浙江省台州中学2024届高中三年级教学质量监测（二）数学试题

注意事项：
1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．定义：$N\{f(x)\otimes g(x)\}$表示不等式$f(x)<g(x)$的解集中的整数解之和.若$f(x)=|\log_2 x|$，$g(x)=a(x-1)^2+2$，$N\{f(x)\otimes g(x)\}=6$，则实数a的取值范围是

A．$(-\infty,-1]$　　B．$(\log_2 3-2,0)$　　C．$(2-\log_2 6,0]$　　D．$(\dfrac{\log_2 3-2}{4},0]$

2．已知底面为边长为2的正方形，侧棱长为1的直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是上底面$A_1B_1C_1D_1$上的动点.给出以下四个结论中，正确的个数是（　　）

①与点D距离为$\sqrt{3}$的点P形成一条曲线，则该曲线的长度是$\dfrac{\pi}{2}$；

②若$DP//$面ACB_1，则DP与面ACC_1A_1所成角的正切值取值范围是$\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{2}\right]$；

③若$DP=\sqrt{3}$，则DP在该四棱柱六个面上的正投影长度之和的最大值为$6\sqrt{2}$.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

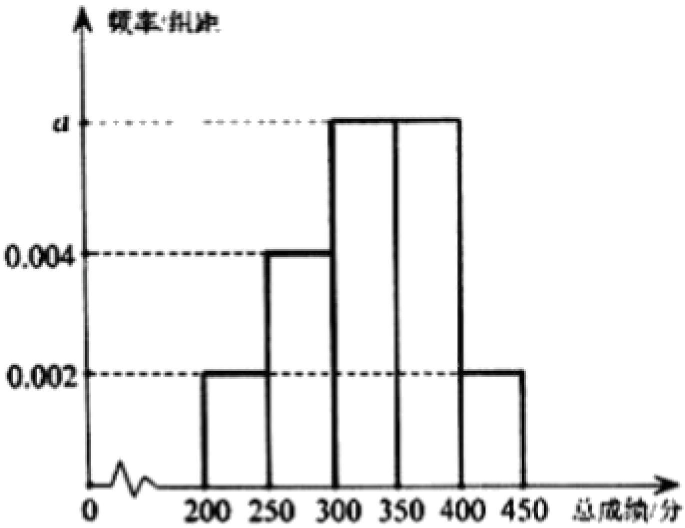
3．函数$f(x)=2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)^2-2$的一个单调递增区间是（　　）

A．$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$　　B．$\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right]$　　C．$\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8}\right]$　　D．$\left[\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{9\pi}{8}\right]$

4．已知命题***p***：若$a>1$，$b>c>1$，则$\log_b a<\log_c a$；命题***q***：$\exists x_0\left(0,+\infty\right)$，使得$2^{x_0}<\log_3 x_0$”，则以下命题为真命题的是（　　）

A．$p\wedge q$　　B．$p\wedge\left(\neg q\right)$　　C．$\left(\neg p\right)\wedge q$　　D．$\left(\neg p\right)\wedge\left(\neg q\right)$

5．某地区教育主管部门为了对该地区模拟考试成进行分析，随机抽取了**200**分到**450**分之间的**2000**名学生的成绩，并根据这**2000**名学生的成绩画出样本的频率分布直方图，如图所示，则成绩在$[250，350]$内的学生人数为（　　）



A．800　　**B．1000**　　**C．1200**　　**D．1600**

6．二项式$\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$展开式中，$\frac{1}{x}$项的系数为（　　）

A．$-\frac{945}{16}$　　**B．**$-\frac{189}{32}$　　**C．**$-\frac{21}{64}$　　**D．**$\frac{2835}{8}$

7．记M的最大值和最小值分别为$M_{\max}$和$M_{\min}$．若平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})=2$，则（　　）

A．$|\vec{a}-\vec{c}|_{\max}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$　　**B．**$|\vec{a}+\vec{c}|_{\max}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$

C．$|\vec{a}-\vec{c}|_{\min}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$　　**D．**$|\vec{a}+\vec{c}|_{\min}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$

8．三棱锥$S-ABC$中，侧棱$SA\perp$底面ABC，$AB=5$，$BC=8$，$\angle B=60°$，$SA=2\sqrt{5}$，则该三棱锥的外接球的表面积为（　　）

A．$\frac{64}{3}\pi$　　**B．**$\frac{256}{3}\pi$　　**C．**$\frac{436}{3}\pi$　　**D．**$\frac{2048}{27}\sqrt{3}\pi$

