

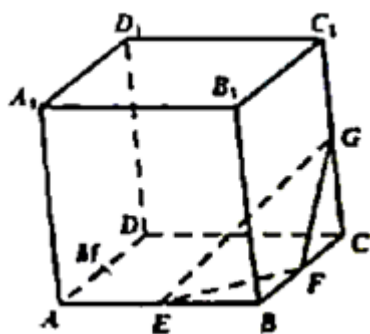
2024 届云南省安宁市实验石江学校高三下数学试题期中试题

考生请注意：

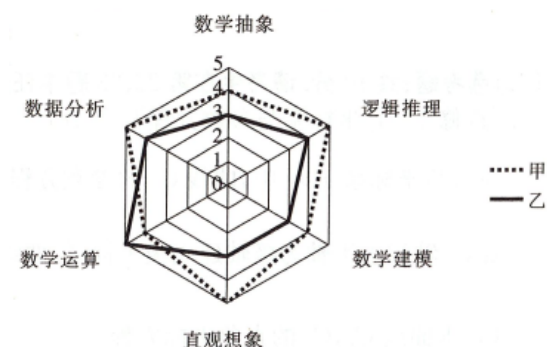
1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, G 分别为棱 AB, BC, CC_1 的中点， M 为棱 AD 的中点，设 P, Q 为底面 $ABCD$ 内的两个动点，满足 $D_1P \parallel$ 平面 EFG ， $D_1Q = \sqrt{17}$ ，则 $PM + PQ$ 的最小值为（ ）



- A. $3\sqrt{2} - 1$ B. $3\sqrt{2} - 2$ C. $2\sqrt{5} - 1$ D. $2\sqrt{5} - 2$
2. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数，且 $f(x) + g(x) = (x+1)^2 - 2^{x+1}$ ，则 $f(1) - g(1) =$ （ ）
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 3
3. 为比较甲、乙两名高二学生的数学素养，对课程标准中规定的数学六大素养进行指标测验（指标值满分为 5 分，分值高者为优），根据测验情况绘制了如图所示的六大素养指标雷达图，则下面叙述正确的是（ ）



- A. 乙的数据分析素养优于甲
- B. 乙的数学建模素养优于数学抽象素养
- C. 甲的六大素养整体水平优于乙
- D. 甲的六大素养中数据分析最差

4. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上, 它的底面边长为 $\sqrt{6}$, 侧棱长为 $2\sqrt{3}$, 则它的外接球的表面积为 ()

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(2-x), & x \leq 1, \\ -x^2 + 1, & x > 1, \end{cases}$ 若 $|f(x)| - ax + a \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $[0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, 2]$

6. 若单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 夹角为 60° , $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, 且 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, 则实数 $\lambda =$ ()

- A. -1 B. 2 C. 0 或 -1 D. 2 或 -1

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$. 若 $f(4) = 2$, 则函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 ()

- A. 4 B. 6 C. 3 D. 8

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 是 AB 的中点, 若 $CD = 1$, 且

$\left(a - \frac{1}{2}b\right) \sin A = (c + b)(\sin C - \sin B)$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{10}$ D. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$

9. 已知正四面体的内切球体积为 v , 外接球的体积为 V , 则 $\frac{V}{v} =$ ()

- A. 4 B. 8 C. 9 D. 27

10. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. $\sqrt{5}$

11. 天干地支, 简称为干支, 源自中国远古时代对天象的观测.“甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸”称为十天干, “子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥”称为十二地支. 干支纪年法是天干和地支依次按固定的顺序相互配合组成, 以此往复, 60 年为一个轮回. 现从农历 2000 年至 2019 年共 20 个年份中任取 2 个年份, 则这 2 个年份的天干或地支相同的概率为 ()

- A. $\frac{2}{19}$ B. $\frac{9}{95}$ C. $\frac{48}{95}$ D. $\frac{5}{19}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 30^\circ$, $\cos A = -\frac{2}{3}$, $AC = \sqrt{15} - 2$, 则 AC 边上的高为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

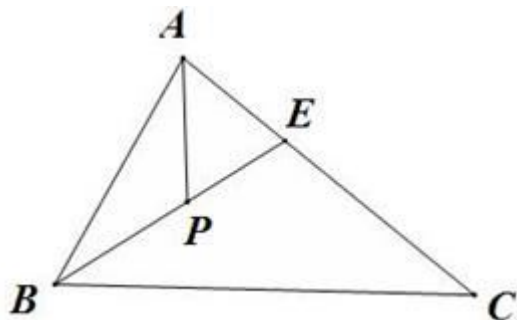
13. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线 C 交于点 A, B , 以线段 AB 为直径的圆 E 上存在点 P, Q , 使得以 PQ 为直径的圆过点 $D(-2, t)$, 则实数 t 的取值范围为_____.

