绝密★启封并使用完毕前

2024年春景山学校远洋分校高三开学统一考试

数 学

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

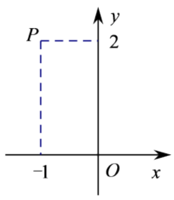
1. 已知全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2\le 2\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-2,2,3\}$　　C. $\{-2,-1,2\}$　　D. $\{-2,0,3\}$

2. 在$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$的展开式中，常数项为（　　）

A. -24　　B. 24　　C. -48　　D. 48

3. 如图，在复平面内，复数z对应的点为P，则复数$\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$的虚部为（　　）



A. $-\mathrm{i}$　　B. 1

C. i　　D. -1

4. 若$a>b$，则（　　）

A. $a^3<b^3$　　B. $\dfrac{b}{a}<1$　　C. $0.2^{a-b}<1$　　D. $|a|>|b|$

5. 已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，点P在该抛物线上，且P的横坐标为4，则$|PF|=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 已知$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则“$|\vec{a}+\vec{b}|\ge 3$”是“存在实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$”成立的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知点$O(0,0)$，点P满足$|PO|=1$，则点P到直线$x-my-2=0$的距离的最大值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 庑殿（图1

）是中国古代传统建筑中的一种屋顶形式，多用于宫殿、坛庙、重要门楼等高级建筑上，庑殿的基本结构包括四个坡面，坡面相交处形成 5 根屋脊，故又称“四阿殿”或“五脊殿”. 图 2 是根据庑殿顶构造的多面体模型，底面 $ABCD$ 是矩形，且四个侧面与底面的夹角均相等，则（　　）.

图1

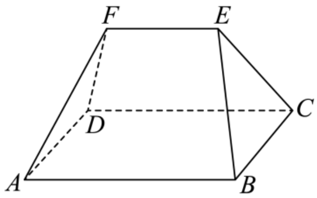


图2

A. $AB=BC+EF$

B. $AB=\dfrac{BC}{2}+EF$

C. $AB=BC+\dfrac{EF}{2}$

D. $AB=2BC-EF$

9. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的等差数列，集合 $S=\{\cos a_n \mid n\in \mathbf{N}^*\}$，若 $S=\{x,y\}$，则 $xy=$（　　）

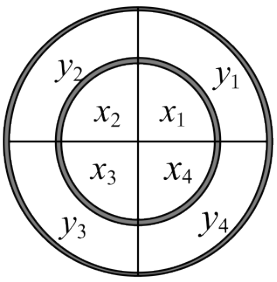
A. -1

B. $\dfrac{1}{2}$

C. 0

D. $-\dfrac{1}{2}$

10. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起（有一轴穿过它们的圆心），两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域，小圆盘上所写的实数分别记为 x_1,x_2,x_3,x_4，大圆盘上所写的实数分别记为 y_1,y_2,y_3,y_4，如图所示. 将小圆盘逆时针旋转 $i(i=1,2,3,4)$ 次，每次转动 90°，记 $T_i(i=1,2,3,4)$ 为转动 i 次后各区域内两数乘积之和，例如 $T_1=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1$． 若 $x_1+x_2+x_3+x_4<0$， $y_1+y_2+y_3+y_4<0$，则以下结论正确的是



A. T_1,T_2,T_3,T_4 中至少有一个为正数

B. T_1,T_2,T_3,T_4 中至少有一个为负数

C. T_1,T_2,T_3,T_4 中至多有一个为 正数

D. T_1,T_2,T_3,T_4 中至多有一个为负数

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足，$a_4=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$ （$n=1,2,\cdots$），则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为_______.

12. 已知 $3^a=4$，$b=\log_3\dfrac{9}{4}$，则 $a+b$ 的值为 _________.

13. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\sin C(a^2+b^2-c^2)$，则 $\angle C=$_________.

14. 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$ 与直线 $y=2x$ 无公共点，则正数 a 的一个取值可以为_________.

15. 已知四边形$ABCD$是椭圆$M:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的内接四边形，其对角线AC和BD交于原点O，且斜率之积为$-\dfrac{1}{3}$．给出下列四个结论：

①四边形$ABCD$是平行四边形；

②存在四边形$ABCD$是菱形；

③存在四边形$ABCD$使得$\angle AOD=91°$；

④存在四边形$ABCD$使得$|AC|^2+|BD|^2=\dfrac{64}{5}$．

其中所有正确结论的序号为__________．

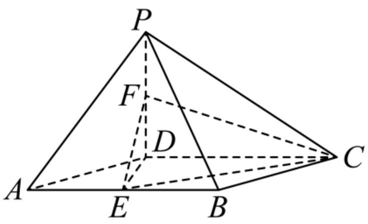
三、解答题共4小题．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 已知函数$f\left(x\right)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$．

（Ⅰ）求$f\left(x\right)$的定义域；

（Ⅱ）设$\beta\in\left(0,\pi\right)$，且$f\left(\beta\right)=2\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，求$\beta$的值．

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为菱形，E,F分别为AB,PD的中点．



（1）求证：EF // 平面PBC；

（2）若$AD=2\sqrt{3},PD=4$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求二面角$E-FC-D$的大小．