9．音乐，是用声音来展现美，给人以听觉上的享受，熔铸人们的美学趣味．著名数学家傅立叶研究了乐声的本质，他证明了所有的乐声都能用数学表达式来描述，它们是一些形如$a\sin bx$的简单正弦函数的和，其中频率最低的一项是基本音，其余的为泛音．由乐声的数学表达式可知，所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍，称为基本音的谐波．下列函数中不能与函数$y=0.06\sin 180000t$构成乐音的是（　　）

A．$y=0.02\sin 360000t$　　**B．**$y=0.03\sin 180000t$　　**C．**$y=0.02\sin 181800t$

D．$y=0.05\sin 540000t$

10．已知函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$且在$\left(0,\pi\right)$上是单调函数，则下列说法正确的是（　　）

A．$\omega=\frac{1}{2}$　　B．$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C．函数$f\left(x\right)$在$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减　　D．函数$f\left(x\right)$的图像关于点$\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$对称

11．已知$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则$\sin\left(\pi+\alpha\right)=$（　　）

A．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

12．已知集合$A=\left\{x\middle|x^2-2x-3\le0\right\}$ $B=\left\{x\middle|x<2\right\}$，则$A\cap B=$()

A．$\left(1,3\right)$　　B．$\left(1,3\right]$　　C．$\left[-1,2\right)$　　D．$\left(-1,2\right)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．一个村子里一共有n个人，其中一个人是谣言制造者，他编造了一条谣言并告诉了另一个人，这个人又把谣言告诉了第三个人，如此等等．在每一次谣言传播时，谣言的接受者都是在其余$n-1$个村民中随机挑选的，当谣言传播$k(k\geq 2)$次之后，还没有回到最初的造谣者的概率是_______．

14．某大学A、B、C、D四个不同的专业人数占本校总人数的比例依次为3.2%、4.8%、4%、5.2%，现欲采用分层抽样的方法从这四个专业的总人数中抽取129人调查毕业后的就业情况，则D专业应抽取_________人．

15．已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的右准线与渐近线的交点在抛物线$y^2=2px$上，则实数$p$的值为___________．

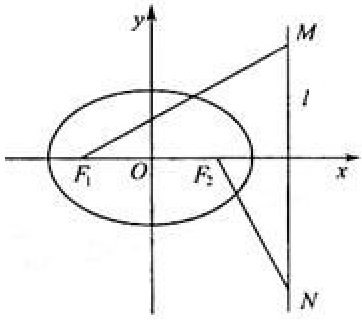
16．平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD=60°,AB=4,AD=2$，E为边CD上一点（不C、D与重合），将平行四边形$ABCD$沿BE折起，使五点A,B,C,D,E均在一个球面上，当四棱锥$C-ABED$体积最大时，球的表面积为________．

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\left(a>b>0\right)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线为$l$，$M,N$是$l$上的两个动点，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$．

（Ⅰ）若$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\left|\overrightarrow{F_2N}\right|=2\sqrt{5}$，求$a,b$的值；

（Ⅱ）证明：当$\left|MN\right|$取最小值时，$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线.



18.（12 分）在平面直角坐标系 ***xoy*** 中，以坐标原点 ***O*** 为极点，***x*** 轴正半轴为极轴建立极坐标系。已知曲线 ***C*** 的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta=2a\cos\theta(a>0)$，过点$P\left(-2,-4\right)$的直线 ***l*** 的参数方程为$\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（为参数），直线 ***l*** 与曲线 ***C*** 交于 ***M***、***N*** 两点。

（1）写出直线 ***l*** 的普通方程和曲线 ***C*** 的直角坐标方程：

（2）若$|PM|,|MN|,|PN|$成等比数列，求 ***a*** 的值。

19.（12 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$为公差不为零的等差数列，S_n是数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，且a_1、a_2、a_5成等比数列，$S_7=49$.设数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和为T_n，且满足$\log_2\left(T_n+2\right)=\sqrt{S_{n+1}}$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$、$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）令$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}\left(n\in N^*\right)$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<3$.

20.（12 分）已知函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\sin(x+\dfrac{\pi}{2})+\sin(x+\dfrac{\pi}{3}),x\in R$.

（Ⅰ）求$f(2019\pi)$的值；

（Ⅱ）若$f(\alpha)=1$，且$0<\alpha<\pi$，求$\cos\alpha$的值.