14. (5 分) 已知曲线 C 的方程为 $y = -ax^3 + x (a \in \mathbf{R})$, 其图象经过点 $P(1, 0)$, 则曲线 C 在点 P 处的切线方程是_____.

15. 曲线 $f(x) = (x^2 + x) \ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, E 为边 AC 上一点, 且 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$, P 为 BE 上一点, 且满足

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} (m > 0, n > 0)$, 则 $\frac{1}{n} + \frac{3}{m} + 3$ 的最小值为_____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $M\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以坐标原点 O 为极

点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\frac{3}{\rho^2} = 2 + \cos^2 \theta$.

(1) 求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

18. (12 分) 在直角坐标系 l 中, 已知直线 l 的直角坐标方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases} (\theta$

为参数), 以直角坐标系原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

- (1) 求曲线 C_1 和直线 l 的极坐标方程;
- (2) 已知直线 l 与曲线 C_1 、 C_2 相交于异于极点的点 A, B , 若 A, B 的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 求 $|\rho_1 - \rho_2|$ 的值.

19. (12 分) 为了保障全国第四次经济普查顺利进行, 国家统计局从东部选择江苏, 从中部选择河北、湖北, 从西部选择宁夏, 从直辖市中选择重庆作为国家综合试点地区, 然后再逐级确定普查区域, 直到基层的普查小区, 在普查过程中首先要进行宣传培训, 然后确定对象, 最后入户登记, 由于种种情况可能会导致入户登记不够顺利, 这为正式普查提供了宝贵的试点经验, 在某普查小区, 共有 50 家企事业单位, 150 家个体经营户, 普查情况如下表所示:

普查对象类别	顺利	不顺利	合计
企事业单位	40	10	50
个体经营户	100	50	150
合计	140	60	200

- (1) 写出选择 5 个国家综合试点地区采用的抽样方法;
- (2) 根据列联表判断是否有 90% 的把握认为“此普查小区的入户登记是否顺利与普查对象的类别有关”;
- (3) 以该小区的个体经营户为样本, 频率作为概率, 从全国个体经营户中随机选择 3 家作为普查对象, 入户登记顺利的对象数记为 X , 写出 X 的分布列, 并求 X 的期望值.

附: $k^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.010	0.001
k_0	2.706	6.635	10.828

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x\ln x - \frac{a}{2}x^2 - x, a \in R, e \approx 2.71828 \cdots$ 是自然对数的底数.

- (1) 若 $a = -e$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围, 并证明: $x_1x_2 > x_1 + x_2$.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = |x + 1| + |x - 2a| + 1$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 6$;

如图, 分别取 C_1D_1, D_1A_1, A_1A 的中点 H, I, J , 连接 GH, HI, IJ, JE , 易证 E, F, G, H, I, J 共面, 即平面 EFG 为截面 $EFGHIJ$, 连接 AD_1, D_1C, AC , 由中位线定理可得 $AC // EF$, $AC \not\subset$ 平面 EFG , $EF \subset$ 平面 EFG , 则 $AC //$ 平面 EFG , 同理可得 $AD_1 //$ 平面 EFG , 由 $AC \cap AD_1 = A$ 可得平面 $AD_1C //$ 平面 EFG , 又 $D_1P //$ 平面 EFG , P 在平面 $ABCD$ 上, $\therefore P \in AC$.

正方体中 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，从而有 $DD_1 \perp DQ$ ， $\therefore DQ = \sqrt{D_1Q^2 - DD_1^2} = 1$ ， $\therefore Q$ 在以 D 为圆心 1 为半径的四分之一圆（圆在正方形 $ABCD$ 内的部分）上，

显然 M 关于直线 AC 的对称点为 E ，

$PM + PQ = PE + PQ \geq PE + PD - DQ \geq ED - DQ = \sqrt{4^2 + 2^2} - 1 = 2\sqrt{5} - 1$ ，当且仅当 E, P, Q, D 共线时取等号， $\therefore$ 所求最小值为 $2\sqrt{5} - 1$ 。

故选：C.

【点睛】

本题考查空间距离的最小值问题，解题时作出正方体的完整截面求出 P 点轨迹是第一个难点，第二个难点是求出 Q 点轨迹，第三个难点是利用对称性及圆的性质求得最小值.

2、C

【解析】

先根据奇偶性，求出 $f(x) - g(x)$ 的解析式，令 $x = 1$ ，即可求出。

【详解】

因为 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数， $f(x) + g(x) = (x + 1)^2 - 2^{x+1}$ ，用 $-x$ 替换 x ，得

$$f(-x) + g(-x) = (-x + 1)^2 - 2^{-x+1} \text{ ,}$$

化简得 $-f(x) + g(x) = (x - 1)^2 - 2^{-x+1}$ ，即 $f(x) - g(x) = 2^{-x+1} - (x - 1)^2$

令 $x = 1$ ，所以 $f(1) - g(1) = 2^0 - 0 = 1$ ，故选 C。

【点睛】

本题主要考查函数性质奇偶性的应用。

3、C

【解析】

根据题目所给图像，填写好表格，由表格数据选出正确选项.

