFD$ 是正方形，故结论④正确．

故答案为：①②③④．

【点评】本题考查了平行四边形及矩形、菱形、正方形的判定，等边三角形的性质，全等三角形的判定与性质，熟练掌握特殊四边形的判定方法和性质是解答此题的关键．

02 教材方位

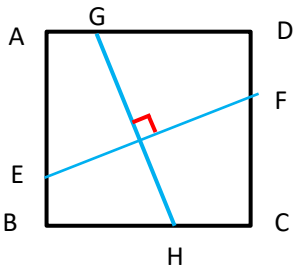
特殊四边形综合题是中考数学中的一大重点，也是一大难点。

本考点是中考五星高频考点，难度中等或较大，个别还会以压轴题出现，在全国各地市的中考试卷中均有考查。

03 技法指引

正方形常见模型：

①正方形的“十字架”模型



如图，正方形 ABCD 中，E、F 在其左右两对边上，G、H 在其上下两对边上.

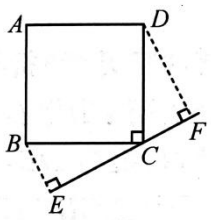
若有 EF⊥GH，则必有 EF=GH.

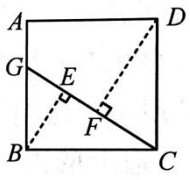
证明方法：构造全等；

逆向应用：**见“十字架”想直角三角形全等**

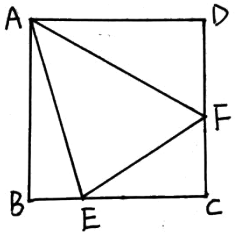
②正方形中的“三垂定理”模型

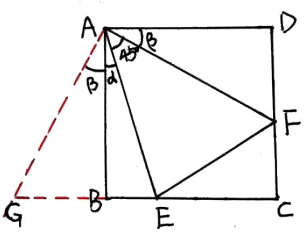
如图，已知正方形 ABCD，过点 B、D 两点分别向过点 C 的直线作垂线，垂足分别为 E、F，则有△BCE≌△CDF





③正方形半角模型





条件：①正方形 ABCD，②∠EAF=45°

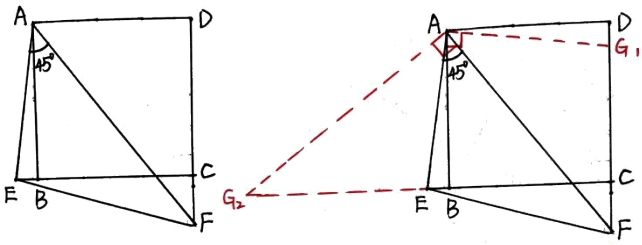
结论：

①EF=BE+DF；(△CEF 的周长=正方形 ABCD 周长的一半)

②EA 平分∠BEF

③FA 平分∠DAE

☆：当∠EAF 旋转到正方形 ABCD 外部时，则有：



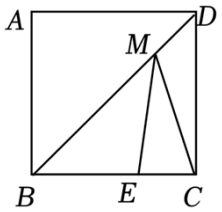
条件：①正方形 ABCD；②∠EAF=45°

结论：EF=DF-BE

04 好题演练

【中考真题练】

1.（2022•德州）如图，正方形 *ABCD* 的边长为 6，点 *E* 在 *BC* 上，*CE*＝2．点 *M* 是对角线 *BD* 上的一个动点，则 *EM*+*CM* 的最小值是（　　）



A．$6\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{13}$　　D．$4\sqrt{13}$

【分析】要求 *ME*+*MC* 的最小值，*ME*、*MC* 不能直接求，可考虑通过作辅助线转化 *ME*，*MC* 的值，从而找出其最小值求解．

【解答】解：如图，连接 *AE* 交 *BD* 于 *M* 点，

∵*A*、*C* 关于 *BD* 对称，

∴*AE* 就是 *ME*+*MC* 的最小值，

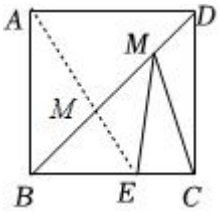
∵正方形 *ABCD* 中，点 *E* 是 *BC* 上的一定点，且 *BE*＝*BC* - *CE*＝6 - 2＝4，

∵$AB=\sqrt{6^2+4^2}$，

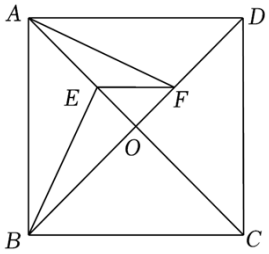
∴$AE=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，

∴*ME*+*MC* 的最小值是 $2\sqrt{13}$．

故选：*C*．



2．（2022•重庆）如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O．E、F 分别为 AC、BD 上一点，且 $OE=OF$，连接 AF，BE，EF．若 $\angle AFE=25°$，则 $\angle CBE$ 的度数为（　　）



A．50°　　B．55°　　C．65°　　D．70°

【分析】利用正方形的对角线互相垂直平分且相等，等腰直角三角形的性质，三角形的内角和定理和全等三角形的判定与性质解答即可．

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle AOB=\angle AOD=90°$，$OA=OB=OD=OC$．

∵$OE=OF$，

∴$\triangle OEF$ 为等腰直角三角形，

∴$\angle OEF=\angle OFE=45°$，

∵$\angle AFE=25°$，

∴$\angle AFO=\angle AFE+\angle OFE=70°$，

∴$\angle FAO=20°$．

在$\triangle AOF$ 和$\triangle BOE$ 中，

$$\begin{cases} OA=OB \\ \angle AOF=\angle BOE=90° \\ OF=OE \end{cases}$$

∴$\triangle AOF\cong\triangle BOE$（$SAS$）．

∴$\angle FAO=\angle EBO=20°$，

∵$OB=OC$，

∴$\triangle OBC$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle OBC=\angle OCB=45°$，

∴$\angle CBE=\angle EBO+\angle OBC=65°$．

故选：C.

