

考点 10 函数与数学模型 (4 种题型与基础、易错专练)



一、2022 真题抢先刷, 考向提前知

一. 填空题 (共 2 小题)

1. (2022·上海) 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x-1 & x < 0 \\ x+a & x > 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, 为奇函数, 求参数 a 的值为 1.

【分析】由题意, 利用奇函数的定义可得 $f(-x) = -f(x)$, 故有 $f(-1) = -f(1)$, 由此求得 a 的值.

【解答】解: $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x-1 & x < 0 \\ x+a & x > 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$,

$\therefore f(-1) = -f(1)$, $\therefore -a^2-1 = -(a+1)$, 即 $a(a-1) = 0$, 求得 $a=0$ 或 $a=1$.

当 $a=0$ 时, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 不是奇函数, 故 $a \neq 0$;

当 $a=1$ 时, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$, 是奇函数, 故满足条件,

综上, $a=1$,

故答案为: 1.

【点评】本题主要考查函数的奇偶性的定义和性质, 属于中档题.

2. (2022·浙江) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & x \leq 1, \\ x+\frac{1}{x}-1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(\frac{1}{2})) = -\frac{37}{28}$; 若当 $x \in [a, b]$ 时, $1 \leq f$

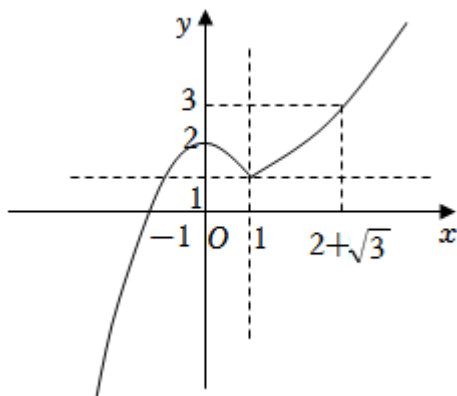
$(x) \leq 3$, 则 $b-a$ 的最大值是 $3+\sqrt{3}$.

【分析】直接由分段函数解析式求 $f(f(\frac{1}{2}))$; 画出函数 $f(x)$ 的图象, 数形结合得答案.

【解答】解: $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & x \leq 1 \\ x+\frac{1}{x}-1, & x > 1 \end{cases}$, $\therefore f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}+2 = \frac{7}{4}$,

$\therefore f(f(\frac{1}{2})) = f(\frac{7}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{4}{7} - 1 = \frac{37}{28}$;

作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



由图可知，若当 $x \in [a, b]$ 时， $1 \leq f(x) \leq 3$ ，则 $b - a$ 的最大值是 $2 + \sqrt{3} - (-1) = 3 + \sqrt{3}$ 。

故答案为： $\frac{37}{28}$ ； $3 + \sqrt{3}$ 。

【点评】本题考查函数值的求法，考查分段函数的应用，考查数形结合思想，是中档题。



二、考点清单

一. 函数最值的应用

函数的最值顾名思义就是指函数在某段区间内的最大值和最小值。在日常生活中我们常常会遇到如何使成本最低，如何用料最少，如何占地最小等等的问题，这里面就可以转化为求函数的最值问题。另外，最值可分为最大值和最小值。

这种题的关键是把现实的问题转化为数学上的问题，具体的说是转化为函数最值问题，这里面需要同学们要具有转化思维，具有一定的建模能力，在很多高考题中也常常以大题的形式出现，所以务必引起重视。这里我们以具体的例题来讲解。

例：城关中学要建造一个长方形游泳池，其容积为 4800 立方米，深为 3 米，如果建造池底的单价是建造池壁单价的 1.5 倍，怎样设计水池才能使总造价最低？设池壁造价为每平方米 m 元，则最低造价为多少？

解：设水池底面的长为 x 米，宽为 $4800 \div 3x$ 米，总造价为 y ，则

$$y = x \times \frac{4800}{3x} \times 1.5m + 3 \times 2 \left(x + \frac{4800}{3x} \right) m = 2400m + 6 \left(x + \frac{1600}{x} \right) m \cdots (6 \text{ 分})$$

求导可得 $y' = 6m \left(1 - \frac{1600}{x^2} \right)$

令 $y' = 6m \left(1 - \frac{1600}{x^2} \right) = 0$ ，可得 $x = 40 \cdots (11 \text{ 分})$

$\therefore$ 函数在 $(0, 40)$ 上单调递增，在 $(40, +\infty)$ 上单调递减

$\therefore$ 当池底长为 40 米，宽为 40 米时，总造价最低为 $2880m$ 元。

这是工程上一个很常见的成本最低的问题，也很有代表性，在这个立体当中，我们要做的第一步是构建数学模型，把求成本最低的问题转化为求函数的最小值，这个题在构建模型的时候最关键的是要找到造价与底面长的关系，从而又把造价问题转化为关于底面长的一个函数，这也是我们常用的方法。第二步构建函数，然后运用数学方法求解，这个是重点，求解的一般方法为基本不等式和求导判定单调性。

【高考预测】

应用题紧贴实际，很能体现学以致用，是出题老师很喜欢的一种题型，解答这种题需要考生先苦练基本功，会求一般函数的最值；然后也具备基本的建模能力，在文字当中找到它们的内在逻辑关系，最后以函数的形式表达出来。

二. 分段函数的应用

分段函数顾名思义指的是一个函数在不同的定义域内的函数表达式不一样，有些甚至不是连续的。这个在现实当中是很常见的，比如说水的阶梯价，购物的时候买的商品的量不同，商品的单价也不同等等，这里面都涉及到分段函数。

【具体应用】

正如前面多言，分段函数与我们的实际联系比较紧密，那么在高考题中也时常会以应用题的形式出现。下面我们通过例题来分析一下分段函数的解法。

例：市政府为招商引资，决定对外资企业第一年产品免税。某外资厂该年A型产品出厂价为每件60元，年销售量为11.8万件。第二年，当地政府开始对该商品征收税率为 $p\%$ ($0 < p < 100$ ，即销售100元要征收 p 元)的税收，于是该产品的出厂价上升为每件 $\frac{8000}{100-p}$ 元，预计年销售量将减少 p 万件。

(I) 将第二年政府对该商品征收的税收 y (万元)表示成 p 的函数，并指出这个函数的定义域；

(II) 要使第二年该厂的税收不少于16万元，则税率 $p\%$ 的范围是多少？

(III) 在第二年该厂的税收不少于16万元的前提下，要让厂家获得最大销售金额，则 p 应为多少？

解：(I) 依题意，第二年该商品年销售量为 $(11.8 - p)$ 万件，

年销售收入为 $\frac{8000}{100-p} (11.8 - p)$ 万元，

政府对该商品征收的税收 $y = \frac{8000}{100-p} (11.8 - p) p\%$ (万元)

故所求函数为 $y = \frac{80}{100-p} (11.8 - p) p$

由 $11.8 - p > 0$ 及 $p > 0$ 得定义域为 $0 < p < 11.8 \cdots$ (4分)

(II) 由 $y \geq 16$ 得 $\frac{80}{100-p} (11.8 - p) p \geq 16$

化简得 $p^2 - 12p + 20 \leq 0$, 即 $(p - 2)(p - 10) \leq 0$, 解得 $2 \leq p \leq 10$.

故当税率在 $[0.02, 0.1]$ 内时，税收不少于 16 万元. ... (9 分)

(III) 第二年，当税收不少于 16 万元时，

厂家的销售收入为 $g(p) = \frac{8000}{100-p} (11.8 - p) \quad (2 \leq p \leq 10)$

$\therefore g(p) = \frac{8000}{100-p} (11.8 - p) = 800 \left(10 + \frac{882}{100-p} \right)$ 在 $[2, 10]$ 是减函数

$\therefore g(p)_{\max} = g(2) = 800$ (万元)

故当税率为 2% 时，厂家销售金额最大.

这个典型的例题当中，我们发现分段函数首先还是要有函数的功底，要有一定的建模能力，这个与分不分段其实无关. 我们重点看看分段函数要注意的地方. 第一，要明确函数的定义域和其相对的函数表达式；第二注意求的是整个一大段的定义域内的值域还是分段函数某段内部的值；第三，注意累加的情况和仅仅某段函数的讨论.

【考查预测】

修炼自己的内功，其实分不分段影响不大，审清题就可以了，另外，最好画个图来解答.

三. 根据实际问题选择函数类型

1. 实际问题的函数刻画

在现实世界里，事物之间存在着广泛的联系，许多联系可以用函数刻画. 用函数的观点看实际问题，是学习函数的重要内容.