21.（12 分）在一次电视节目的答题游戏中，题型为选择题，只有“***A***”和“***B***”两种结果，其中某选手选择正确的概率为 ***p***，选择错误的概率为 ***q***，若选择正确则加 **1** 分，选择错误则减 **1** 分，现记“该选手答完 ***n*** 道题后总得分为S_n”.

（1）当$p=q=\dfrac{1}{2}$时，记$\xi=S_3$，求ξ的分布列及数学期望；

（2）当$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$时，求$S_8=2$且$S_i\geq0\left(i=1,2,3,4\right)$的概率.

22.（10 分）已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}+mx+2\ln x$，$m\in R$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）已知 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线与 y 轴垂直，若方程 $f\left(x\right)=t$ 有三个实数解 x_1、x_2、x_3（$x_1<x_2<x_3$），求证：$x_1+2>x_3$．

参考答案

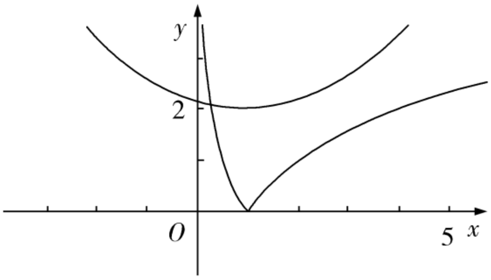
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

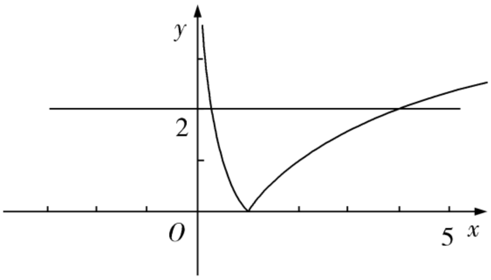
【解析】

由题意得，$N\left\{f(x)\otimes g(x)\right\}=6$ 表示不等式 $|\log_2 x|<a(x-1)^2+2$ 的解集中整数解之和为 6.

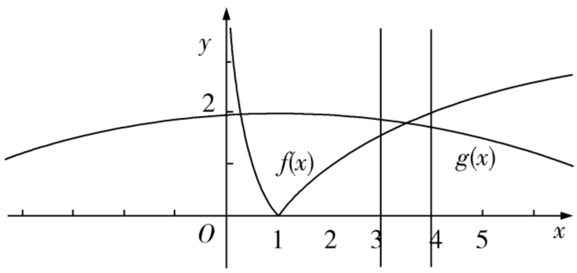
当 $a>0$ 时，数形结合（如图）得 $|\log_2 x|<a(x-1)^2+2$ 的解集中的整数解有无数多个，$|\log_2 x|<a(x-1)^2+2$ 解集中的整数解之和一定大于 6.



当 $a=0$ 时，$g(x)=2$，数形结合（如图），由 $f(x)<2$ 解得 $\frac{1}{4}<x<4$.在 $(\frac{1}{4},4)$ 内有 3 个整数解，为 1，2，3，满足 $N\left\{f(x)\otimes g(x)\right\}=6$，所以 $a=0$ 符合题意.



当 $a<0$ 时，作出函数 $f(x)=|\log_2 x|$ 和 $g(x)=a(x-1)^2+2$ 的图象，如图所示.



若$N\{f(x)\otimes g(x)\}=6$，即$|\log_2 x|<a(x-1)^2+2$的整数解只有**1，2，3.**

只需满足$\begin{cases}f(3)<g(3)\\f(4)\geq g(4)\end{cases}$，即$\begin{cases}\log_2 3<4a+2\\2\geq 9a+2\end{cases}$，解得$\frac{\log_2 3-2}{4}<a\leq 0$，所以$\frac{\log_2 3-2}{4}<a<0$.

综上，当$N\{f(x)\otimes g(x)\}=6$时，实数a的取值范围是$(\frac{\log_2 3-2}{4},0]$.故选**D.**

2、**C**

【解析】

①与点D距离为$\sqrt{3}$的点P形成以D_1为圆心，半径为$\sqrt{2}$的$\frac{1}{4}$圆弧MN，利用弧长公式，可得结论；②当P在A_1（或C_1)时，DP与面ACC_1A_1所成角$\angle DA_1O$（或$\angle DC_1O$)的正切值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$最小，当P在O_1时，DP与面ACC_1A_1所成角$\angle DO_1O$的正切值为$\sqrt{2}$最大，可得正切值取值范围是$[\frac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{2}]$；③设$P(x，y，1)$，则$x^2+y^2+1=3$，即$x^2+y^2=2$，可得$DP$在前后、左右、上下面上的正投影长，即可求出六个面上的正投影长度之和.