3．（2022•湖北）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB<BC$，连接 AC，分别以点 A，C 为圆心，大于$\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧，两弧交于点 M，N，直线 MN 分别交 AD，BC 于点 E，F．下列结论：

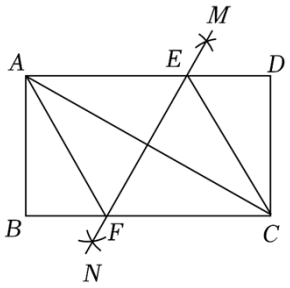
①四边形 $AECF$ 是菱形；

②$\angle AFB=2\angle ACB$；

③$AC\cdot EF=CF\cdot CD$；

④若 AF 平分 $\angle BAC$，则 $CF=2BF$．

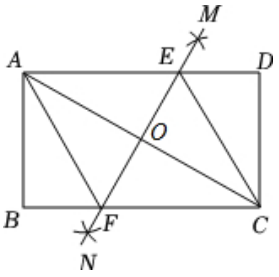
其中正确结论的个数是（　　）



A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【分析】根据题意分别证明各个结论来判断即可．

【解答】解：根据题意知，EF 垂直平分 AC，



在△AOE 和△COF 中，

$$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO\\ AO=CO\\ \angle AOE=\angle COF=90^\circ\end{cases},$$

∴△AOE≌△COF（ASA），

∴$OE=OF$，

∴$AE=AF=CF=CE$，

即四边形 $AECF$ 是菱形，

故①结论正确；

∵$\angle AFB=\angle FAO+\angle ACB$，$AF=FC$，

∴∠FAO=∠ACB，

∴∠AFB=2∠ACB，

故②结论正确；

∵$S_{四边形AECF}$=CF•CD=$\frac{1}{2}$$AC$•$OE$×2=$\frac{1}{2}$$AC$•$EF$，

故③结论不正确；

若AF平分∠BAC，则∠BAF=∠FAC=∠CAD=$\frac{1}{3}$×90°=30°，

∴AF=2BF，

∵CF=AF，

∴CF=2BF，

故④结论正确；

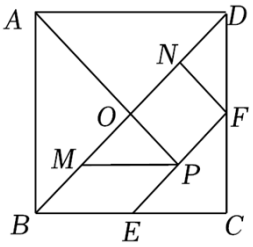
故选：B.

4.（2022•随州）七巧板是一种古老的中国传统智力玩具，如图，在正方形纸板$ABCD$中，BD为对角线，E，F分别为BC，CD的中点，AP⊥EF分别交BD，EF于O，P两点，M，N分别为BO，DO的中点，连接MP，NF，沿图中实线剪开即可得到一副七巧板．则在剪开之前，关于该图形，下列说法正确的有（　　）

①图中的三角形都是等腰直角三角形；

②四边形$MPEB$是菱形；

③四边形$PFDM$的面积占正方形$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$.



A．只有①　　B．①②　　C．①③　　D．②③

【分析】①利用正方形的性质和中位线的性质可以解决问题；

②利用①的结论可以证明OM≠MP解决问题；

③如图，过M作MG⊥BC于G，设AB=BC=x，利用正方形的性质与中位线的性质分别求出BE和MG即可判定是否正确．

【解答】解：①如图，∵E，F分别为BC，CD的中点，

∴EF为△CBD的中位线，

∴EF∥BD，

∵AP⊥EF，

∴AP⊥BD，

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴A、O、P、C 在同一条直线上，

∴△ABC、△ACD、△ABD、△BCD、△OAB、△OAD、△OBC、△OCD、△EFC 都是等腰直角三角形，

∵M，N 分别为 BO，DO 的中点，

∴MP∥BC，NF∥OC，

∴△DNF、△OMP 也是等腰直角三角形．

故①正确；

②根据①得 $OM=BM=\frac{\sqrt{2}}{2}PM$，∴$BM\neq PM$

∴四边形 $MPEB$ 不可能是菱形．故②错误；

③∵E，F 分别为 BC，CD 的中点，

∴EF∥BD，$EF=\frac{1}{2}BD$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，且设 $AB=BC=x$，

∴$BD=\sqrt{2}x$，

∵AP⊥EF，

∴AP⊥BD，

∴$BO=OD$，

∴点 P 在 AC 上，

∴$PE=\frac{1}{2}EF$，

∴$PE=BM$，

∴四边形 $BMPE$ 是平行四边形，

∴$BO=\frac{1}{2}BD$，

∵M 为 BO 的中点，

∴$BM=\frac{1}{4}BD=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，

∵E 为 BC 的中点，

∴$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}x$，

过 M 作 $MG\perp BC$ 于 G，

∴$MG=\frac{\sqrt{2}}{2}BM=\frac{1}{4}x$，

∴四边形 $BMPE$ 的面积$=BE\cdot MG=\frac{1}{8}x^2$，

∴四边形 $BMPE$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{1}{8}$.

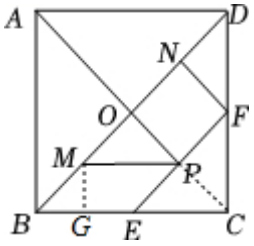
∵E、F 是 BC，CD 的中点，

∴$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle CBD}=\frac{1}{8}S_{四边形ABCD}$，

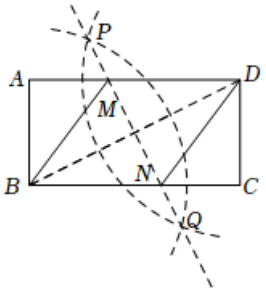
∴四边形 $PFDM$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8})=\frac{1}{4}$.

故③正确.

故选：C.



5.（2022•恩施州）如图，在矩形 $ABCD$ 中，连接 BD，分别以 B、D 为圆心，大于$\frac{1}{2}BD$ 的长为半径画弧，两弧交于 P、Q 两点，作直线 PQ，分别与 AD、BC 交于点 M、N，连接 BM、DN．若 $AD=4$，$AB=2$．则四边形 $MBND$ 的周长为（　　）



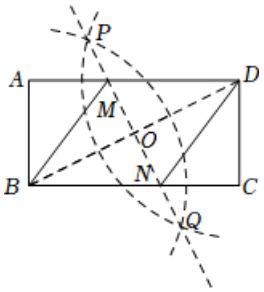
A．$\frac{5}{2}$　　B．5　　C．10　　D．20

【分析】利用作图过程可得 PQ 为 BD 的垂直平分线，利用垂直平分线的性质和全等三角形的判定与性质证明四边形 $MBND$ 为菱形，利用勾股定理求得 BM，则结论可得.

【解答】解：由作图过程可得：PQ 为 BD 的垂直平分线，

∴$BM=MD$，$BN=ND$.

设 PQ 与 BD 交于点 O，如图，



则 $BO=DO$.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD/\!/BC$，

∴$\angle MDO=\angle NBO$，$\angle DMO=\angle BNO$，

在△MDO 和△NBO 中，

$$\begin{cases}\angle MDO=\angle NBO\\ \angle DMO=\angle BNO,\\ OD=OB\end{cases}$$

∴△MDO≌△NBO（AAS），

∴$DM=BN$，

∴四边形 $BNDM$ 为平行四边形，

∵$BM=MD$，

∴四边形 $MBND$ 为菱形，

∴四边形 $MBND$ 的周长$=4BM$.