2. 用函数模型解决实际问题

(1) 数据拟合:

通过一些数据寻求事物规律，往往是通过绘出这些数据在直角坐标系中的点，观察这些点的整体特征，看它们接近我们熟悉的哪一种函数图象，选定函数形式后，将一些数据代入这个函数的一般表达式，求出具体的函数表达式，再做必要的检验，基本符合实际，就可以确定这个函数基本反映了事物规律，这种方法称为数据拟合.

(2) 常用到的五种函数模型:

① 直线模型: 一次函数模型 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，图象增长特点是直线式上升 (x 的系数 $k > 0$)，通过图象可以直观地认识它，特例是正比例函数模型 $y = kx$ ($k > 0$).

② 反比例函数模型: $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 型，增长特点是 y 随 x 的增大而减小.

③ 指数函数模型: $y = a \cdot b^x + c$ ($b > 0$, 且 $b \neq 1$, $a \neq 0$)，其增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越快 (底数 $b > 1$, $a > 0$)，常形象地称为指数爆炸.

④对数函数模型，即 $y=m\log_a x+n$ ($a>0, a\neq 1, m\neq 0$) 型，增长特点是随着自变量的增大，函数值增大越来越慢（底数 $a>1, m>0$ ）。

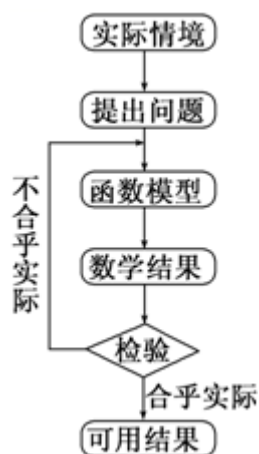
⑤幂函数模型，即 $y=a\cdot x^n+b$ ($a\neq 0$) 型，其中最常见的是二次函数模型： $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)，其特点是随着自变量的增大，函数值先减小后增大（ $a>0$ ）。

在以上几种函数模型的选择与建立时，要注意函数图象的直观运用，分析图象特点，分析变量 x 的范围，同时还要与实际问题结合，如取整等。

3. 函数建模

(1) 定义：用数学思想、方法、知识解决实际问题的过程，叫作数学建模。

(2) 过程：如下图所示。



【典型例题分析】

典例 1：某公司为了实现 1000 万元的利润目标，准备制定一个激励销售人员的奖励方案：销售利润达到 10 万元时，按销售利润进行奖励，且奖金数额 y （单位：万元）随销售利润 x （单位：万元）的增加而增加，但奖金数额不超过 5 万元，同时奖金数额不超过利润的 25%，其中模型能符合公司的要求的是（参考数据： $1.003^{600}\approx 6, 1n7\approx 1.945, 1n102\approx 2.302$ ）（ ）

A. $y=0.025x$ B. $y=1.003^x$ C. $y=1+\log_7 x$ D. $y=\frac{1}{4000}x^2$

分析：由题意，符合公司要求的模型只需满足：当 $x\in[10, 1000]$ 时，①函数为增函数；②函数的最大值不超过 5；③ $y\leq x\cdot 25\%$ ，然后一一验证即可。

解答：解：由题意，符合公司要求的模型只需满足：

当 $x\in[10, 1000]$ 时，

①函数为增函数；②函数的最大值不超过 5；③ $y\leq x\cdot 25\%=\frac{1}{4}x$ ，

A 中，函数 $y=0.025x$ ，易知满足①，但当 $x>200$ 时， $y>5$ 不满足公司要求；

B 中，函数 $y=1.003^x$ ，易知满足①，但当 $x>600$ 时， $y>5$ 不满足公司要求；

C 中，函数 $y=l+\log_7 x$ ，易知满足①，当 $x=1000$ 时， y 取最大值 $l+\log_7 1000=4-\lg 7<5$ ，且 $l+\log_7 x \leq \frac{1}{4}x$

恒成立，故满足公司要求；

D 中，函数 $y=\frac{1}{4000}x^2$ ，易知满足①，当 $x=400$ 时， $y>5$ 不满足公司要求；

故选 C

点评：本题以实际问题为载体，考查函数模型的构建，考查方案的优化设计，解题的关键是一一验证.

典例 2：某服装生产企业为了占有更多的市场份额，拟在 2015 年度进行一系列促销活动，经过市场调查和

测算，服装的年销量 x 万件与年促销 t 万元之间满足关系式 $3-x=\frac{k}{t+1}$ (k 为常数)，如果不搞促销活动，

服装的年销量只能是 1 万件. 已知 2015 年生产服装的设备折旧，维修等固定费用需要 3 万元，每生产 1 万件服装需再投入 32 万元的生产费用，若将每件服装的售价定为：“每件生产成本的 150%”与“平均每件促销费的一半”之和，试求：

(1) 2015 年的利润 y (万元) 关于促销费 t (万元) 的函数；

(2) 该企业 2015 年的促销费投入多少万元时，企业的年利润最大？

(注：利润=销售收入-生产成本-促销费，生产成本=固定费用+生产费用)

分析：(1) 通过 x 表示出年利润 y ，并化简整理，代入整理即可求出 y 万元表示为促销费 t 万元的函数.

(2) 根据已知代入 (2) 的函数，分别进行化简即可用基本不等式求出最值，即促销费投入多少万元时，企业的年利润最大.

解答：解：(1) 由题意： $3-x=\frac{k}{t+1}$ ，

且当 $t=0$ 时， $x=1$.

所以 $k=2$ ，所以 $3-x=\frac{2}{t+1}$ ，… (1 分)

生产成本为 $32x+3$ ，每件售价 $\frac{3}{2}(\frac{32x+3}{x})+\frac{t}{2x}$ ，… (2 分)

所以， $y=[\frac{3}{2}(\frac{32x+3}{x})+\frac{t}{2x}]x-(32x+3)-t$ … (3 分)

$=16x-\frac{t}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{32}{t+1}-\frac{t+1}{2}+50$ ，($t \geq 50$)；… (2 分)

(2) 因为 $-\frac{32}{t+1}-\frac{t+1}{2} \geq -8$ 当且仅当 $-\frac{32}{t+1}=\frac{t+1}{2}$ ，即 $t=7$ 时取等号，… (4 分)

所以 $y \leq 50-8=42$ ，… (1 分)

答：促销费投入 7 万元时，企业的年利润最大. … (1 分)

点评：本小题主要考查函数模型的选择与应用，看出基本不等式在求最值中的应用，考查学生分析问题和解决问题的能力，强调对知识的理解和熟练运用，考查转化思想的应用.

【解题方法点拨】

用函数模型解决实际问题的常见类型及解法：

(1) 解函数关系已知的应用题

①确定函数关系式 $y=f(x)$ 中的参数，求出具体的函数解析式 $y=f(x)$ ；②讨论 x 与 y 的对应关系，针对具体的函数去讨论与题目有关的问题；③给出实际问题的解，即根据在函数关系的讨论中所获得的理论参数值给出答案.

(2) 解函数关系未知的应用题

① 阅读理解题意

看一看可以用什么样的函数模型，初步拟定函数类型；

② 抽象函数模型

在理解问题的基础上，把实际问题抽象为函数模型；

③ 研究函数模型的性质

根据函数模型，结合题目的要求，讨论函数模型的有关性质，获得函数模型的解；

④ 得出问题的结论

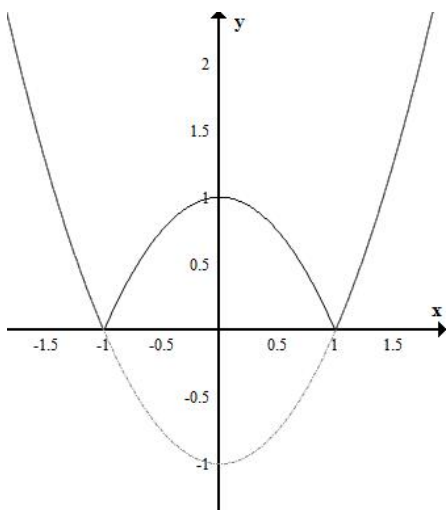
根据函数模型的解，结合实际问题的实际意义和题目的要求，给出实际问题的解.

四. 带绝对值的函数

1. 当函数体中包含绝对值，就需要对绝对值内的部分的正负情况进行讨论，因此含绝对值的函数本质上是分段函数，往往需要先去绝对值再结合函数图象进行研究.

