第11章 线性离散控制系统数学描述与分析

吉林大学仪器科学与电气工程学院
随阳铁

主要内容

- 脉冲传递函数
- 离散状态空间描述
- 连续系统状态方程的离散化
- 线性定常离散系统的稳定性分析
- 离散控制系统的稳态误差分析

11.1脉冲传递函数

离散系统脉冲传递函数的定义为:当初始条件为零时，系统的输出的Z变换与输入的Z变换之比叫脉冲传递函数(也叫Z传递函数)。

Z传递函数仅取决于系统本身的特性，与输入序列无关。

11.1.1求脉冲传递函数

(1)由离散系统的差分方程，求脉冲传递函数

$$y(k)+b_1y(k-1)+b_2y(k-2)+\cdots+b_ny(k-n)$$
$$=a_0u(k)+a_1u(k-1)+\cdots+a_mu(k-m)$$

求脉冲传递函数（续1）

对上式两端取Z变换，利用Z变换实数平移定理，并考虑初始条件为零。

$$Y(z)+b_1z^{-1}Y(z)+b_2z^{-2}Y(z)+\cdots+b_nz^{-n}Y(z)$$

$$=a_0U(z)+a_1z^{-1}U(z)+\cdots+a_mz^{-m}U(z)$$

脉冲传递函数写为：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}=\frac{\sum_{i=0}^{m}a_iz^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{n}b_iz^{-i}}$$

<u>例11.1</u>已知差分方程如下，求脉冲传递函数

$$y(k)-\frac{1}{2}y(k-1)=u(k-1)$$

求脉冲传递函数（续2）

(2)已知离散系统的单位脉冲响应$h(k)$，脉冲传递函数$G(z)=Z[h(k)]$

(3)已知连续系统的传递函数$G(s)$，求Z传递函数，按如下三步进行：

①$g(t)=L^{-1}[G(s)]$

②将$g(t)$按采样周期T离散化，求出$g(0)$，$g(1)$，…等的值；

③由Z变换的定义求离散的Z传递函数即

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}$$

传递函数求Z传递函数举例

例11.2已知连续系统的传递函数$G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$，求对应的离散系统的Z传递函数。

解：

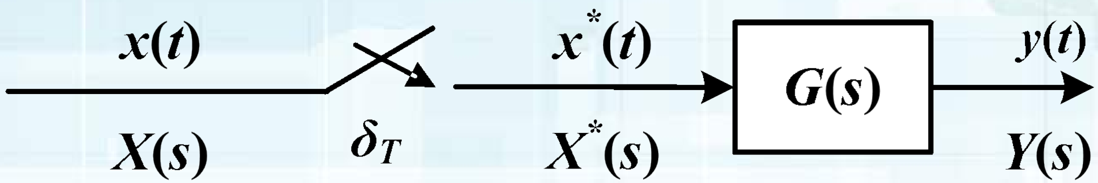
$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1/2}{s}+\frac{-1/2}{s+2}$$

$$G(z)=\frac{\frac{1}{2}z}{z-1}-\frac{\frac{1}{2}z}{z-e^{-2T}}=\frac{\frac{1}{2}z(z-e^{-2T})-\frac{1}{2}z(z-1)}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

11.1.2对开环和闭环求Z传递函数

1.脉冲采样信号的拉氏变换



带有冲激采样的系统

$$Y(s)=X^*(s)G(s)$$

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$$

$$=x(0)\delta(t)+x(T)\delta(t-T)+\cdots+x(kT)\delta(t-kT)+\cdots$$

$$X^*(s)=L[x^*(t)]=x(0)L[\delta(t)]+x(T)L[\delta(t-T)]+\cdots$$

$$+x(kT)L[\delta(t-kT)]+\cdots=x(0)+x(T)e^{-Ts}+x(2T)e^{-2Ts}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-kTs}$$

时域采样的拉氏变换就是Z变换

采样信号的拉氏变换的周期性

若 $L[x^*(t)] = X^*(s)$ 则 $X^*(s + jk\omega_s) = X^*(s)$

证明：采样信号的谱是原信号的谱以采样频率为周期延拓并乘以1/*T*倍，即表示为

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s)$$

$$X^*(s + jk\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[(s + jk\omega_s) + jn\omega_s] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[s + (jk\omega_s + jn\omega_s)]$$