设 $MB=x$，则 $MD=BM=x$，

∴$AM=AD-DM=4-x$，

在 Rt△ABM 中，

∵$AB^2+AM^2=BM^2$，

∴$2^2+(4-x)^2=x^2$，

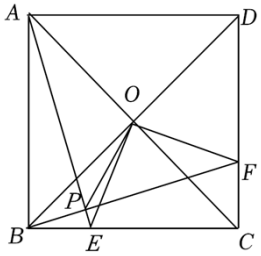
解得：$x=\frac{5}{2}$，

∴四边形 $MBND$ 的周长$=4BM=10$.

故选：C.

6．（2022•黑龙江）如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 F 是 CD 上一点，$OE\perp OF$ 交 BC 于点 E，连接 AE，BF 交于点 P，连接 OP．则下列结论：①$AE\perp BF$；②$\angle OPA=45°$；③$AP-BP$

$=\sqrt{2}OP$；④若 BE：$CE=2$：3，则 $\tan\angle CAE=\frac{4}{7}$；⑤四边形 $OECF$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$．其中正确的结论是（　　）



A．①②④⑤　　B．①②③⑤　　C．①②③④　　D．①③④⑤

【分析】利用全等三角形的判定与性质，正方形的性质，圆周角定理，直角三角形的边角关系定理对每个选项的结论进行判断即可得出结论．

【解答】解：①∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC=CD$，$AC\perp BD$，$\angle ABD=\angle DBC=\angle ACD=45°$．

∴$\angle BOE+\angle EOC=90°$，

∵$OE\perp OF$，

∴$\angle FOC+\angle EOC=90°$．

∴$\angle BOE=\angle COF$．

在△BOE 和△COF 中，

$$\begin{cases}\angle OBE=\angle OCF=45°\\ OB=OC\\ \angle BOE=\angle COF\end{cases}$$，

∴△BOE≌△COF（ASA），

∴$BE=CF$．

在△BAE 和△CBF 中，

$$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABC=\angle BCF=90°\\ BE=CF\end{cases}$$，

∴△BAE≌△CBF（SAS），

∴$\angle BAE=\angle CBF$．

∵$\angle ABP+\angle CBF=90°$，

∴$\angle ABP+\angle BAE=90°$，

∴$\angle APB=90°$．

∴$AE \perp BF$.

∴①的结论正确；

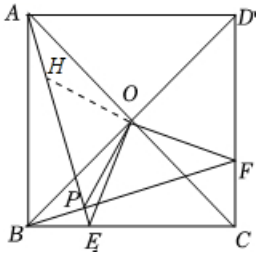
②∵$\angle APB=90°$，$\angle AOB=90°$，

∴点 A，B，P，O 四点共圆，

∴$\angle APO=\angle ABO=45°$，

∴②的结论正确；

③过点 O 作 $OH \perp OP$，交 AP 于点 H，如图，



∵$\angle APO=45°$，$OH \perp OP$，

∴$OH=OP=\frac{\sqrt{2}}{2}HP$，

∴$HP=\sqrt{2}OP$.

∵$OH \perp OP$，

∴$\angle POB+\angle HOB=90°$，

∵$OA \perp OB$，

∴$\angle AOH+\angle HOB=90°$.

∴$\angle AOH=\angle BOP$.

∵$\angle OAH+BAE=45°$，$\angle OBP+\angle CBF=45°$，$\angle BAE=\angle CBF$，

∴$\angle OAH=\angle OBP$.

在△AOH 和△BOP 中，

$$\begin{cases}\angle OAH=\angle OBP\\ OA=OB\\ \angle AOH=\angle BOP\end{cases}$$，

∴△AOH≌△BOP（ASA），

∴$AH=BP$.

∴$AP-BP=AP-AH=HP=\sqrt{2}OP$.

∴③的结论正确；

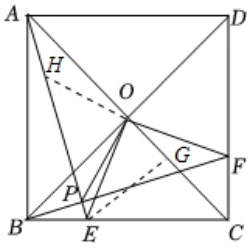
④∵BE：$CE=2$：3，

∴设 $BE=2x$，则 $CE=3x$，

∴$AB=BC=5x$，

∴$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{29}x$.

过点 E 作 $EG\perp AC$ 于点 G，如图，



∵$\angle ACB=45°$，

∴$EG=GC=\frac{\sqrt{2}}{2}EC=\frac{3\sqrt{2}}{2}x$，

∴$AG=\sqrt{AE^2-GE^2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}x$，

在 Rt△AEG 中，

∵$\tan\angle CAE=\frac{EG}{AG}$，

∴$\tan\angle CAE=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}x}{\frac{7\sqrt{2}}{2}x}=\frac{3}{7}$.

∴④的结论不正确；

⑤∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$OA=OB=OC=OD$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=90°$，

∴△OAB≌△OBC≌△OCD≌△DOA（SAS）.

∴$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

∴$S_{\triangle BOE}+S_{\triangle OEC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

由①知：△BOE≌△COF，

∴$S_{\triangle OBE}=S_{\triangle OFC}$，

∴$S_{\triangle OEC}+S_{\triangle OFC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

即四边形 $OECF$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{1}{4}$.

∴⑤的结论正确.

综上，①②③⑤的结论正确．

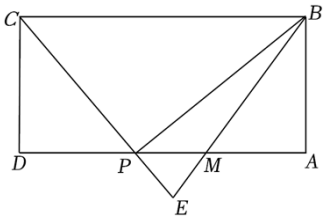
故选：*B*．

7．（2022•绥化）如图，在矩形 *ABCD* 中，*P* 是边 *AD* 上的一个动点，连接 *BP*，*CP*，过点 *B* 作射线，交线段 *CP* 的延长线于点 *E*，交边 *AD* 于点 *M*，且使得∠*ABE*＝∠*CBP*，如果 *AB*＝2，*BC*＝5，*AP*＝*x*，*PM*＝*y*，其中 2＜*x*≤5．则下列结论中，正确的个数为（　　）

（1）*y* 与 *x* 的关系式为 $y=x-\frac{4}{x}$；

（2）当 *AP*＝4 时，△*ABP*∽△*DPC*；

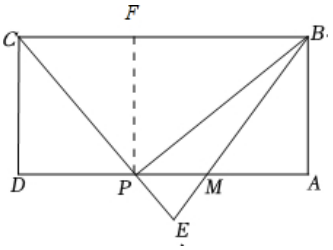
（3）当 *AP*＝4 时，$\tan\angle EBP=\frac{3}{5}$．