【详解】

如图：

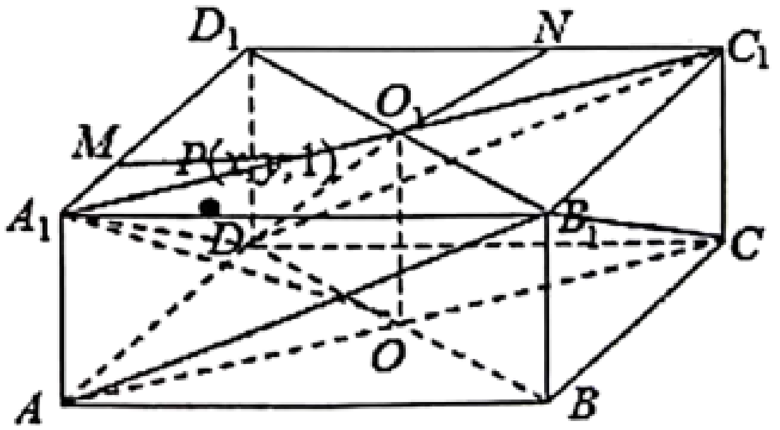
①错误，因为$D_1P=\sqrt{DP^2-DD_1^{\ 2}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}$，与点$D$距离为$\sqrt{3}$的点$P$形成以$D_1$为圆心，半径为$\sqrt{2}$的$\frac{1}{4}$圆弧$MN$，长度为$\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$；

②正确，因为面A_1DC_1//面ACB_1，所以点P必须在面对角线A_1C_1上运动，当P在A_1（或C_1）时，DP与面ACC_1A_1所成角$\angle DA_1O$（或$\angle DC_1O$）的正切值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$最小（O为下底面面对角线的交点)，当P在O_1时，DP与面ACC_1A_1所成角$\angle DO_1O$的正切值为$\sqrt{2}$最大，所以正切值取值范围是$\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{2}\right]$；

③正确，设$P\left(x,y,1\right)$，则$x^2+y^2+1=3$，即$x^2+y^2=2$，DP在前后、左右、上下面上的正投影长分别为$\sqrt{y^2+1}$，$\sqrt{x^2+1}$，$\sqrt{x^2+y^2}$，所以六个面上的正投影长度之

$2\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}\right)\le 2\left(2\sqrt{\frac{y^2+1+x^2+1}{2}}+\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}$，当且仅当 P 在 O_1 时取等号.

故选：C．



【点睛】

本题以命题的真假判断为载体，考查了轨迹问题、线面角、正投影等知识点，综合性强，属于难题.

3、**D**

【解析】

利用同角三角函数的基本关系式、二倍角公式和辅助角公式化简 $f\left(x\right)$ 表达式，再根据三角函数单调区间的求法，求得 $f\left(x\right)$ 的单调区间，由此确定正确选项.

【详解】

因为 $f(x)=2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)^2-2$

$=1+\cos 2x+1+\sin 2x-2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $f(x)$ 单调递增，则 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），解得

$k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8}$（$k\in\mathbf{Z}$），当 $k=1$ 时，**D** 选项正确.**C** 选项是递减区间，**A**，**B** 选项中有部分增区间部分减区间.

故选：**D**

【点睛】

本小题考查三角函数的恒等变换，三角函数的图象与性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识.

4、**B**

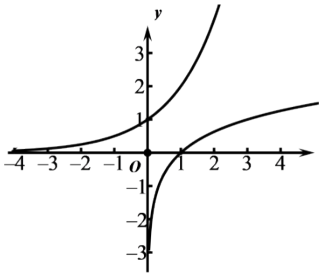
【解析】

先判断命题 p,q 的真假,进而根据复合命题真假的真值表,即可得答案.

【详解】

$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$，$\log_c a=\dfrac{1}{\log_a c}$，因为$a>1$，$b>c>1$，所以$0<\log_a c<\log_a b$，所以$\dfrac{1}{\log_a c}>\dfrac{1}{\log_a b}$，即命题 ***p*** 为真命题；画出函数$y=2^x$和$y=\log_3 x$图象，知命题 ***q*** 为假命题,所以$p\wedge(\neg q)$为真.

故选:**B.**



【点睛】

本题考查真假命题的概念,以及真值表的应用,解题的关键是判断出命题p,q的真假,难度较易.