2. ①形如 $y=|f(x)|$ 的函数，由于 $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$ ，因此研究此类函数往往结合函数图象，

可以看成由 的图象在 x 轴上方部分不变，下方部分关于 x 轴对称得到，例如 $y=|x^2 - 1|$ 的图象如下图：

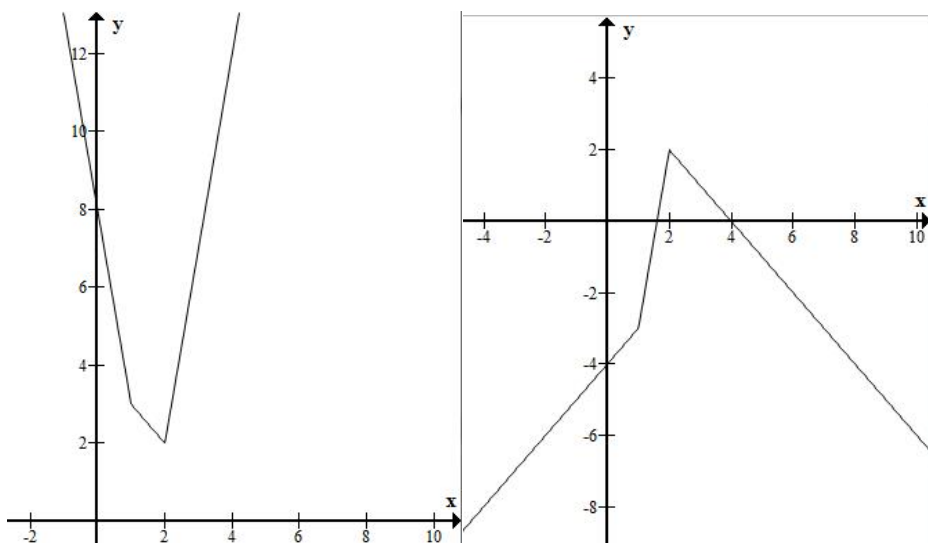


② $f(x) = a|x-m| + b|x-n|$, ($m < n$) 的图象是以 $A(m, f(m))$, $B(n, f(n))$ 为折点的折线.

当 $a+b > 0$ 时, 两端向上无限延伸, 故存在最小值, 最小值为 $\min\{f(m), f(n)\}$;

当 $a+b < 0$ 时, 两端向下无限延伸, 故存在最大值, 最大值为 $\max\{f(m), f(n)\}$;

当 $a+b = 0$ 时, 两端无限延伸且平行 x 轴, 故既有最大值又有最小值, 最大值为 $\max\{f(m), f(n)\}$; 最小值为 $\min\{f(m), f(n)\}$; 例如: $y = 2|x-1| + 3|x-2|$ 和 $y = 2|x-1| - 3|x-2|$ 的图象分别为



三、题型方法

一. 函数最值的应用 (共 6 小题)

1. (2022•和平区三模) 设 $a, b > 0$, $a+b=5$, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为 $3\sqrt{2}$.

【分析】利用柯西不等式, 即可求出 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值.

【解答】解: 由题意, $(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3})^2 \leq (1+1)(a+1+b+3) = 18$,

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为 $3\sqrt{2}$,

故答案为: $3\sqrt{2}$.

【点评】本题考查函数的最值, 考查柯西不等式的运用, 正确运用柯西不等式是关键.

2. (2022·兴庆区校级一模) 若函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \cos x + 3$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值之和为 ()

A. 6 B. 3 C. 4 D. 8

【分析】 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \cos x + 3 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \cos x + 3$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 令 $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 由函数的奇偶性, 可得 $g(x)$ 是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的奇函数, 则 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = g(x_0) + g(-x_0) = g(x_0) - g(x_0) = 0$, 即可得出答案.

【解答】解: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \cos x + 3 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \cos x + 3$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

令 $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$g(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \cdot \cos(-x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \cdot \cos x = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \cos x,$$

所以 $g(x) = g(-x)$,

所以 $g(x)$ 是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的奇函数,

根据奇函数性质, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 有最大值, 则 $g(x)$ 在 $x = -x_0$ 最小值,

所以 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = g(x_0) + g(-x_0) = g(x_0) - g(x_0) = 0$,

所以 $f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = f(x_0) + f(-x_0) = g(x_0) + 3 + g(-x_0) + 3 = 6$,

故选: A.

【点评】本题考查导数的综合应用, 解题中需要理清思路, 属于中档题.

3. (2022·商洛一模) 声音大小 (单位: dB) 取决于声波通过介质时所产生的压力 (简称声压, 单位: N/m^2) 变化. 已知声压 x 与声音大小 y 的关系式为 $y = 10 \times 1g(\frac{x}{2 \times 10^{-5}})^2$. 根据我国《工业企业噪声卫生标准》规定, 新建企业工作地点噪音容许标准为 $85dB$. 若某新建企业运行时测得的声音大小为 $60dB$, 符合《工业企业噪声卫生标准》规定, 则此时声压为 ()

A. $2N/m^2$ B. $20N/m^2$ C. $0.2N/m^2$ D. $0.02N/m^2$

【分析】 $y=10 \times \lg\left(\frac{x}{2 \times 10^{-5}}\right)^2$, 令 $y=60$, 可得 $60=10 \times \lg\left(\frac{x}{2 \times 10^{-5}}\right)^2$, 即可得出答案.

【解答】解: $y=10 \times \lg\left(\frac{x}{2 \times 10^{-5}}\right)^2$,

令 $y=60$, 可得 $60=10 \times \lg\left(\frac{x}{2 \times 10^{-5}}\right)^2$,

得 $\lg\frac{x}{2 \times 10^{-5}}=3$,

所以 $\frac{x}{2 \times 10^{-5}}=10^3$,

所以 $x=2 \times 10^{-5} \times 10^3=0.02$ (N/m^2),

故选: D.

【点评】本题考查函数的性质, 解题中需要理清思路, 属于中档题.

4. (2022·合肥二模) 已知函数 $f(x)=x^2 - a\sin x - 1$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 设函数 $g(x)=f'(x)$, 若 $y=g(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的增函数, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a=2$ 时, 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点.

【分析】(1) 求导 $f'(x)=2x - a\cos x$. 又因为 $g(x)=f'(x)=2x - a\cos x$, 求导, 根据函数 $g(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的增函数, 由 $g'(x) \geq 0$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立求解;

(2) 求导 $f'(x)=2x - 2\cos x$, 利用导数法证明.

【解答】解: (1) $\because f'(x)=2x - a\cos x$,

又因为 $g(x)=f'(x)=2x - a\cos x$,

$\therefore g'(x)=2+a\sin x$,

$\because$ 函数 $g(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的增函数,

$\therefore g'(x)=2+a\sin x \geq 0$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,

若 $x=0$, 则 $g'(x)=2 \geq 0$ 恒成立, 此时 $a \in \mathbf{R}$;

若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 此时 $0 < \sin x \leq 1$,

$\therefore g'(x)=2+a\sin x \geq 0$ 恒成立,

即 $a \geq -\frac{2}{\sin x}$ 恒成立;

$\therefore a \geq -2$.

综合上: a 的取值范围是 $[-2, +\infty)$;

(2) 证明: 当 $a=2$ 时, $f(x) = x^2 - 2\sin x - 1$, $x \in (0, \pi)$,

$$\text{则 } f'(x) = 2x - 2\cos x,$$

$$\therefore f''(x) = 2 + 2\sin x \geq 0,$$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递增.

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) > 0,$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } f'(x_0) = 0.$$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$$\text{又 } f(0) = -1 < 0, f(\pi) = \pi^2 - 1 > 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点.

【点评】 本题考查了导数的综合运用及恒成立问题, 关键点是确定函数的单调性, 属于中档题.

(多选) 5. (2022·福建模拟) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0$. 对于任意的 $\phi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上至少能取到两次最大值, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期小于 $\frac{\pi}{6}$

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 内不一定取到最大值

C. $12 < \omega \leq \frac{52}{3}$

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 内一定会取到最小值

【分析】 先根据 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上至少能取到两次最大值可得 $T < \frac{\pi}{6}$, 据此可得 $\omega > 12$, 从而可得判断 AB 的正误, 再根据 $\omega x + \varphi$ 的范围可得判断 CD 的正误, 注意 ω 范围的进一步探究.