A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【分析】利用矩形的性质，相似三角形的判定与性质，直角三角形的边角关系定理，勾股定理，平行线分线段成比例定理对每个选项的结论进行判断即可：（1）过点 *P* 作 *PF*⊥*BC* 于点 *F*，利用矩形的判定与性质和相似三角形的判定与性质解答即可；（2）利用相似三角形的判定定理解答即可；（3）利用（1），（2）的结论利用勾股定理和平行线分线段成比例定理求得 *PB*，*PE*，再利用直角三角形的边角关系定理即可求得结论．

【解答】解：（1）过点 *P* 作 *PF*⊥*BC* 于点 *F*，如图，



∵四边形 *ABCD* 是矩形，*PF*⊥*BC*，

∴四边形 *ABFP* 是矩形，

∴*PF*＝*AB*＝2，*BF*＝*AP*＝*x*，

∴*AM*＝*AP* - *PM*＝*x* - *y*．

∵∠*ABE*＝∠*CBP*，∠*A*＝∠*PFB*＝90°，

∴△*ABM*∽△*FBP*，

∴$\frac{AM}{PF}=\frac{AB}{BF}$，

∴$\frac{x-y}{2}=\frac{2}{x}$.

∴$x^2-xy=4$.

∴$y=x-\frac{4}{x}$.

∴（1）的结论正确；

（2）当 $AP=4$ 时，$DP=AD-AP=5-4=1$，

∵$\frac{AB}{AP}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\frac{DP}{CD}=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{AB}{AP}=\frac{DP}{DC}$.

∵$\angle A=\angle D=90°$，

∴$\triangle ABP\backsim\triangle DPC$.

∴（2）的结论正确；

（3）由（2）知：当 $AP=4$ 时，$\triangle ABP\backsim\triangle DPC$，

∴$\angle ABP=\angle DPC$.

∵$\angle BPA+\angle ABP=90°$，

∴$\angle APB+\angle DPC=90°$.

∴$\angle CPB=90°$.

∴$\angle BPE=90°$.

∴$\tan\angle EBP=\frac{PE}{PB}$.

由（1）知：$PM=AP-\frac{4}{AP}=3$，

$BP=\sqrt{AP^2+AB^2}=2\sqrt{5}$，$CP=\sqrt{CD^2+DP^2}=\sqrt{5}$.

∵$AD/\!/BC$，

∴$\frac{PM}{BC}=\frac{PE}{EC}$.

∴$\frac{3}{5}=\frac{PE}{PE+\sqrt{5}}$，

解得：$PE=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

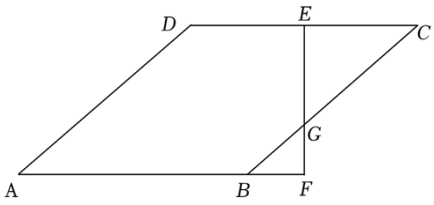
∴$\tan\angle EBP=\frac{PE}{PB}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{4}$，

∴（3）的结论错误，

综上，正确的结论为：（1）（2），

故选：C.

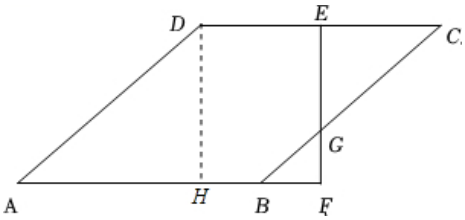
8.（2022•海南）如图，菱形 $ABCD$ 中，点 E 是边 CD 的中点，EF 垂直 AB 交 AB 的延长线于点 F，若 BF：$CE=1$：2，$EF=\sqrt{7}$，则菱形 $ABCD$ 的边长是（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．$\frac{4}{5}\sqrt{7}$

【分析】过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H，则四边形 $DHFE$ 为平行四边形，可得 $HF=DE$，$DH=EF=\sqrt{7}$；设 $BF=x$，则 $CE=2x$，可得 $AH=3x$，利用勾股定理列出方程，解方程即可求解.

【解答】解：过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H，如图，



∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AD=AB=CD$，$AB\parallel CD$.

∵$EF\perp AB$，$DH\perp AB$，

∴$DH\parallel EF$，

∴四边形 $DHFE$ 为平行四边形，

∴$HF=DE$，$DH=EF=\sqrt{7}$.

∵点 E 是边 CD 的中点，

∴$DE=\frac{1}{2}CD$，

∴$HF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB$.

∵BF：$CE=1$：2，

∴设 $BF=x$，则 $CE=2x$，

∴$CD=4x$，$DE=HF=2x$，

$AD=AB=4x$，

$\therefore AF=AB+BF=5x$.

$\therefore AH=AF-HF=3x$.

在 Rt$\triangle ADH$ 中，

$\because DH^2+AH^2=AD^2$，

$\therefore (\sqrt{7})^2+(3x)^2=(4x)^2$.

解得：$x=\pm1$（负数不合题意，舍去），

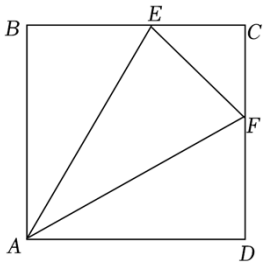
$\therefore x=1$.

$\therefore AB=4x=4$.

即菱形 $ABCD$ 的边长是 4，

故选：B.

9．（2022•海南）如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，$AE=AF$，$\angle EAF=30°$，则$\angle AEB=$ __60__°；若$\triangle AEF$ 的面积等于 1，则 AB 的值是 __$\sqrt{3}$__.



【分析】利用“HL”先说明$\triangle ABE$ 与$\triangle ADF$ 全等，得结论$\angle BAE=\angle DAF$，再利用角的和差关系及三角形的内角和定理求出$\angle AEB$；先利用三角形的面积求出 AE，再利用直角三角形的边角间关系求出 AB.

【解答】解：$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=\angle B=\angle D=90°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 和 Rt$\triangle ADF$ 中，

$\begin{cases}AB=AD\\AE=AF\end{cases}$,

$\therefore$Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle ADF$（HL）.

$\therefore\angle BAE=\angle DAF$.

$\therefore\angle BAE=\frac{1}{2}$（$\angle BAD-\angle EAF$）

$=\frac{1}{2}$（$90°-30°$）

$=30°$.