令*n*+*k*=*n'*则有

$$X^*(s + jk\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n`=-\infty}^{\infty} X(s + jn'\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s) = X^*(s)$$

星号的运算

$$[X^*(s)G(s)]^* = X^*(s)[G(s)]^* = X^*(s)G^*(s)$$

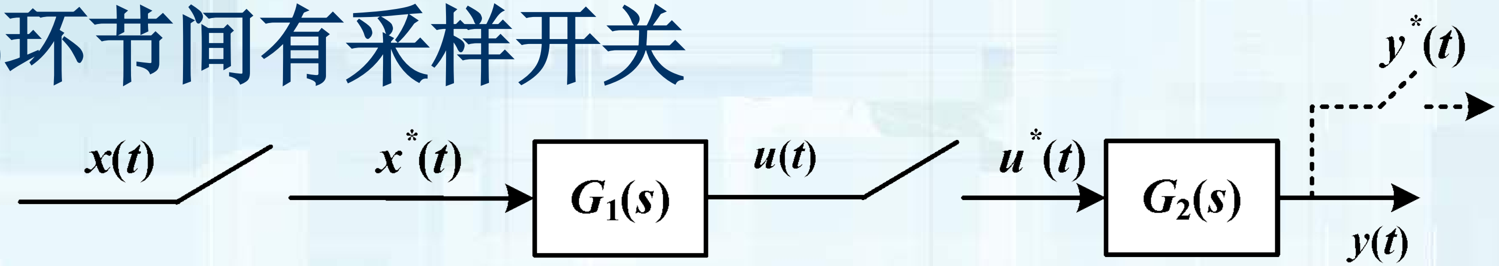
证明：根据采样信号的拉氏变换的周期性，并考虑同步匀速率采样有下列关系：

$$[X^*(s)G(s)]^* = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[X^*(s+jn\omega_s)G(s+jn\omega_s)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X^*(s)G(s+jn\omega_s)$$

$$= X^*(s)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(s+jn\omega_s) = X(s)^*[G(s)]^* = X^*(s)G^*(s)$$

串联环节的脉冲传递函数

(1)环节间有采样开关



$$\begin{cases} U(s) = G_1(s)X^*(s) \\ Y(s) = G_2(s)U^*(s) \end{cases}$$

取$U(s)$和$Y(s)$的采样形式

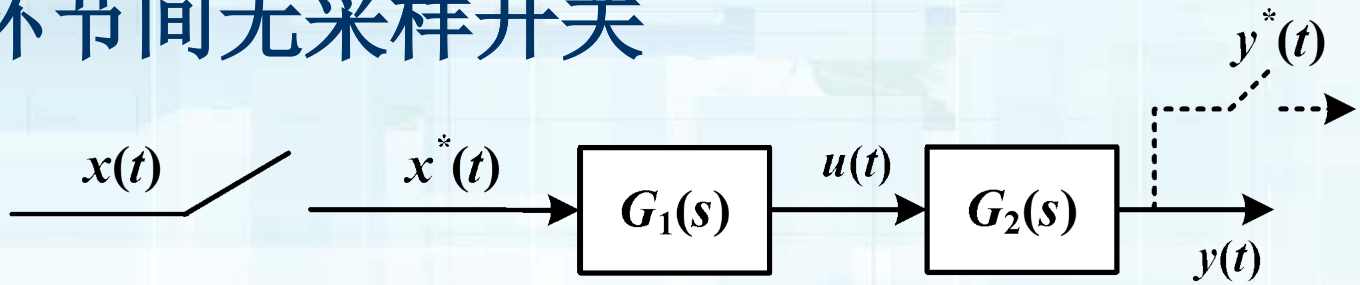
$$\begin{cases} U^*(s) = [G_1(s)X^*(s)]^* = G_1^*(s)X^*(s) \\ Y^*(s) = [G_2(s)U^*(s)]^* = G_2^*(s)U^*(s) \end{cases}$$