【解答】 解: 由题意可知, $T < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, 即 A 正确;

因为 $T = \frac{2\pi}{\omega} < \frac{\pi}{6}$, 所以 $\omega > 12$,

则当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 时, $\omega x + \varphi \in \left(\varphi, \frac{\pi}{12}\omega + \varphi\right)$,

$$\text{又 } \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}\omega + \varphi > \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 上一定有最大值点, 即 B 错误;

由题意可知, 任意 $\phi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, 总存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega + \phi \geq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12}\omega + \phi \leq 2k\pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ 故 } \begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} \geq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

整理得 $8k + \frac{4}{3} \leq \omega \leq 24k - 24$,

可得 $k \geq 2$, $\omega \geq 8 \times 2 + \frac{4}{3} = \frac{52}{3}$, 即 C 错误;

当 $x \in (0, \frac{\pi}{12})$ 时, $\omega x + \phi \in (\phi, \frac{\pi}{12}\omega + \phi)$,

又因为 $\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{2}$, $\omega > \frac{52}{3}$,

故 $\frac{\pi}{12}\omega + \phi \geq \frac{\pi}{12} \times \frac{52}{3} + \phi > \frac{13\pi}{9} + \frac{\pi}{6} = \frac{29}{18}\pi > \frac{3\pi}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 上一定有最小值点, 即 D 正确.

故选: AD.

【点评】 对于含参数的正弦型函数问题, 注意根据最值的特征合理刻画函数的性质, 从而得到参数的取值范围内, 此类问题, 整体法是处理此类问题的基本策略.

6. (2022·上海模拟) 某公司生产一种电子仪器的固定成本为 20000 元, 每生产一台仪器需增加投入 100 元,

已知总收益 (单位: 元) 满足 $R(x) = \begin{cases} 400x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 400 \\ 80000, & x > 400 \end{cases}$ 其中 x (单位: 台) 是仪器的月产量.

量.

(1) 将利润表示为月产量的函数 $f(x)$;

(2) 当月产量为何值时, 公司利润最大? 最大为多少元? (总收益 = 总成本 + 利润)

【分析】 (1) 利润 = 收益 - 成本, 由已知分两段当 $0 \leq x \leq 400$ 时, 和当 $x > 400$ 时, 求出利润函数的解析式;

(2) 分段求最大值, 两者大者为所求利润最大值.

【解答】 解: (1) 由于月产量为 x 台, 则总成本为 $20000 + 100x$,

从而利润 $f(x) = \begin{cases} 300x - \frac{1}{2}x^2 - 20000, & 0 \leq x \leq 400 \\ 60000 - 100x, & x > 400 \end{cases}$;

(2) 当 $0 \leq x \leq 400$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 300)^2 + 25000$,

所以当 $x = 300$ 时, 有最大值 25000;

当 $x > 400$ 时, $f(x) = 60000 - 100x$ 是减函数,

所以 $f(x) = 60000 - 100 \times 400 < 25000$.

所以当 $x = 300$ 时, 有最大值 25000,

即当月产量为 300 台时, 公司所获利润最大, 最大利润是 25000 元.

【点评】 本题考查函数模型的应用: 生活中利润最大化问题. 函数模型为分段函数, 求分段函数的最值, 应先求出函数在各部分的最值, 然后取各部分的最值的最大值为整个函数的最大值, 取各部分的最小者为整个函数的最小值.

二. 分段函数的应用 (共 18 小题)

7. (2023·新疆模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x - (x+1)^2, & x \geq 0 \\ -2x+1, & x < 0 \end{cases}$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $f(x)$ 图象上

存在关于原点对称的点仅有两对, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{2}{e})$ B. $(\frac{2}{e}, 1)$ C. $(1, \frac{2}{e})$ D. $(\frac{2}{e}, +\infty)$

【分析】 根据函数 $f(x)$ 图象上存在关于原点对称的点仅有两对, 可得 $y = a^x - (x+1)^2$ 与 $y = -2x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 即方程 $a^x - (x+1)^2 = -2x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根, 分离参数, 构造函数, 利用导数研究函数的单调性与最值, 数形结合即可得解.

【解答】 解: $y = -2x+1$ 关于原点对称的函数为 $-y = 2x+1$, 即 $y = -2x - 1$,

若函数 $f(x)$ 图象上存在关于原点对称的点仅有两对,

则 $y = a^x - (x+1)^2$ 与 $y = -2x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点,

所以方程 $a^x - (x+1)^2 = -2x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根,

即 $a^x = x^2$ ($x > 0$) 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根,

由 $\ln a^x = \ln x^2$, 得 $\ln a = \frac{2 \ln x}{x}$, 即 $\frac{1}{2} \ln a = \frac{\ln x}{x}$,

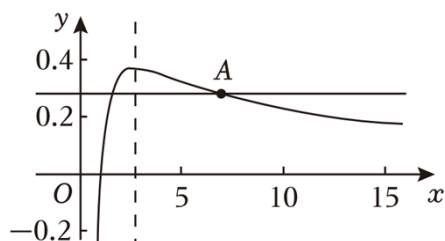
令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = e$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g(e) = \frac{1}{e}$,

如图所示, 所以 $a^x = x^2$ ($x > 0$) 有两个不同的实数根等价于 $y = \frac{1}{2} \ln a$ 与 $y = g(x)$ 有两个交点,

则满足 $0 < \frac{1}{2} \ln a < \frac{1}{e}$, 解得 $1 < a < \frac{2}{e}$, 即实数 a 的取值范围为 $(1, \frac{2}{e})$.

故选: C.



【点评】本题考查函数的对称性质，以及运用导数手段求函数的单调性研究零点问题，考查学生的综合应用数学知识分析问题、解决问题的能力，考查化归与转化思想的应用。

8. (2023·呼和浩特模拟) 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ \log_2(x+3), & x > 0 \end{cases}$ ，则 $f(f(-2)) = (\quad)$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】根据题意，由函数的解析式求出 $f(-2)$ 的值，进而计算可得答案。

【解答】解：根据题意，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ \log_2(x+3), & x > 0 \end{cases}$ ，则 $f(-2) = 4+1=5$ ，

则 $f(f(-2)) = \log_2 8 = 3$ 。

故选：C。

【点评】本题考查函数值的计算，涉及分段函数的解析式，属于基础题。

9. (2023·海口模拟) 函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ 的单调递减区间是 $(\quad)$

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, -2)$ 和 $(0, 2)$
C. $(-2, 2)$ D. $(-2, 0)$ 和 $(2, +\infty)$

【分析】根据题意，将 $f(x)$ 写成分段函数的形式，结合二次函数的性质分析可得答案。

【解答】解：根据题意，函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x < 0 \end{cases}$ ，

其递减区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, 2)$ 。

故选：B。

【点评】本题考查分段函数的性质以及应用，涉及二次函数的性质，属于基础题。

10. (2023·青秀区校级一模) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$ ，那么 $f(f(-1)) = (\quad)$

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

【分析】根据题意，由函数的解析式求出 $f(-1)$ 的值，进而计算可得答案。

【解答】解：根据题意，函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$ ，

则 $f(-1) = 1+1=2$ ，则 $f(f(-1)) = f(2) = 2^2=4$ ；

故选：D.

【点评】本题考查函数值的计算，涉及分段函数的解析式，属于基础题.

11. (2023·宜宾模拟) 若函数 $f(x) = \begin{cases} (x-m)^2-2, & x < 0 \\ 2x^3-3x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 的最小值是 -2，则实数 m 的取值范围是 ()

A. $m < 0$ B. $m \leq 0$ C. $m > 0$ D. $m \geq 0$

【分析】利用导数求出函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的极小值，然后对实数 m 的取值进行分类讨论，结合 $f(x)_{\min} = -2$ 可求得实数 m 的取值范围.

【解答】解：当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ，则 $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

所以，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = -1$ ，

因为函数 $f(x)$ 的最小值为 -2，当 $m \geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

此时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上无最小值，不合乎题意；

当 $m < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, m)$ 上单调递减，在 $(m, 0)$ 上单调递增，

此时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的极小值为 $f(m) = -2$ ，且 $-2 < -1$ ，则 $f(x)_{\min} = f(m) = -2$ ，

综上所述， $m < 0$.

故选：A.

【点评】本题主要考查分段函数的应用，属于基础题.