∴∠AEB=60°．

故答案为：60．

过点 F 作 $FG\perp AE$，垂足为 G．

∵$\sin\angle EAF=\frac{FG}{AF}$，

∴$FG=\sin\angle EAF\times AF$．

∵$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times AE\times FG=\frac{1}{2}\times AE\times AF\times\sin\angle EAF=1$，

∴$\frac{1}{2}\times AE^2\times\sin30°=1$．

即$\frac{1}{2}\times AE^2\times\frac{1}{2}=1$．

∴$AE=2$．

在 Rt△ABE 中，

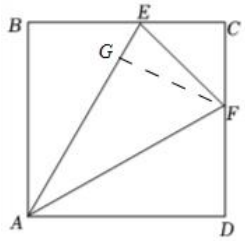
∵$\cos\angle BAE=\frac{AB}{AE}$，

∴$AB=\cos30°\times AE$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2$

$=\sqrt{3}$．

故答案为：$\sqrt{3}$．



10．（2022•河南）综合与实践

综合与实践课上，老师让同学们以“矩形的折叠”为主题开展数学活动．

（1）操作判断

操作一：对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展平；

操作二：在 AD 上选一点 P，沿 BP 折叠，使点 A 落在矩形内部点 M 处，把纸片展平，连接 PM，BM．

根据以上操作，当点 M 在 EF 上时，写出图 1 中一个 30° 的角：<u>∠EMB 或∠CBM 或∠ABP 或∠PBM（任写一个即可）</u>．

（2）迁移探究

小华将矩形纸片换成正方形纸片，继续探究，过程如下：

将正方形纸片 $ABCD$ 按照（1）中的方式操作，并延长 PM 交 CD 于点 Q，连接 BQ.

①如图 2，当点 M 在 EF 上时，$\angle MBQ=$ 15 °，$\angle CBQ=$ 15 °；

②改变点 P 在 AD 上的位置（点 P 不与点 A，D 重合），如图 3，判断 $\angle MBQ$ 与 $\angle CBQ$ 的数量关系，并说明理由.

（3）拓展应用

在（2）的探究中，已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 8cm，当 $FQ=1cm$ 时，直接写出 AP 的长.

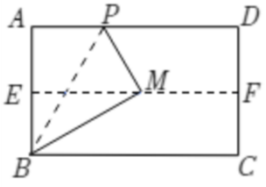


图1

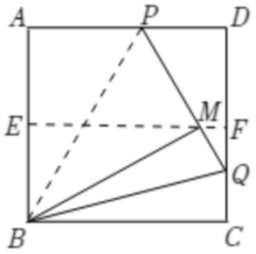


图2

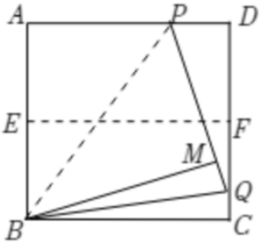


图3

【分析】（1）由折叠的性质可得 $AE=BE=\frac{1}{2}AB$，$\angle AEF=\angle BEF=90°$，$AB=BM$，$\angle ABP=\angle PBM$，由锐角三角函数可求 $\angle EMB=30°$，即可求解；

（2）①由“HL”可证 Rt$\triangle BCQ\cong$Rt$\triangle BMQ$，可得 $\angle CBQ=\angle MBQ=15°$；

②由“HL”可证 Rt$\triangle BCQ\cong$Rt$\triangle BMQ$，可得 $\angle CBQ=\angle MBQ$；

（3）分两种情况讨论，由折叠的性质和勾股定理可求解.

【解答】解：（1）∵对折矩形纸片 $ABCD$，

∴$AE=BE=\frac{1}{2}AB$，$\angle AEF=\angle BEF=90°$，

∵沿 BP 折叠，使点 A 落在矩形内部点 M 处，

∴$AB=BM$，$\angle ABP=\angle PBM$，

∵$\sin\angle BME=\frac{BE}{BM}=\frac{1}{2}$，

∴$\angle EMB=30°$，

∴$\angle ABM=60°$，

∴$\angle CBM=\angle ABP=\angle PBM=30°$，

故答案为：$\angle EMB$ 或 $\angle CBM$ 或 $\angle ABP$ 或 $\angle PBM$（任写一个即可）；

（2）①由（1）可知 $\angle CBM=30°$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle BAD=\angle C=90°$，

由折叠可得：$AB=BM$，$\angle BAD=\angle BMP=90°$，

∴∠BM=BC，∠BMQ=∠C=90°，

又∵BQ=BQ，

∴Rt△BCQ≌Rt△BMQ（HL），

∴∠CBQ=∠MBQ=15°，

故答案为：15，15；

②∠MBQ=∠CBQ，理由如下：

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴AB=BC，∠BAD=∠C=90°，

由折叠可得：AB=BM，∠BAD=∠BMP=90°，

∴BM=BC，∠BMQ=∠C=90°，

又∵BQ=BQ，

∴Rt△BCQ≌Rt△BMQ（HL），

∴∠CBQ=∠MBQ；

（3）由折叠的性质可得 DF=CF=4cm，AP=PM，

∵Rt△BCQ≌Rt△BMQ，

∴CQ=MQ，

当点 Q 在线段 CF 上时，∵FQ=1cm，

∴MQ=CQ=3cm，DQ=5cm，

∵PQ^2=PD^2+DQ^2，

∴（AP+3）^{2}=（8 - AP）^{2}+25，

∴AP=$\frac{40}{11}$，

当点 Q 在线段 DF 上时，∵FQ=1cm，

∴MQ=CQ=5cm，DQ=3cm，

∵PQ^2=PD^2+DQ^2，

∴（AP+5）^{2}=（8 - AP）^{2}+9，

∴AP=$\frac{24}{13}$，

综上所述：AP 的长为$\frac{40}{11}$$cm$ 或$\frac{24}{13}$$cm$.

11.（2022•襄阳）矩形 $ABCD$ 中，$\frac{AB}{BC}=\frac{k}{2}$（$k$>1），点 E 是边 BC 的中点，连接 AE，过点 E 作 AE 的垂线

EF，与矩形的外角平分线 CF 交于点 F.

【特例证明】

（1）如图（1），当 $k=2$ 时，求证：$AE=EF$；

小明不完整的证明过程如下，请你帮他补充完整.

证明：如图，在 BA 上截取 $BH=BE$，连接 EH.

∵$k=2$，

∴$AB=BC$.

∵$\angle B=90°$，$BH=BE$，

∴$\angle 1=\angle 2=45°$，

∴$\angle AHE=180°-\angle 1=135°$.

∵CF 平分$\angle DCG$，$\angle DCG=90°$，

∴$\angle 3=\frac{1}{2}\angle DCG=45°$.

∴$\angle ECF=\angle 3+\angle 4=135°$.