条件①：$PB=PC$；

条件②：$DE\perp PC$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

18. 2023年10月17日至18日，第三届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行，成为纪念“一带一路”倡议十周年最隆重的活动．此次活动主题为“高质量共建‘一带一路’，携手实现共同发展繁荣”，而作为“一带一路”重要交通运输的中欧班列越来越繁忙．下表是从2018年到2022年，每年中欧班列运行的列数（单位：万列）．

年份	2018	2019	2020	2021	2022
运行列数	0.63	0.82	1.24	1.5	1.6

（1）计算中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数；

（2）从 2018 年到 2022 年这 5 年中随机选取 3 年，运行列数大于 1.24（单位：万列）有 X 年，求 X 的分布列和数学期望；

（3）设 2018 年，2019 年，2020 年运行列数的方差为 s_1^2，2020 年，2021 年，2022 年运行列数的方差为 s_2^2，从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的方差为 s_3^2，试判断 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小关系.（结论不要求证明）

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-cx,\ x\in(-\infty,0)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（3）若 $a<x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)<b$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值.

2024年春景山学校远洋分校高三开学统一考试

数 学

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2\le 2\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{-2,2,3\}$　　C．$\{-2,-1,2\}$　　D．$\{-2,0,3\}$

【答案】B

【分析】先用列举法表示集合A，再求补集即可．

【详解】因为$x^2\le 2$，

所以$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，

因为$x\in \mathrm{Z}$，

所以$A=\{-1,0,1\}$，

所以$\complement_U A=\{-2,2,3\}$．

故选：B．

2．在$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$的展开式中，常数项为（　　）

A．-24　　B．24　　C．-48　　D．48

【答案】B

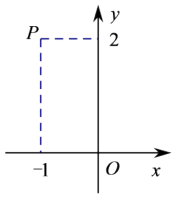
【分析】利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令x的指数为0求出r，将r的值代入通项求出展开式的常数项．

【详解】二项式$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$展开式的通项为$T_{r+1}=(-2)^r\mathrm{C}_4^r x^{4-2r}$，令$4-2r=0$，解得$r=2$，所以展开式的常数项为

$T_3=4\mathrm{C}_4^2=24$

故选：B

3．如图，在复平面内，复数z对应的点为P，则复数$\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$的虚部为（　　）



A. $-\mathrm{i}$　　　　B. 1

C. i　　　　D. -1

【答案】B

【分析】由 P 的坐标得到 z，由复数的除法运算得到 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}$，从而得到 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部.

【详解】由图可得 $P(-1,2)$，所以 $z=-1+2\mathrm{i}$，

所以 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}=\frac{-1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(-1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{5\mathrm{i}}{5}=\mathrm{i}$，虚部为 1.

故选：B.

4. 若 $a>b$，则（　　）

A. $a^3<b^3$　　　　B. $\frac{b}{a}<1$　　　　C. $0.2^{a-b}<1$　　　　D. $|a|>|b|$

【答案】C

【分析】用特殊值代入判断即可.

【详解】对于 A，取 $a=2,b=1$ 满足题意，但 $2^3>1^3$，故 A 错误；

对于 B，取 $a=-1,b=-2$ 满足题意，但 $\frac{b}{a}=2>1$，故 B 错误；

对于 C，因为 $a>b$,所以 $a-b>0$，

因为指数函数 $y=0.2^x$ 在 R 上单调递减，

所以 $0.2^{a-b}<0.2^0=1$,故 C 正确；

对于 D，取 $a=-1,b=-2$ 满足题意，但 $|-1|<|-2|$，故 D 错误.

故选：C.

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 在该抛物线上，且 P 的横坐标为 4，则 $|PF|=$（　　）

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

【答案】D

【分析】直接根据抛物线焦半径公式计算得到答案.

【详解】抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，

因为点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，P 的横坐标为 4，抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，

所以$|PF|$等于点P到直线$x=-1$的距离，

所以$|PF|=4+1=5$，

故选：D.

6. 已知$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则“$|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$”是“存在实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$”成立的（　　）

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】根据$|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$得到$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1$，从而$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，充分性成立;根据$\vec{b}=\lambda\vec{a}$时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|1+\lambda|\geq 1$，但不一定得到$|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$，必要性不成立，从而得到正确答案.

【详解】充分性：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5+2\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 9$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 2$，

又因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，所以$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\geq 1$，

又因为$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\leq 1$，所以$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$，

所以$\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，充分性成立；

必要性：若$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}+\lambda\vec{a}|=|(1+\lambda)\vec{a}|=|1+\lambda||\vec{a}|=|1+\lambda|\geq 1$，

但不一定满足$|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$，必要性不成立.

所以，$|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$”是“存在实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$”成立的充分而不必要条件.

故选：A.

7. 已知点$O(0,0)$，点P满足$|PO|=1$，则点P到直线$x-my-2=0$的距离的最大值为（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【分析】由条件可得点P是圆$x^2+y^2=1$上的一点，因此点P到直线的距离的最大值为$d+r$,只需用点到直线的距离求出d的最大值即可.