12. (2023·永州三模) 若函数 $y=f(x)$ 和 $y=f(-x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的单调性相同，则把区间 $[m, n]$ 叫做 $y=f(x)$ 的“稳定区间”. 已知区间 $[1, 2023]$ 为函数 $y = |(\frac{1}{2})^x + a|$ 的“稳定区间”，则实数 a 的可能取值是 ()

A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

【分析】根据题意，求出 $f(-x)$ 的解析式，进而分 2 种情况讨论：当 $a \geq 0$ 时，写出 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的解析式，分析易得不符合题意，当 $a < 0$ 时，将 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 写成分段函数的形式，分析可得关于 a 的不等式，取出 a 的取值范围，即可得答案.

【解答】解：根据题意，设 $f(x) = |(\frac{1}{2})^{x+a}|$, $f(-x) = |2^{x+a}|$,

若区间 $[1, 2023]$ 为函数 $y = |(\frac{1}{2})^x + a|$ 的“稳定区间”，则 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 在区间 $[1, 2023]$ 上单调性相同，

当 $a \geq 0$ 时， $f(x) = (\frac{1}{2})^{x+a}$ 在 $[1, 2021]$ 单调递减， $f(-x) = 2^{x+a}$ 在 $[1, 2021]$ 单调递增，不符合题意；

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } f(x) = |(\frac{1}{2})^{x+a}| = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{x+a}, & x < -\log_2(-a) \\ -(\frac{1}{2})^{x-a}, & x \geq -\log_2(-a) \end{cases}, \quad f(-x) = |2^{x+a}| = \begin{cases} -2^{x-a}, & x < \log_2 a \\ 2^{x+a}, & x \geq \log_2 a \end{cases},$$

又 $f(-x)$ 在 $(-\infty, \log_2(-a)]$ 上单调递减，在 $(\log_2(-a), +\infty)$ 上单调递增，

$f(x)$ 在 $(-\infty, -\log_2(-a)]$ 上单调递减，在 $(-\log_2(-a), +\infty)$ 上单调递增，

$$\begin{cases} \log_2(-a) \leq 1 \\ -\log_2(-a) \leq 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \log_2(-a) \geq 2023 \\ -\log_2(-a) \geq 2023 \end{cases},$$

所以 $\log_2(-a) \leq 1$ 且 $-\log_2(-a) \leq 1$ ，解可得 $-2 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ ，即 a 的取值范围为 $[-2, -\frac{1}{2}]$.

分析选项： B 符合.

故选： B .

【点评】本题考查分段函数的性质以及应用，涉及函数的单调性，属于中档题.

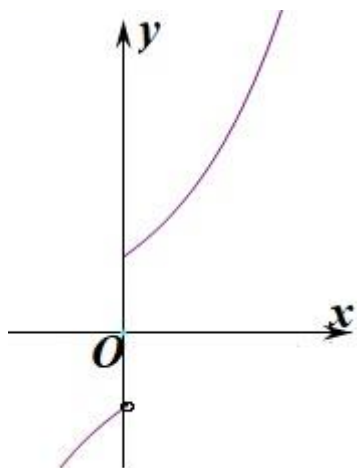
13. (2023·射洪市校级模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ -(\frac{1}{2})^x, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(a) < f(6-a)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

值范围是 ()

A. $(-3, +\infty)$ B. $(-\infty, -3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 3)$

【分析】结合图象，可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，由此解不等式 $f(a) < f(6-a)$.

【解答】解：根据函数 $f(x)$ 的图象，可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，



若 $f(a) < f(6-a)$, 则有 $a < 6-a$,

$$\therefore 2a < 6, \therefore a < 3,$$

则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 3)$.

故选: D.

【点评】本题考查分段函数的单调性, 属于基础题.

14. (2023·大通县二模) 已知实数 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \geq 0, \\ 2^{a-x}, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(1-a) = f(a-1)$, 则 a 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

【分析】根据分段函数的解析式, 结合分段条件分 $a < 1$ 和 $a > 1$ 两种情况讨论, 即可求解.

【解答】解: 由题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \geq 0 \\ 2^{a-x}, & x < 0 \end{cases}$,

当 $a < 1$ 时, 由 $f(1-a) = f(a-1)$ 可得 $4^{1-a} = 2^1$, 即 $2^{2-2a} = 2^1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$;

当 $a > 1$ 时, 由 $f(1-a) = f(a-1)$ 可得 $4^{a-1} = 2^{a-(1-a)}$, 即 $2^{2a-2} = 2^{2a-1}$, 此时方程无解,

综上可得, 实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$.

故选: A.

【点评】本题主要考查分段函数及其应用, 考查分类讨论思想与运算求解能力, 属于基础题.

15. (2023·九江模拟) 设函数 $f(x) = 4x + |x-a|$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a=6$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $4x-y+8=0$ 围成的三角形的面积;

(2) 若 $a < 0$, 且不等式 $f(x) < 2$ 的解集是 $(-\infty, -3)$, 求 a 的值.

【分析】(1) 根据题意, 分析可得 $f(x) = \begin{cases} 5x-6, & x \geq 6 \\ 3x+6, & x < 6 \end{cases}$, 求出曲线与直线 $4x - y + 8 = 0$ 的交点坐标,

进而计算答案;

(2) 根据题意, 结合 a 的范围, 分析求出不等式的解集, 由此可得关于 a 的方程, 解可得答案.

【解答】解: (1) 根据题意, 当 $a=6$ 时, $f(x) = 4x + |x - 6| = \begin{cases} 5x-6, & x \geq 6 \\ 3x+6, & x < 6 \end{cases}$,

$f(6) = 24$, 设 $C(6, 24)$;

直线 $4x - y + 8 = 0$ 与 $y = 3x + 6$ 交于点 $A(-2, 0)$, 与直线 $y = 5x - 6$ 交于点 $B(14, 64)$,

且 $|AB| = 16\sqrt{17}$,

点 $C(6, 24)$ 到直线 $4x - y + 8 = 0$ 的距离 $d = \frac{8}{\sqrt{17}}$,

则要求图形的面积 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = 64$;

(2) 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = 5x - a$, $f(x) < 2$ 即 $5x - a < 2$, 解可得 $x < \frac{a+2}{5}$, 此时有 $a \leq x < \frac{a+2}{5}$,

当 $x < a$ 时, $f(x) = 3x + a$, $f(x) < 2$ 即 $3x + a < 2$, 解可得 $x < \frac{2-a}{3}$,

又由 $a < 0$, 则 $\frac{2-a}{3} > a$, 此时有 $x < a$,

综合可得: 不等式的解集为 $\{x | x < \frac{a+2}{5}\}$,

则有 $\frac{a+2}{5} = -3$, 解可得 $a = -17$;

故 $a = -17$.

【点评】本题考查分段函数的性质以及应用, 涉及绝对值不等式的解集, 属于基础题.

16. (2023·北京模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \leq -2 \\ x \lg(x+2), & x > -2 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = 1$ 的实根在区间 $(k,$

$k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ 上, 则 k 的最大值是 ()

A. -3

B. -2

C. 1

D. 2

【分析】根据 x 的取值范围不同, 分别解出 $f(x) = 1$ 根即可得出答案.

【解答】解: 当 $x \leq -2$ 时, $f(x) = x^2 - 5$, 当 $f(x) = 1$ 时, 解得 $x = -\sqrt{6}$;

当 $x > -2$ 时, $f(x) = x \lg(x+2)$, 其中 $f(1) = \lg 3 < 1$, $f(2) = 2 \lg 4 = \lg 16 > 1$,

当 $f(x) = 1$ 时, 解得 $x \in (1, 2)$, 综上 k 的最大值是 1.

故选: C.

【点评】本题主要考查分段函数的应用，属于中档题.

17. (2023·古冶区校级模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > a \\ |x - a - 1|, & x \leq a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的最小值为 1, 则 a 的取值

范围是 ()

- A. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $[2\sqrt{2}, +\infty)$ D. $[4\sqrt{2}, +\infty)$

【分析】讨论分段函数各段上的函数性质，结合分类讨论研究函数最小值，进而确定 $a \geq 0$ 的情况下有满足要求的情况，再比较两段上最小值列不等式求参数范围.

【解答】解：由 $x \leq a$, 则 $x - a - 1 \leq -1$, 仅当 $x = a$ 时等号成立,

所以 $|x - a - 1| = a + 1 - x \geq 1$, 在 $(-\infty, a]$ 上递减, 且最小值为 1,

对于 $y = x^2 - 1$ 在 $(a, +\infty)$ 上, 当 $a < 0$ 时 $y_{\min} = -1$; 当 $a \geq 0$ 时 $y > a^2 - 1$, 无最小值;

显然, $a < 0$ 时 $f(x)$ 的最小值不为 1, 不合题意;

所以 $a \geq 0$, 此时必有 $a^2 - 1 \geq 1$, 可得 $a \geq \sqrt{2}$.