∴……

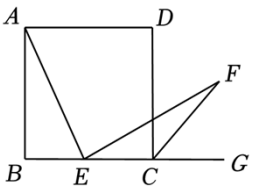
（只需在答题卡对应区域写出剩余证明过程）

【类比探究】

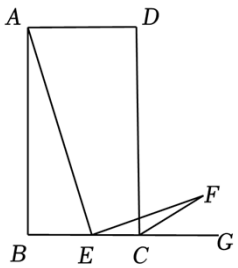
（2）如图（2），当 $k\neq 2$ 时，求$\frac{AE}{EF}$的值（用含 k 的式子表示）；

【拓展运用】

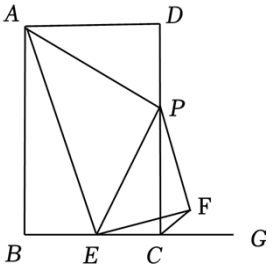
（3）如图（3），当 $k=3$ 时，P 为边 CD 上一点，连接 AP，PF，$\angle PAE=45°$，$PF=\sqrt{5}$，求 BC 的长.



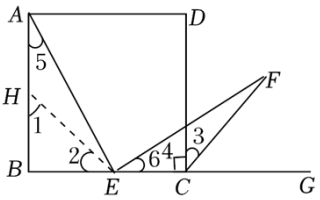
（1）



（2）



（3）



【分析】（1）证明△AHE≌△ECF（ASA）即可；

（2）在 BA 上截取 $BH=BE$，连接 EH．证明△AHE∽△ECF，即可求解；

（3）以 A 为旋转中心，△ADP 绕 A 点旋转 90°到△$AP'H$，设 $AB=3a$，则 $BC=2a$，由 $\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，$\angle EAP=45°$，可得 $\tan\angle DAP=\frac{1}{2}$，从而判断△$APE$ 是等腰直角三角形，过点 F 作 $FQ\perp EG$ 交于 Q，又可得 $\angle FEQ=\angle BAE$，则 $\frac{1}{3}=\frac{FQ}{FQ+a}$，可求 $FQ=\frac{1}{2}a$，$EQ=\frac{3}{2}a$，$EF=\frac{\sqrt{10}}{2}a$，能够证明△PAE∽△FPE，从而得到 $\angle APE=\angle PFE=90°$，则 $PF=EF=\frac{1}{2}\sqrt{10}a=\sqrt{5}$，求出 $a=\sqrt{2}$，即可得 $BC=2\sqrt{2}$．

【解答】（1）证明：如图，在 BA 上截取 $BH=BE$，连接 EH．

∵$k=2$，

∴$AB=BC$．

∵$\angle B=90°$，$BH=BE$，

∴$\angle 1=\angle 2=45°$，

∴$\angle AHE=180°-\angle 1=135°$，

∵CF 平分 $\angle DCG$，$\angle DCG=90°$，

∴$\angle 3=\frac{1}{2}\angle DCG=45°$，

∴$\angle ECF=\angle 3+\angle 4=135°$，

∵$AE\perp EF$，

∴$\angle 6+\angle AEB=90°$，

∵$\angle 5+\angle AEB=90°$，

∴$\angle 5=\angle 6$，

∵$AB=BC$，$BH=BE$，

∴$AH=EC$，

∴△AHE≌△ECF（ASA），

∴$AE=EF$；

（2）解：在 BA 上截取 $BH=BE$，连接 EH．

∵$\angle B=90°$，$BH=BE$，

∴∠BHE=∠BEH=45°，

∴∠AHE=135°，

∵CF 平分∠DCG，∠DCG=90°，

∴∠DCF=$\frac{1}{2}$∠DCG=45°．

∴∠ECF=135°，

∵AE⊥EF，

∴∠FEC+∠AEB=90°，

∵∠BAE+∠AEB=90°，

∴∠BAE=∠FEC，

∴△AHE∽△ECF，

∴$\frac{AE}{EF}$=$\frac{AH}{CE}$，

∵$\frac{AB}{BC}$=$\frac{k}{2}$，E 是 BC 边的中点，

∴EC=HB=$\frac{1}{2}$$BC$，

∴AH=AB - $\frac{1}{2}$$BC$=（$\frac{k}{2}$ - $\frac{1}{2}$）BC，

∴$\frac{AE}{EF}$=k - 1；

（3）如图（2），引例：在正方形 $ABCD$ 中，EG⊥AC，

设 AB=3，BE=1，则 EC=2，

∵∠ACE=45°，

∴EG=GC=$\sqrt{2}$，

∵AC=3$\sqrt{2}$，

∴AG=2$\sqrt{2}$，

∴tan∠EAG=$\frac{1}{2}$，tan∠BAE=$\frac{1}{3}$，

以 A 为旋转中心，△ADP 绕 A 点旋转 90° 到△$AP'H$，

∵k=3，

∴$\frac{AB}{BC}$=$\frac{3}{2}$，

设 AB=3a，则 BC=2a，

由旋转可得∠$P'AP$=90°，

连接 $P'E$，HE，延长 $P'H$ 交 CD 于点 G，连接 EG，

∵$AH=AD=2a$，

∴$BH=a$，

∵E 是 BC 的中点，

∴$BE=a$，

∴$\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，

∵$\angle EAP=45°$，

∴$\angle BAE+\angle DAP=45°$，

∴$\tan\angle DAP=\frac{1}{2}$，

∴$DP=a$，

∴$PC=2a$，

∴$AP=\sqrt{5}a$，$PE=\sqrt{5}a$，$AE=\sqrt{10}a$，

∴$\triangle APE$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle APE=90°$，

∵$AE\perp EF$，

∴$\angle PEF=\angle PEA=45°$，

过点 F 作 $FQ\perp EG$ 交于 Q，

∵CF 平分 $\angle PCG$，

∴$\angle FCQ=45°$，

∵$\angle FEQ+\angle AEB=90°$，$\angle BAE+\angle AEB=90°$，

∴$\angle FEQ=\angle BAE$，

∴$\frac{1}{3}=\frac{FQ}{FQ+a}$，

∴$FQ=\frac{1}{2}a$，

∴$EQ=\frac{3}{2}a$，

∴$EF=\frac{\sqrt{10}}{2}a$，

∴$\frac{PE}{AE}=\frac{EF}{PE}$，

∴$\triangle PAE\backsim\triangle FPE$，

∴∠APE=∠PFE=90°，

∴$PF=EF=\frac{1}{2}\sqrt{10}a$，

∵$PF=\sqrt{5}$，

∴$\frac{1}{2}\sqrt{10}a=\sqrt{5}$，

∴$a=\sqrt{2}$，

∴$BC=2\sqrt{2}$.