【详解】设点$P(x,y)$,

因为$|PO|=\sqrt{x^2+y^2}=1$,

所以$x^2+y^2=1$,

所以点P是在以$(0,0)$为圆心，半径为1的圆上，

因为点$\left(0,0\right)$到直线$x-my-2=0$的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\leq 2$，

当且仅当$m=0$时等号成立，

所以点P到直线$x-my-2=0$的距离的最大值为$2+1=3$.

故选：C.

8. 庑殿（图 1）是中国古代传统建筑中的一种屋顶形式，多用于宫殿、坛庙、重要门楼等高级建筑上，庑殿的基本结构包括四个坡面，坡面相交处形成 5 根屋脊，故又称“四阿殿”或“五脊殿”．图 2 是根据庑殿顶构造的多面体模型，底面$ABCD$是矩形，且四个侧面与底面的夹角均相等，则（　　）.

图1

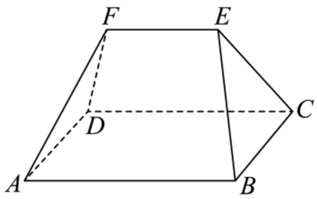


图2

A. $AB=BC+EF$　　B. $AB=\dfrac{BC}{2}+EF$

C. $AB=BC+\dfrac{EF}{2}$　　D. $AB=2BC-EF$

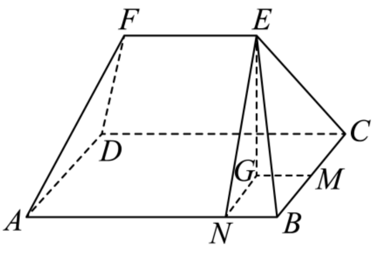
【答案】A

【分析】设点E在底面$ABCD$上的射影为G，作$GM\perp BC$，$GN\perp AB$，垂足分别为M，N，设四个侧面与底面的夹角为θ，即可得到$\angle EMG=\angle ENG=\theta$，根据三角形全等得到方程，整理即可.

【详解】如图所示，设点E在底面$ABCD$上的射影为G，作$GM\perp BC$，$GN\perp AB$，垂足分别为M，N.

则$\angle EMG$为侧面EBC与底面$ABCD$的夹角，$\angle ENG$为侧面$EBAF$与底面$ABCD$的夹角，

设四个侧面与底面的夹角为θ，则在$\mathrm{Rt}\vee EMG$和$\mathrm{Rt}\triangle ENG$中，$\angle EMG=\angle ENG=\theta$，



又GE为公共边，所以$GN=GM$，即$\dfrac{AB-EF}{2}=\dfrac{BC}{2}$，整理得$AB=BC+EF$.

故选：A

9. 已知$\{a_n\}$是公差为$\dfrac{2\pi}{3}$的等差数列，集合$S=\{\cos a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$，若$S=\{x,y\}$，则$xy=$（　　）

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】D

【详解】因为数列$\{a_n\}$是公差为$\dfrac{2\pi}{3}$的等差数列,

所以$a_n=a_1+(n-1)\times\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}n+a_1-\dfrac{2\pi}{3}$,

所以$\cos a_n=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n+a_1-\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

所以数列$\{\cos a_n\}$是周期为 3 的数列.

不妨取$a_1=-\dfrac{\pi}{3}$, 则$a_2=\dfrac{\pi}{3}, a_3=\pi$,

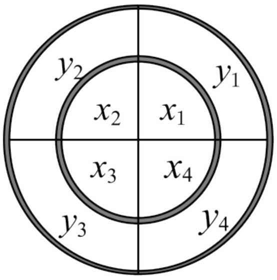
所以$\cos a_1=\cos a_2=\dfrac{1}{2}, \cos a_3=-1$,

所以$S=\{x,y\}=\left\{\dfrac{1}{2},-1\right\}$,

所以$ab=-\dfrac{1}{2}$.

故选：D.

10. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起（有一轴穿过它们的圆心），两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域，小圆盘上所写的实数分别记为x_1,x_2,x_3,x_4，大圆盘上所写的实数分别记为y_1,y_2,y_3,y_4, 如图所示. 将小圆盘逆时针旋转$i(i=1,2,3,4)$次，每次转动90°，记$T_i(i=1,2,3,4)$为转动i次后各区域内两数乘积之和，例如$T_1=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1$．若$x_1+x_2+x_3+x_4<0$，$y_1+y_2+y_3+y_4<0$，则以下结论正确的是



A. T_1,T_2,T_3,T_4中至少有一个为正数

B. T_1,T_2,T_3,T_4中至少有一个为负数

C. T_1,T_2,T_3,T_4中至多有一个为正数

D. T_1,T_2,T_3,T_4中至多有一个为负数

【答案】A

【详解】根据题意可知：

（$x_1+x_2+x_3+x_4$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）>0,

又（$x_1+x_2+x_3+x_4$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）

去掉括号即得：

$x_1y_2+x_2y_2+x_1y_3+x_1y_4+x_2y_2+x_2y_2+x_2y_3+x_2y_4+x_3y_2+x_3y_2+x_3y_3+x_3y_4$