故选: B.

【点评】本题主要考查分段函数的应用，属于中档题.

18. (2023·湖北模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ae^{-x}, & x \leq 1 \\ \ln \frac{x}{a}, & x > 1 \end{cases}$ ($a > 0$) 图象上存在关于 y 轴对称的两点, 则正数

a 的取值范围是 ()

- A. $(e, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e}, e)$ D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

【分析】先分析 $f(x)$ 的单调性, 可得对称点分别位于 $y = ae^{-x}$ ($x \leq 1$) 与 $y = \ln \frac{x}{a}$ ($x > 1$) 的图象上,

从而得到 $ae^{x_0} = \ln \frac{x_0}{a}$ ($x_0 > 1$), 进而利用同构法, 构造函数 $\varphi(x) = e^x + x$ 得到 $\ln a = \ln x_0 - x_0$, 再构造

函数 $h(x) = \ln x - x$, $x \in (1, +\infty)$, 由此得解.

【解答】解：因为 $f(x) = \begin{cases} ae^{-x}, & x \leq 1 \\ \ln \frac{x}{a}, & x > 1 \end{cases}$ ($a > 0$),

所以当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = ae^{-x}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f(x) = \ln \frac{x}{a}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

又 $f(x)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的两点,

所以这两个对称点分别位于 $y=ae^{-x}$ ($x \leq 1$) 与 $y=\ln \frac{x}{a}$ ($x > 1$) 的图象上;

设 $P(x_0, y_0)$ 在 $y=\ln \frac{x}{a}$ ($x > 1$) 的图象上, 则 $P'(-x_0, y_0)$ 在函数 $y=ae^{-x}$ 的图象上, 且 $x_0 > 1$,

故有 $ae^{x_0} = \ln \frac{x_0}{a}$ ($x_0 > 1$), 即 $e^{x_0 + \ln a} + \ln a = \ln x_0$,

进而 $e^{x_0 + \ln a} + \ln a + x_0 = x_0 + \ln x_0 = e^{\ln x_0} + \ln x_0$;

设 $\varphi(x) = e^x + x$, 则 $\varphi(\ln a + x_0) = \varphi(\ln x_0)$,

又 $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$ 恒成立, 故 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $\ln a + x_0 = \ln x_0$, 即 $\ln a = \ln x_0 - x_0$,

令 $h(x) = \ln x - x$, $x \in (1, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(x) < h(1) = -1$, 则 $\ln a < -1$, 于是 $0 < a < \frac{1}{e}$.

故选: B.

【点评】 本题主要考查了分段函数的性质, 考查了利用导数研究函数的单调性和最值, 属于中档题.

19. (2023·东城区二模) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq a \\ x^2 & x > a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 为增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

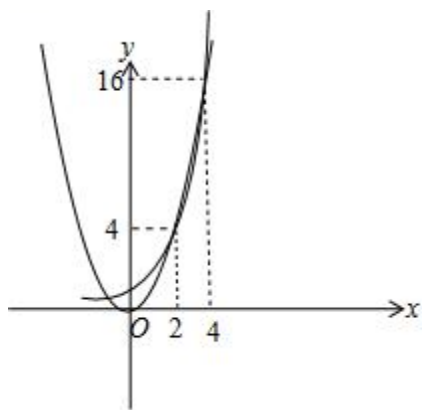
- A. $(0, 4]$ B. $[2, 4]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

【分析】 在同一平面直角坐标系中, 分别作出函数 $y=2^x$, 与 $y=x^2$ 的图象, 结合函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq a \\ x^2 & x > a \end{cases}$

为增函数, 即可得到实数 a 的取值范围.

【解答】 解: $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq a \\ x^2 & x > a \end{cases}$,

在同一平面直角坐标系中, 分别作出函数 $y=2^x$, 与 $y=x^2$ 的图象如图:



由图可知，要使函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq a \\ x^2 & x > a \end{cases}$ 为增函数，则 $2 \leq a \leq 4$.

∴ 实数 a 的取值范围是 $[2, 4]$.

故选：B.

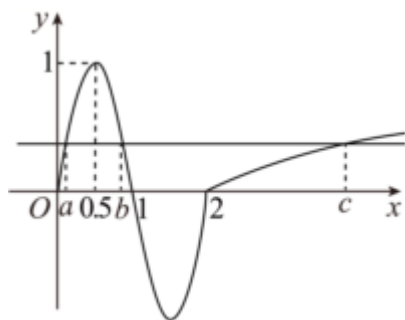
【点评】本题考查分段函数的应用，考查数形结合思想，是中档题.

20. (2023•嘉定区校级三模) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 2] \\ \log_{2023}(x-1), & x \in (2, +\infty) \end{cases}$ ，若满足 $f(a) = f(b) = f(c)$ (a, b, c 互不相等)，则 $a+b+c$ 的取值范围是 ()

A. $(3, 2023.5)$ B. $(3, 2024)$ C. $[3, 2024)$ D. $[3, 2025)$

【分析】作出函数 $f(x)$ 的图像，根据三角函数对称性得 $a+b=1$ ，解 $0 \leq \log_{2023}(c-1) < 1$ ，得 $c \in [2, 2024)$ ，进而得答案.

【解答】解：作出函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 2] \\ \log_{2023}(x-1), & x \in (2, +\infty) \end{cases}$ 的图像，不妨设 $a < b < c$ ，如图，



根据三角函数的对称性得可得 $a+b=1$,

由 $0 \leq \log_{2023}(c-1) < 1$ ，得 $c \in [2, 2024)$,

∴ $a+b+c \in [3, 2025)$,

故选：D.

【点评】本题主要考查分段函数及其应用，考查数形结合思想与运算求解能力，属于中档题.

21. (2023·嵊州市模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4\ln x + 1, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$, 若 $p \neq q$, 且 $f(p) + f(q) = 2$, 则 $p+q$ 的最

小值是 ()

A. $2 - 2\ln 2$

B. $3 - 2\ln 2$

C. $4 - 2\ln 3$

D. 2

【分析】由 $p \neq q$, 且 $f(p) + f(q) = 2$, 得 p 与 q 一个大于 1, 一个小于 1, 不妨设 $p < 1, q > 1$, 由 $f(p) + f(q) = 2$, 得 $p = 1 - 2\ln q$, 得到 $p+q = -2\ln q + q + 1, q > 1$, 构造函数 $h(x) = -2\ln x + x + 1, x > 1$, 利用导数求其最小值即可.

【解答】解: 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 4\ln x + 1 \geq 1$,

当 $x < 1$ 时, $f(x) = 2x - 1 < 1$,

由 $p \neq q$, 且 $f(p) + f(q) = 2$, 得 p 与 q 一个大于 1, 一个小于 1,

不妨设 $p < 1, q > 1$,

则 $2p - 1 + 4\ln q + 1 = 2$, 即 $p = 1 - 2\ln q$,

$\therefore p+q = -2\ln q + q + 1, q > 1$,

令 $h(x) = -2\ln x + x + 1, x > 1, h'(x) = -\frac{2}{x} + 1 = \frac{x-2}{x}$,

可得当 $x \in (1, 2)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $h(x)$ 取得最小值为 $3 - 2\ln 2$.

$\therefore p+q$ 的最小值是 $3 - 2\ln 2$.

故选: B.

【点评】本题考查分段函数及其运用, 考查运算求解能力, 属于中档题.

22. (2023·南昌三模) 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - ax^2, & x > 0 \\ -x^2 + (a-2)x + 2a, & x \leq 0 \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-$

$2, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-2, \frac{e}{2}]$

B. $[0, \frac{e}{2}]$

C. $[0, \frac{e^2}{4}]$

D. $\{0\} \cup [\frac{e^2}{4}, +\infty)$

【分析】讨论 $x > 0$ 时不等式 $f(x) \geq 0$ 可化为 $a \leq \frac{e^x}{x^2}$, 构造函数 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 利用导数求 $g(x)$ 的最

小值, 可求出 a 的取值范围, 当 $x \leq 0$ 时根据二次函数与一元二次不等式的关系, 求出不等式 $f(x) \geq 0$

的解集，从而求得 a 的取值范围.