将$Y^*(s)$写成Z变换的形式，则开环脉冲传递函数：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z)G_2(z)$$

串联环节的脉冲传递函数（续1）

(2)环节间无采样开关



$$Y(s)=G_1(s)G_2(s)X^*(s)$$

$$Y^*(s)=[G_1(s)G_2(s)X^*(s)]^*=[G_1(s)G_2(s)]^*X^*(s)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=Z[G_1(s)G_2(s)]=G_1G_2(z)=G_2G_1(z)$$

结论：环节间无采样开关的Z传递函数是连续环节的传递函数乘积之后求Z 变换。

串联环节的脉冲传递函数（续2）

特别强调：

$$G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z) = G_2G_1(z) = Z[G_1(s)G_2(s)]$$

例11.3已知环节 $G_1(s)=\frac{1}{s}$，环节 $G_2(s)=\frac{1}{s+1}$ 分别求出环节间接入采样开关和不接入采样开关时开环系统的脉冲传递函数。

解：插/未插采样开关的开环脉冲传递函数

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = G_1(z)G_2(z) = Z[\frac{1}{s}]Z[\frac{1}{s+1}] = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = Z[G_1(s)G_2(s)] = Z[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}$$

插入零阶保持器的脉冲传递函数

零阶保持器常与连续对象组合起来构成广义对象

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=G(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot G_p(s)]=Z[\frac{G_P(s)}{s}]-Z[\frac{G_p(s)}{s}e^{-Ts}]$$

$$=(1-z^{-1})Z[\frac{G_p(s)}{s}]$$

例11.4已知被控对象为 $G_p(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，插入零阶保持器 $G_0(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 与被控对象组成广义对象，试求开环系统的脉冲传递函数。

插入零阶保持器的脉冲传递函数（续）

解： $$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1-z^{-1})Z[\frac{G_P(s)}{s}]$$

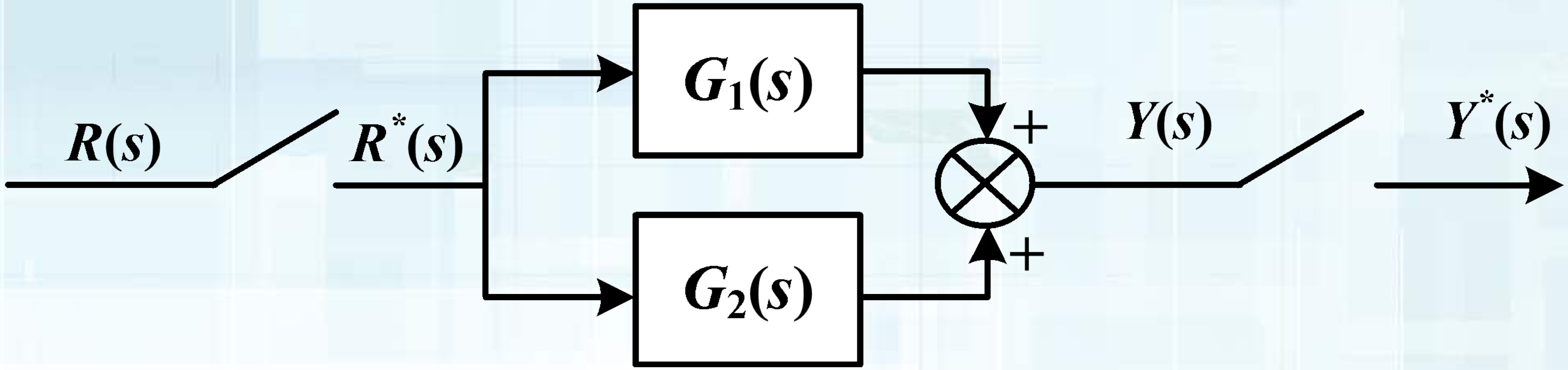
$$Z[\frac{G_P(s)}{s}] = Z[\frac{1}{s^2(s+1)}] = Z[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}] = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1-z^{-1})(\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}})$$

$$= \frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}} = \frac{T(z-e^{-T}) - (z-1)(z-e^{-T}) + (z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$= \frac{(T+e^{-T}-1)z + (1-Te^{-T}-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