5、B

【解析】

由图可列方程算得 ***a***，然后求出成绩在$[250,350]$内的频率，最后根据频数=总数×频率可以求得成绩在$[250,350]$内的学生人数.

【详解】

由频率和为 1，得$(0.002+0.004+2a+0.002)\times 50=1$，解得$a=0.006$，

所以成绩在$[250,350]$内的频率$=(0.004+0.006)\times 50=0.5$，

所以成绩在$[250,350]$内的学生人数$=2000\times 0.5=1000$.

故选：***B***

【点睛】

本题主要考查频率直方图的应用，属基础题.

6、D

【解析】

写出二项式的通项公式,再分析x的系数求解即可.

【详解】

二项式$\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)^7$展开式的通项为$T_{r+1}=C_7^r\left(\dfrac{x}{2}\right)^{7-r}\left(-\dfrac{3}{x}\right)^r=C_7^r\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-r}(-3)^r x^{7-2r}$,令$7-2r=-1$,得$r=4$,故$\dfrac{1}{x}$项的系数为$C_7^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-4}(-3)^4=\dfrac{2835}{8}$.

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查了二项式定理的运算,属于基础题.

7、**A**

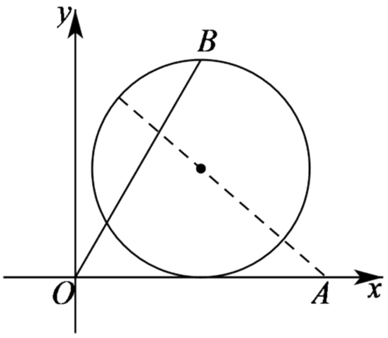
【解析】

设θ为$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角，根据题意求得$\theta=\frac{\pi}{3}$，然后建立平面直角坐标系，设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$，根据平面向量数量积的坐标运算得出点$C$的轨迹方程，将$|\vec{a}-\vec{c}|$和$|\vec{a}+\vec{c}|$转化为圆上的点到定点距离，利用数形结合思想可得出结果.

【详解】

由已知可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=2$，则$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\because 0\le\theta\le\pi$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$，

建立平面直角坐标系，设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$，



由$\vec{c}\cdot(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})=2$，可得$(x,y)\cdot(4-2x,2\sqrt{3}-2y)=2$，

即$4x-2x^2+2\sqrt{3}y-2y^2=2$，

化简得点C的轨迹方程为$(x-1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，则$|\vec{a}-\vec{c}|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

则$|\vec{a}-\vec{c}|$转化为圆$(x-1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$上的点与点$(2,0)$的距离，$\therefore|\vec{a}-\vec{c}|_{\max}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$，

$|\vec{a}-\vec{c}|_{\min}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$，

$|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，

$\left|\vec{a}+\vec{c}\right|$转化为圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$上的点与点$\left(-2,0\right)$的距离，

$\therefore\left|\vec{a}+\vec{c}\right|_{\max}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{2}$，$\left|\vec{a}+\vec{c}\right|_{\mathrm{m}im}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{39}-\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查和向量与差向量模最值的求解，将向量坐标化，将问题转化为圆上的点到定点距离的最值问题是解答的关键，考查化归与转化思想与数形结合思想的应用，属于中等题.

8、B

【解析】

由题,侧棱$SA\perp$底面ABC，$AB=5$，$BC=8$，$\angle B=60^\circ$,则根据余弦定理可得$BC=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\dfrac{1}{2}}=7$ ，

$\vee ABC$的外接圆圆心$2r=\dfrac{BC}{\sin B}=\dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\therefore r=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

三棱锥的外接球的球心到面ABC的距离$d=\dfrac{1}{2}SA=\sqrt{5}$，则外接球的半径$R=\sqrt{\left(\dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{64}{3}}$ ，则该三棱锥的外接球的表面积为$S=4\pi R^2=\dfrac{256}{3}\pi$

点睛：本题考查的知识点是球内接多面体，熟练掌握球的半径R 公式是解答的关键.

9、C

【解析】

由基本音的谐波的定义可得$f_1=nf_2\ (n\in\mathbf{N}^*)$,利用$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$可得$\omega_1=n\omega_2\ (n\in\mathbf{N}^*)$,即可判断选项.

【详解】

由题,所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍,称为基本音的谐波,

由$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$,可知若$f_1=nf_2\ (n\in\mathbf{N}^*)$,则必有$\omega_1=n\omega_2\ (n\in\mathbf{N}^*)$,

故选:C

【点睛】

本题考查三角函数的周期与频率,考查理解分析能力.

10、B