【解答】解：因为函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - ax^2, & x > 0 \\ -x^2 + (a-2)x + 2a, & x \leq 0 \end{cases}$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - ax^2$, 由 $f(x) \geq 0$, 可得 $a \leq \frac{e^x}{x^2}$,

设 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 可得 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调

递增,

所以 $g(x) > g(2) = \frac{e^2}{4}$,

所以 $a \leq \frac{e^2}{4}$;

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x^2 + (a-2)x + 2a = -(x+2)(x-a)$,

当 $a > -2$ 时, $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, a]$;

当 $a \leq -2$ 时, $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[a, -2]$, 不满足题意, 舍去.

因为关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, +\infty)$,

当 $a \geq 0$ 时, $[-2, a] \cap (-\infty, 0] = [-2, 0]$, 满足 $[-2, 0] \cup (0, +\infty) = [-2, +\infty)$;

当 $-2 < a < 0$ 时, $[-2, a] \cap (-\infty, 0] = [-2, a]$, 不满足 $[-2, a] \cup (0, +\infty) = [-2, +\infty)$.

综上, a 的取值范围是 $[0, \frac{e^2}{4}]$.

故选: C.

【点评】本题考查了分段函数的性质与应用问题, 也考查了分类讨论思想, 是难档题.

23. (2023•丹东模拟) 设函数 $y=f(x)$ 由关系式 $x|x+y|y|=1$ 确定, 函数 $g(x) = \begin{cases} -f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$, 则()

A. $g(x)$ 为增函数

B. $g(x)$ 为奇函数

C. $g(x)$ 值域为 $[-1, +\infty)$

D. 函数 $y=f(-x) - g(x)$ 没有正零点

【分析】根据题意, 在同一坐标系内画出函数 $y=f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象, 结合图象判断选项中的命题是否成立即可.

【解答】解：因为函数 $y=f(x)$ 由关系式 $x|x|+y|y|=1$ 确定，所以 $y=f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x^2-1}, & x\geq 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leq x<1, \\ \sqrt{1+x^2}, & x<0 \end{cases}$

作出 $f(x)$ 的图象，如图所示：

$$\text{因为函数 } g(x)=\begin{cases} -f(x), & x\geq 0, \\ f(-x), & x<0. \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x\geq 1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0\leq x<1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0 \\ -\sqrt{x^2-1}, & x\leq -1 \end{cases},$$

在同一坐标系中作出 $g(x)$ 的图象，如图所示：

$g(x)$ 在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上不是增函数，选项 A 错误；

因为 $g(0)=-1\neq 0$ ，所以 $g(x)$ 不是定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，选项 B 错误；

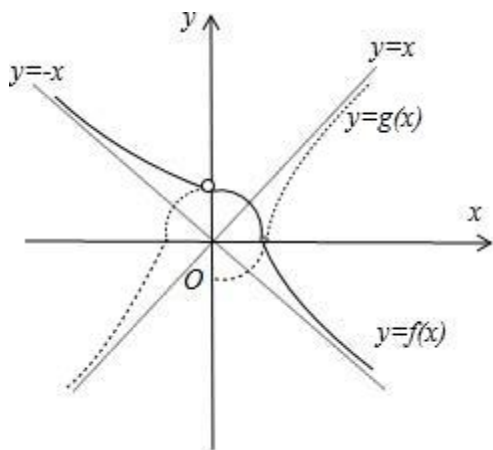
$g(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$ ，所以选项 C 错误.

当 $x\geq 0$ 时，函数 $f(-x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的上方， $y=f(-x)-g(x)$ 有零点是 0 ，

当 $x<0$ 时，函数 $f(-x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的下方， $y=f(-x)-g(x)$ 有零点是 0 ，

所以函数 $y=f(-x)-g(x)$ 没有正零点，选项 D 正确.

故选： D .



【点评】本题考查了分段函数的图象和性质应用问题，也考查了分类讨论与数形结合思想，是难题.

24. (2023·黄埔区校级模拟) 已知函数 $f(x)=m-|x-1|-|x+1|$.

(1) 当 $m=5$ 时，求不等式 $f(x)>2$ 的解集；

(2) 若二次函数 $y=x^2+2x+3$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象恒有公共点，求实数 m 的取值范围.

【分析】(1) 当 $m=5$

时，把要解的不等式等价转化为与之等价的三个不等式组，求出每个不等式组的解集，再取并集，即得所求.

(2) 由二次函数 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ 在 $x=-1$ 取得最小值 2, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最大值 $m-2$, 故有 $m-2 \geq 2$, 由此求得 m 的范围.

【解答】解：(1) 当 $m=5$ 时, $f(x)=\begin{cases} 5+2x & (x < -1) \\ 3 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 5-2x & (x > 1) \end{cases}$, ... (3 分)

由 $f(x) > 2$ 得不等式的解集为 $\{x \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}\}$ (5 分)

(2) 由二次函数 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, 该函数在 $x=-1$ 取得最小值 2,

因为 $f(x)=\begin{cases} m+2x & (x < -1) \\ m-2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ m-2x & (x > 1) \end{cases}$, 在 $x=-1$ 处取得最大值 $m-2$, ... (8 分)

所以要使二次函数 $y=x^2+2x+3$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象恒有公共点,

只需 $m-2 \geq 2$, 即 $m \geq 4$ (10 分)

【点评】本题主要考查绝对值不等式的解法, 关键是去掉绝对值, 化为与之等价的不等式组来解; 还考查了函数的恒成立问题, 体现了转化的数学思想, 属于中档题.

三. 根据实际问题选择函数类型 (共 18 小题)

25. (2023·全国二模) 大气压强 $p = \frac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$, 它的单位是“帕斯卡”(Pa, $1\text{Pa}=1\text{N}/\text{m}^2$), 已知大气压强 p (Pa) 随高度 h (m) 的变化规律是 $p=p_0 e^{-kh}$, 其中 p_0 是海平面大气压强, $k=0.000126\text{m}^{-1}$. 当地高山上一处大气压强是海平面处大气压强的 $\frac{1}{3}$, 则高山上该处的海拔为 8730 米. (答案保留整数, 参考数据 $\ln 3 \approx 1.1$)

【分析】根据题意解方程 $p_0 e^{-kh} = \frac{1}{3} p_0$ 即可得解.

【解答】解: 由题意可知: $p=p_0 e^{-kh} = \frac{1}{3} p_0$, 解得 $-kh = -\ln 3$,

所以 $h = \frac{\ln 3}{k} = \frac{\ln 3}{0.000126} \approx 8730$ (m).

故答案为: 8730.

【点评】本题主要考查函数在实际问题中的应用, 考查运算求解能力, 属于基础题.

26. (2023·西城区校级三模) 某辆汽车每次加油都把油箱加满, 下表记录了该车相邻两次加油时的情况.

加油时间	加油量（升）	加油时的累计里程（千米）
------	--------	--------------

2023 年 5 月 1 日	12	35000
2023 年 5 月 15 日	60	35500

注：“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程

在这段时间内，该车每 100 千米平均耗油量为（ ）

- A. 6 升 B. 8 升 C. 10 升 D. 12 升

【分析】由表格信息，得到该车加了 60 升的汽油，跑了 500 千米，由此得到该车每 100 千米平均耗油量.

【解答】解：由表格得到从 5 月 1 日到 15 日，该车加了 60 升的汽油，这段时间行驶的路程为 35500 千米-35000 千米=500 千米，

所以该车每 100 千米平均耗油量 $60 \div 5 = 12$ （升）.

故选：D.

【点评】本题考查了学生对表格的理解以及对数据信息的处理能力，属于基础题.

- 27.（2023•驻马店三模）水雾喷头布置的基本原则是：保护对象的水雾喷头数量应根据设计喷雾强度、保护面积和水雾喷头特性，按水雾喷头流量 q （单位： L/min ）计算公式为和保护对象的水雾喷头数量 N 计算公式为计算确定，其中 P 为水雾喷头的工作压力（单位： MPa ）， K 为水雾喷头的流量系数（其值由喷头制造商提供）， S 为保护对象的保护面积， W 为保护对象的设计喷雾强度（单位： $L/min \cdot m^2$ ），水雾喷头的布置应使水雾直接喷射和完全覆盖保护对象，如不能满足要求时应增加水雾喷头的数量. 当水雾喷头的工作压力 P 为 $0.35MPa$ ，水雾喷头的流量系数 K 为 24.96，保护对象的保护面积 S 为 $14m^2$ ，保护对象的设计喷雾强度 W 为 $20L/min \cdot m^2$ 时，保护对象的水雾喷头的数量 N 约为（ ）（参考数据：）

- A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

【分析】根据已知公式和数据代入计算即可.