环节并联的脉冲传递函数

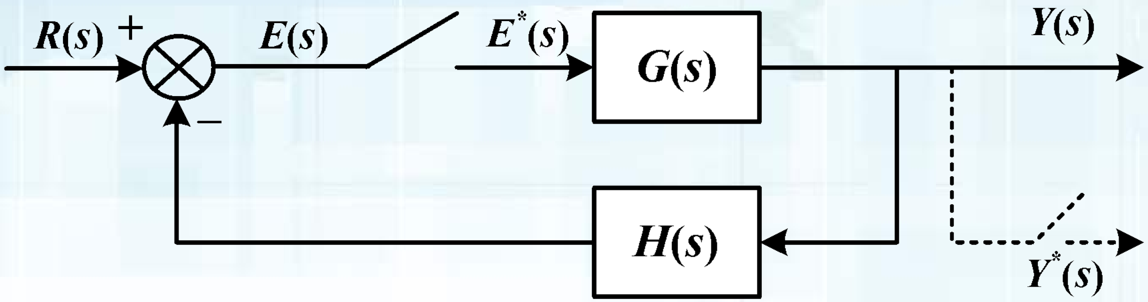


$$\frac{Y(z)}{R(z)} = Z[G_1(s)+G_2(s)] = Z[G_1(s)]+Z[G_2(s)] = G_1(z)+G_2(z)$$

***n*个环节的并联，系统的总的脉冲传递函数是每个环节的脉冲传递函数之和。**

反馈连接的闭环脉冲传递函数

(1)前向通道设有采样开关



由输出端和误差节点列写方程:

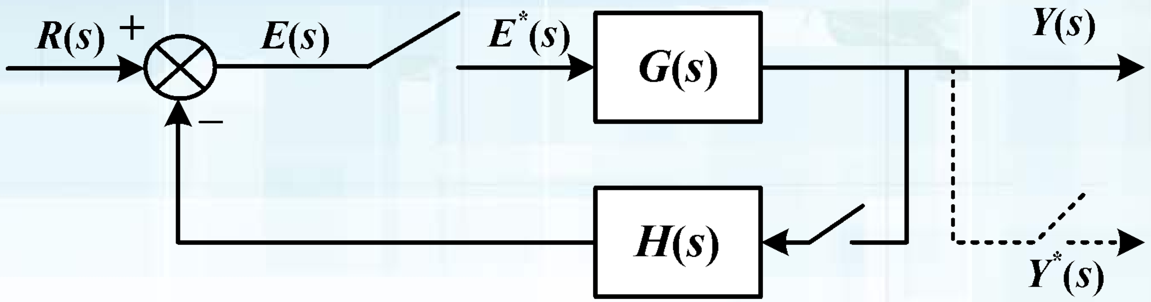
$$\begin{cases} Y(s)=E^{*}(s)G(s) \\ E(s)=R(s)-E^{*}(s)G(s)H(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s)^{*}=\frac{R(s)^{*}G(s)^{*}}{1+G(s)^{*}H(s)} \Rightarrow Y(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+GH(z)}$$

在误差节点列写方程:

$$\frac{E^{*}(s)}{R^{*}(s)}=\frac{1}{1+G^{*}(s)H(s)} \Rightarrow \frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+HG(z)}=\frac{1}{1+GH(z)}$$