解法 2：设 $BE=EC=a$，则 $AE=\sqrt{10}a$，

延长 AP、EF 交于 Q，

∵∠PAE=45°，$AE\perp EF$，

∴△AEQ 是等腰直角三角形，

∴$AE=EQ$，

作 $QM\perp BC$ 交 N，

∵∠AEB+∠QEM=90°，∠AEB+∠BAE=90°，

∴∠BAE=∠QEM，

∵$AE=EQ$，

∴△ABE≌△EMQ（AAS），

∴$EM=AB=3a$，$MC=EM-EC=2a$，

作 $QN\perp CD$ 交 BC 延长线于 M，

∴四边形 $NCMQ$ 是矩形，

∴$QN=CM=AD=2a$，

∵∠APD=∠NPQ，∠D=∠PNQ，

∴△ADP≌△QNP（AAS），

∴$AP=PQ$，

∵$EF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}EQ$，

∴$EF=FQ$，$PF=\frac{1}{2}AE$，

∴$\frac{1}{2}\sqrt{10}a=\sqrt{5}$，

∴$a=\sqrt{2}$，

∴$BC=2\sqrt{2}$.

解法 3：过点 P 作 $PQ\perp AE$ 交于点 Q，过点 Q 作 $MN/\!/AD$ 分别交 AB、CD 于点 M、N，

设 $BE=2x=EC$，则 $AB=6x$，

由△AMQ 与△QNP 全等，

设 $MQ=n$，

∵$\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，

∴$AM=3n=QN$，

∴$n+3n=4x$，

解得 $n=x$，

∴$MQ=x$，$AQ=\sqrt{10}x=PQ$，

∴$QE=AE-QA=\sqrt{10}x$，

由（2）可知，AE：$EF=2$，

∴$EF=\sqrt{10}x$，

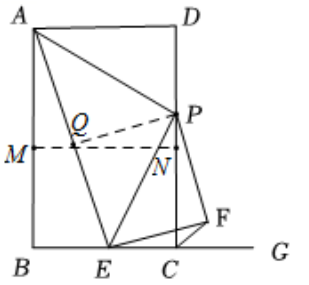
可证得四边形 $QEFP$ 是正方形，

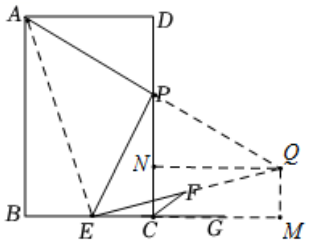
∴$PF=\sqrt{10}x$，

∵$PF=\sqrt{5}$，

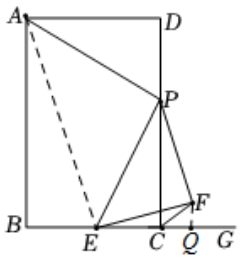
解答 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$BC=4x=2\sqrt{2}$.

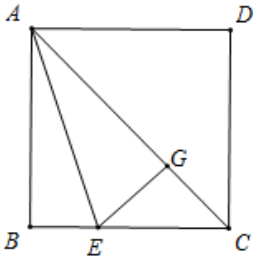




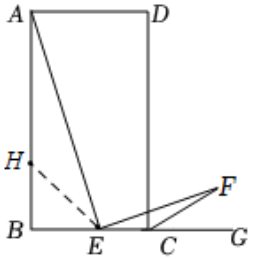
（3）



（3）



图（2）



（2）

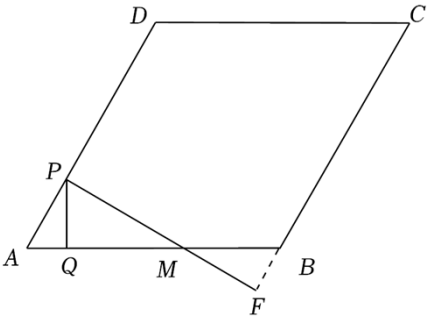
12．（2022•衡阳）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$\angle BAD=60°$，点 P 从点 A 出发，沿线段 AD 以每秒 1 个单位长度的速度向终点 D 运动，过点 P 作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，作 $PM\perp AD$ 交直线 AB 于点 M，交直线 BC 于点 F，设$\triangle PQM$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分图形的面积为 S（平方单位），点 P 运动时间为 t（秒）．

（1）当点 M 与点 B 重合时，求 t 的值；

（2）当 t 为何值时，$\triangle APQ$ 与$\triangle BMF$ 全等；

（3）求 S 与 t 的函数关系式；

（4）以线段 PQ 为边，在 PQ 右侧作等边三角形 PQE，当 $2\leqslant t\leqslant 4$ 时，求点 E 运动路径的长．



【分析】（1）由直角三角形的性质可得出答案；

（2）分两种情况：①当 $0 \leqslant t \leqslant 2$ 时，②当 $2 < t \leqslant 4$ 时，由全等三角形的性质得出关于 t 的方程，解方程可得出答案；

（3）分两种情况：①当 $0 \leqslant t \leqslant 2$ 时，②当 $2 < t \leqslant 4$ 时，由直角三角形的性质及三角形的面积公式可得出答案；

（4）连接 AE，由直角三角形的性质得出 $\angle PAE$ 为定值，则点 E 的运动轨迹为直线，求出 AE 的长，则可得出答案.

【解答】解：（1）M 与 B 重合时，如图 1，

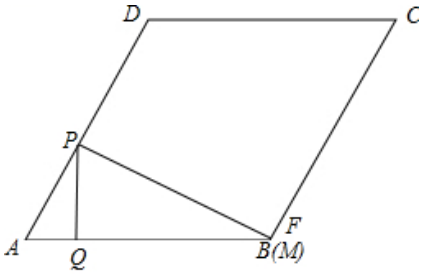


图1

$\because PQ \perp AB$，

$\therefore \angle PQA = 90°$，

$\therefore PA = \frac{1}{2}AB = 2$，

$\therefore t = 2$；

（2）①当 $0 \leqslant t \leqslant 2$ 时，

$\because AM = 2t$，

$\therefore BM = 4 - 2t$，

$\because \triangle APQ \cong \triangle BMF$，

$\therefore AP = BM$，

$\therefore t = 4 - 2t$，

$\therefore t = \frac{4}{3}$；

②当 $2 < t \leqslant 4$ 时，

$\because AM = 2t$，

$\therefore BM = 2t - 4$，

$\because \triangle APQ \cong \triangle BMF$，

$\therefore AP = BM$，

$\therefore t = 2t - 4$，

∴$t=4$；

综上所述，t 的值为 4 或$\frac{4}{3}$；

（3）①$0\leqslant t\leqslant 2$ 时，如图 2，

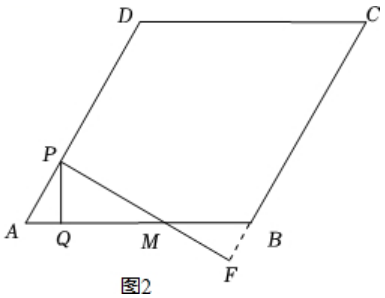


图2

在 Rt△APQ 中，$PQ=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，

∴$MQ=\frac{3}{2}t$，

∴$S=\frac{1}{2}PQ\cdot MQ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}t\times\frac{3}{2}t=\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2$；