【解答】解：由水雾喷头的工作压力 P 为 $0.35MPa$ ，水雾喷头的流量系数 K 为 24.96，
得 $q = K\sqrt{10P} = 24.96 \times \sqrt{3.5}$,

再由保护对象的保护面积 S 为 $14m^2$ ，保护对象的设计喷雾强度 W 为 $20L/min \cdot m^2$,

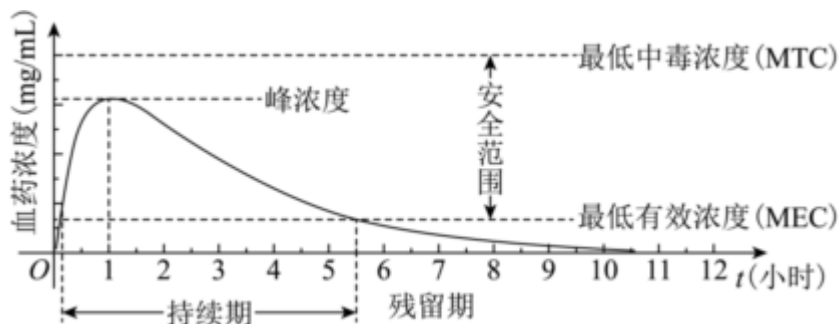
$$\text{得 } N = \frac{S \cdot W}{q} = \frac{14 \times 20}{24.96 \times \sqrt{3.5}} \approx \frac{14 \times 20}{24.96 \times 1.87} \approx 6,$$

即保护对象的水雾喷头的数量 N 约为 6 个.

故选：C.

【点评】本题主要考查了函数的实际应用，考查了学生的计算能力，属于基础题.

28. (2023·密云区三模) 血药浓度 (Plasma Concentration) 是指药物吸收后在血浆内的总浓度. 药物在人体内发挥治疗作用时, 该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间. 已知成人单次服用 1 单位某药物后, 体内血药浓度及相关信息如图所示:



根据图中提供的信息, 下列关于成人使用该药物的说法中:

- ①首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后, 药物发挥治疗作用;
- ②每次服用该药物 1 单位, 两次服药间隔小于 2 小时, 一定会产生药物中毒;
- ③每间隔 5.5 小时服用该药物 1 单位, 可使药物持续发挥治疗作用;
- ④首次服用该药物 1 单位 3 小时后, 再次服用该药物 1 单位, 不会发生药物中毒.

其中正确说法的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】根据图象, 结合题意, 逐一判断每个选项即可.

【解答】解: 由图可知, 首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后, 药物发挥治疗作用所以①正确;

服用该药物 1 单位后, 药物的持续作用时间约为 5.5 小时, 所以②错误, ③正确;

首次服用该药物 1 单位 3 小时后, 再次服用该药物 1 单位, 累计浓度会超过最低中毒浓度, 会发生药物中毒, 所以④错误.

所以正确的有①③,

故选: B.

【点评】本题考查了函数的图象, 考查学生的阅读能力和数据分析能力, 属于基础题.

29. (2023·广西模拟) 荀子《劝学》中说: “不积跬步, 无以至千里; 不积小流, 无以成江海.” 所以说学习是日积月累的过程, 每天进步一点点, 前进不止一小点. 我们可以把 $(1+1\%)^{365}$ 看作是每天的“进步”率都是 1%, 一年后是 $1.01^{365} \approx 37.7834$; 而把 $(1-1\%)^{365}$ 看作是每天“退步”率都是 1%, 一年

后是 $0.99^{365} \approx 0.0255$; 这样, 一年后的“进步值”是“退步值”的 $\frac{1.01^{365}}{0.99^{365}} \approx 1481$ 倍. 那么当“进步”

的值是“退步”的值的 2 倍, 大约经过 () 天. (参考数据: $\lg 101 \approx 2.0043$, $\lg 99 \approx 1.9956$, $\lg 2 \approx$

0.3010)

A. 35

B. 25

C. 15

D. 9

【分析】设经过 x 天“进步”的值是“退步”的值的 2 倍，则 $(\frac{1.01}{0.99})^x = 2$ ，再利用对数的运算性质求出 x 的值即可.

【解答】解：设经过 x 天“进步”的值是“退步”的值的 2 倍，

$$\text{则 } (\frac{1.01}{0.99})^x = 2,$$

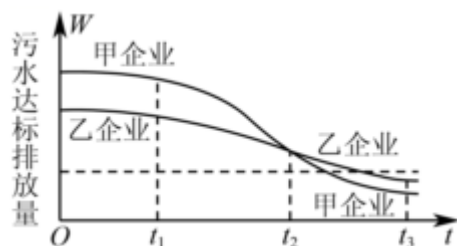
$$\therefore x = \log_{\frac{1.01}{0.99}} 2 = \frac{\lg 2}{\lg \frac{1.01}{0.99}} = \frac{\lg 2}{\lg \frac{101}{99}} = \frac{\lg 2}{\lg 101 - \lg 99} \approx \frac{0.3010}{2.0043 - 1.9956} = \frac{0.3010}{0.0087} \approx 35,$$

即大约经过 35 天“进步”的值是“退步”的值的 2 倍.

故选：A.

【点评】本题主要考查了函数的实际应用，考查了对数的运算性质，属于基础题.

30. (2023·闵行区校级二模) 某环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改、设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$ ，用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱，已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示. 则下列正确的命题是 ()



- A. 在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业弱
- B. 在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业弱
- C. 在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放都不达标
- D. 甲企业在 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ 这三段时间中，在 $[t_1, t_2]$ 的污水治理能力最强

【分析】根据题目中的数学模型建立关系，比较甲乙企业的污水治理能力.

【解答】解：设甲企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=h(t)$ ，乙企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=g(t)$,

对于 A 选项，在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力 $h(t) = -\frac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$,

乙企业的污水治理能力 $g(t) = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. 由图可知, $h(t_1) - h(t_2) > g(t_1) - g(t_2)$,

所以 $h(t) > g(t)$, 即甲企业的污水治理能力比乙企业强, 故 A 选项错误;

对于 B 选项, 由图可知, $h(t)$ 在 t_2 时刻的切线斜率小于 $g(t)$ 在 t_2 时刻的切线斜率,

但两切线斜率均为负值, 故在 t_2 时刻甲企业的污水治理能力比乙企业强, 故 B 选项错误;

对于 C 选项, 在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放都小于污水达标排放量,

故甲、乙两企业的污水排放都达标, 故 C 选项错误;

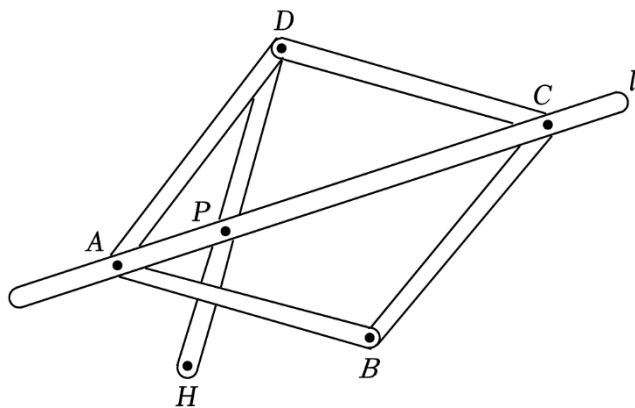
对于 D 选项, 由图可知, 甲企业在 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ 这三段时间中,

在 $[t_1, t_2]$ 时的污水治理能力最强, 故 D 选项正确,

故选: D.

【点评】 本题考查利用数学解决实际生活问题, 考查读图和识图能力, 属于中档题.

31. (2023·潍坊二模) 如图, 菱形架 $ABCD$ 是一种作图工具, 由四根长度均为 4 的直杆用铰链首尾连接而成. 已知 A, C 可在带滑槽的直杆 l 上滑动; 另一根带滑槽的直杆 DH 长度为 4, 且一端记为 H , 另一端用铰链连接在 D 处, 上述两根带滑槽直杆的交点 P 处有一栓子 (可在带滑槽的直杆上滑动). 若将 H, B 固定在桌面上, 且两点之间距离为 2, 转动杆 HD , 则点 P 到点 B 距离的最大值为 3.



【分析】 根据题意分析可得 $|PH| + |PB| = 4$, 故点 P 的轨迹为以 B, H 为焦点的椭圆, 结合椭圆的性质分析运算.

【解答】 解: 如图, 连接 BD, PB, BH ,

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/906014124025010123>