闭环脉冲传递函数（续1）

(2)在反馈回路设有采样开关

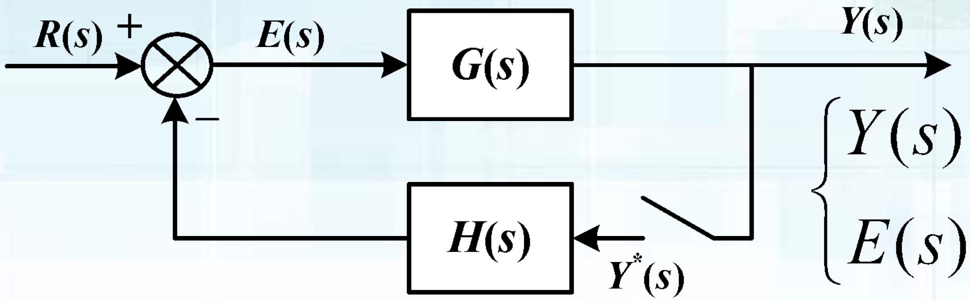


$$\begin{cases} Y(s) = E^*(s)G(s) \\ E(s) = R(s) - E^*(s)G^*(s)H(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} Y^*(s) = [E^*(s)G(s)]^* \\ E^*(s) = [R(s) - E^*(s)G^*(s)H(s)]^* \end{cases}$$

$$\frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1+G^*(s)H^*(s)} \qquad \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

闭环脉冲传递函数（续2）

(3)前向通道(误差处)不设采样开关



$$\begin{cases} Y(s) = E(s)G(s) \\ E(s) = R(s) - [E(s)G(s)]^{*} H(s) \end{cases}$$

$$Y^{*}(s) = G^{*}(s)E(s) = \frac{G^{*}(s)R(s)}{1 + H(s)G^{*}(s)}$$

$$Y(z) = \frac{GR(z)}{1 + HG(z)} = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)}$$

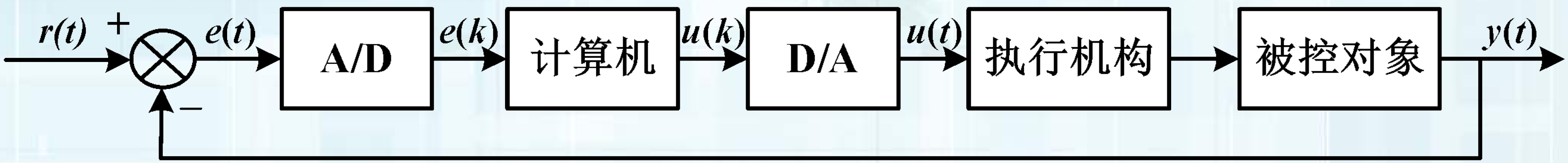
R*(*s*)**不能从G*(*s*)*R**(*s*)**中独立出来，误差通道不设采样开关，则只存在输出的*Z*变换表达，而不存在脉冲传递函数。这是与连续系统的重要区别。

求脉冲传递函数总结

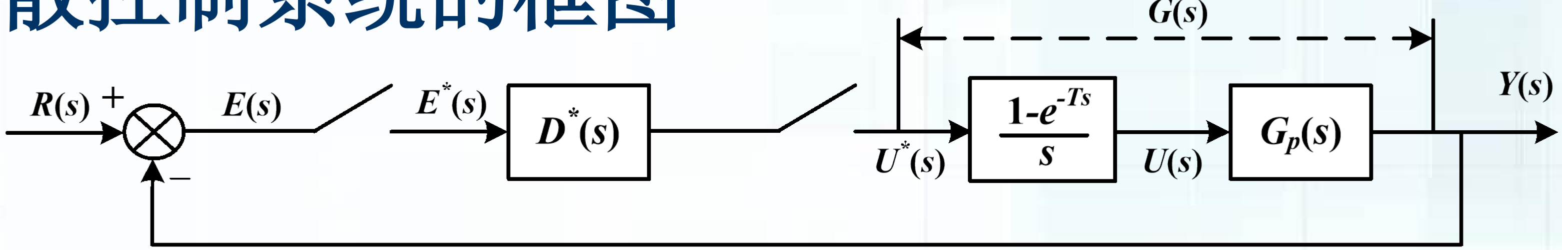
1. 采样开关的位置与脉冲传递函数关系密切，特别是当在误差通道不设采样开关时，系统的脉冲传递函数不存在，只有输出的Z变换表达式。
2. 对$[G^*(s)H^*(s)]$和$[G^*(s)H(s)]$ 取Z变换，结果分别为$G(z)H(z)$和$HG(z)$或$GH(z)$，对$[G^*(s)H(s)]$或$[G(s)H^*(s)]$取Z变换，就是对$[G(s)H(s)]^*$ 取Z变换。
3. 可以根据离散系统的梅森公式直接列写离散系统输出的Z变换表达式，注意将$R(s)$当成一个环节画在方框图上，并且把凡是没有被采样开关作用的所有传递函数先乘积后当成一个独立环节。