②当 $2<t\leqslant 4$ 时，如图 3，

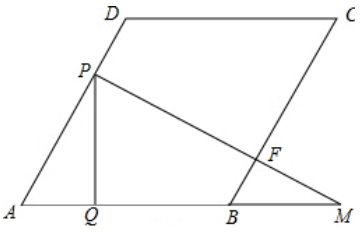


图3

∵$BF=t-2$，$MF=\sqrt{3}(t-2)$，

∴$S_{\triangle BFM}=\frac{1}{2}BF\cdot MF=\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2$，

∴$S=S_{\triangle PQM}-S_{\triangle BFM}=-\frac{\sqrt{3}}{8}t^2+2\sqrt{3}t-2\sqrt{3}$；

∴$S=\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2(0\leqslant t\leqslant 2)\\ -\frac{\sqrt{3}}{8}t^2+2\sqrt{3}t-2\sqrt{3}(2<t\leqslant 4)\end{cases}$；

（4）连接 AE，如图 4，

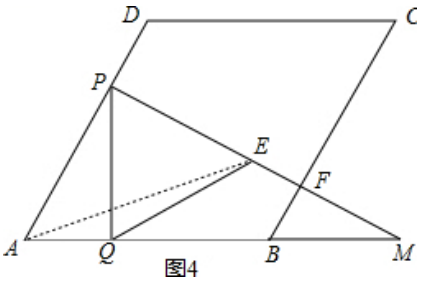


图4

∵△PQE 为等边三角形，

∴$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，

在 Rt△APE 中，$\tan\angle PAE=\frac{PE}{PA}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴∠PAE 为定值，

∴点 E 的运动轨迹为直线，

∵$AP=t$，

∴$AE=\sqrt{AP^2+PE^2}=\sqrt{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}t$，

当 $t=2$ 时，$AE=\sqrt{7}$，

当 $t=4$ 时，$AE=2\sqrt{7}$，

∴E 点运动路径长为 $2\sqrt{7}-\sqrt{7}=\sqrt{7}$．

13．（2022•绵阳）如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$DB=2\sqrt{3}$，$AB=4$，$AD=2$，动点 E、F 同时从 A 点出发，点 E 沿着 $A\to D\to B$ 的路线匀速运动，点 F 沿着 $A\to B\to D$ 的路线匀速运动，当点 E，F 相遇时停止运动．

（1）如图 1，设点 E 的速度为 1 个单位每秒，点 F 的速度为 4 个单位每秒，当运动时间为$\frac{2}{3}$秒时，设 CE 与 DF 交于点 P，求线段 EP 与 CP 长度的比值；

（2）如图 2，设点 E 的速度为 1 个单位每秒，点 F 的速度为$\sqrt{3}$个单位每秒，运动时间为 x 秒，△AEF 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并指出当 x 为何值时，y 的值最大，最大值为多少？

（3）如图 3，H 在线段 AB 上且 $AH=\frac{1}{3}HB$，M 为 DF 的中点，当点 E、F 分别在线段 AD、AB 上运动时，探究点 E、F 在什么位置能使 $EM=HM$，并说明理由．

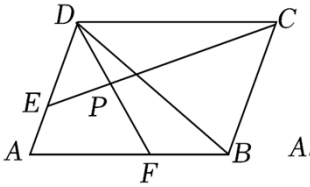


图1

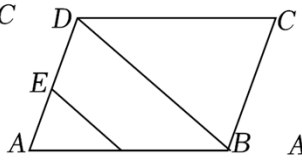


图2

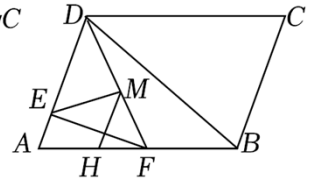


图3

【分析】（1）延长 DF 交 CB 的延长线于 G，证明△AFD∽△BFG，则$\frac{AF}{FB}=\frac{AD}{BG}$，求出 BG 的长，再由 AD∥CG，则$\frac{EP}{PC}=\frac{ED}{GC}$，即可求解；

（2）分三种情况讨论：当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，E 点在 AD 上，F 点在 AB 上，过点 E 作 $EH\perp AB$ 交于 H，$y=\frac{1}{2}$

$\times AF\times EH=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{3}{4}x^2$；此时当 $x=2$ 时，y 有最大值 3；当 $2\leqslant x\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，E 点在 BD 上，F 点在 AB 上，过点 E 作 $EN\perp AB$ 交于 N，过点 D 作 $DM\perp AB$ 交于 M，$y=\frac{1}{2}\times AF\times EN=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$；当 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，y 有最大值 $2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；当 $\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{3}$ 时，过点 E 作 $EQ\perp AB$ 交于 Q，过点 F 作 $FP\perp AB$ 交于 P，$y=\frac{1}{2}\times AB\times(EQ-PF)=6+2\sqrt{3}-x-\sqrt{3}x$；此时当 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，y 有最大值 $2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

（3）连接 DH，求出 $AH=1$，可得 $AH\perp AB$，由直角三角形的性质可得 $HM=DM=MF$，则 $EM=\frac{1}{2}DF$，可得 $EF\parallel BD$.

【解答】解：（1）延长 DF 交 CB 的延长线于 G，

∵平行四边形 $ABCD$ 中，

∴$CG\parallel AD$，

∴$\angle A=\angle GBF$，

∴$\triangle AFD\backsim\triangle BFG$，

∴$\frac{AF}{FB}=\frac{AD}{BG}$，

∵运动时间为$\frac{2}{3}$秒，

∴$AF=\frac{8}{3}$，

∵$AB=4$，

∴$BF=\frac{4}{3}$，

∵$AD=2$，

∴$BG=1$，

∴$CG=3$，

∵$AD\parallel CG$，

∴$\frac{EP}{PC}=\frac{ED}{GC}$，

∵$AE=\frac{2}{3}$，

∴$ED=\frac{4}{3}$，

∴$\frac{EP}{PC}=\frac{4}{9}$；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/905120312243011244