由脉冲传递函数求响应

离散控制系统的结构框图



离散控制系统的框图



$$Y(s)=E^*(s)D^*(s)G(s)$$

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)-E^*(s)D^*(s)G(s)$$

$$\frac{Y^*(s)}{R^*(s)}=\frac{D^*(s)G^*(s)}{1+G^*(s)D^*(s)} \qquad \frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

闭环系统输出响应的计算步骤

1.将脉冲传递函数改写成输出形式：

$$Y(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

2.将$R(z)$的具体输入波形表达式(如单位阶跃等输入函数)代入闭环系统的输出式$Y(z)$中；

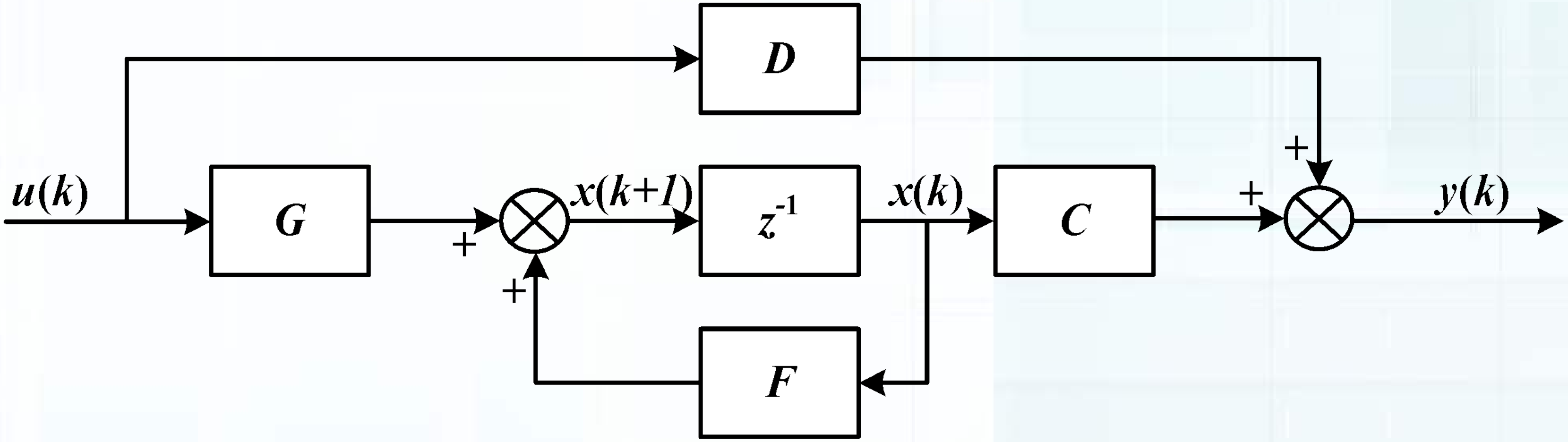
3.将$Y(z)$部分分式展开求Z反变换；

4.通过计算机迭代计算(简单的通过手算)$y(k)$响应序列。

11.2离散状态空间描述

线性常系数离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$



可控标准型

设系统的差分方程为

$$y(k)+b_1y(k-1)+b_2y(k-2)+\cdots+b_ny(k-n)$$

$$=a_0u(k)+a_1u(k-1)+\cdots+a_nu(k-n)$$

对应的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}}{1+b_1z^{-1}+\ldots+b_nz^{-n}}=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_iz^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{n}b_iz^{-i}}$$

可控标准型（续2）

可控标准型的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \cdots & -b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

输出方程为

$$y(k) = \begin{bmatrix} (a_n - a_0 b_n) & (a_{n-1} - a_0 b_{n-1}) & \cdots & (a_2 - a_0 b_2) & (a_1 - a_0 b_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + a_0 u(k)$$