【详解】

根据雷达图得到如下数据：

	数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析
甲	4	5	4	5	4	5
乙	3	4	3	3	5	4

由数据可知选 C.

【点睛】

本题考查统计问题，考查数据处理能力和应用意识.

4、C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则

$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，得到答案.

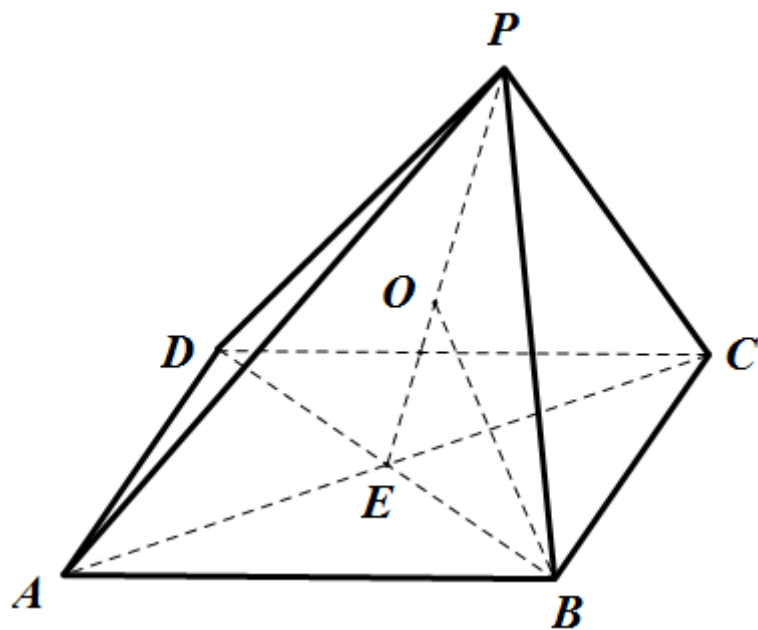
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}$ ，故 $BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$ ， $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3$ ，

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

故选：C.



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

5、D

【解析】

由 $|f(x)| - ax + a \geq 0$ 恒成立，等价于 $y = |f(x)|$ 的图像在 $y = a(x - 1)$ 的图像的上方，然后作出两个函数的图像，利用数形结合的方法求解答案.

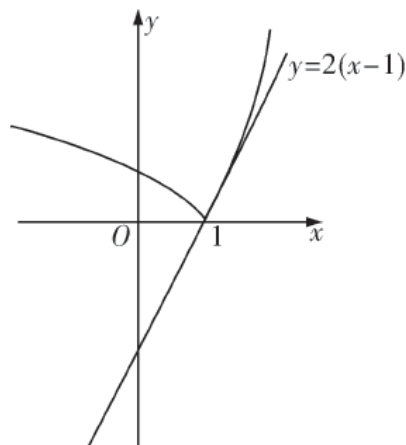
【详解】

因为 $|f(x)| = \begin{cases} \ln(2-x), & x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x > 1, \end{cases}$ 由 $|f(x)| \leq a(x-1)$ 恒成立, 分别作出 $y = |f(x)|$ 及 $y = a(x-1)$ 的图象, 由图知, 当 $a < 0$

时, 不符合题意, 只须考虑 $a \geq 0$ 的情形, 当 $y = a(x-1)$ 与 $y = |f(x)| (x \geq 1)$ 图象相切于 $(1, 0)$ 时, 由导数几何意义, 此

时 $a = (x^2 - 1)' \big|_{x=1} = 2$, 故 $0 \leq a \leq 2$.

故选: D



【点睛】

此题考查的是函数中恒成立问题, 利用了数形结合的思想, 属于难题.

6、D

【解析】

利用向量模的运算列方程, 结合向量数量积的运算, 求得实数 λ 的值.

【详解】

由于 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, 所以 $|\lambda \vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2 = 3$, 即 $(\lambda \vec{e}_1 - \vec{e}_2)^2 = 3$, $\lambda^2 \vec{e}_1^2 - 2\lambda \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos 60^\circ + 1 = 3$, 即

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 解得 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -1$.

故选: D

【点睛】

本小题主要考查向量模的运算, 考查向量数量积的运算, 属于基础题.

7、A

【解析】

根据所给函数解析式满足的等量关系及指数幂运算, 可得 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$; 利用定义可证明函数 $f(x)$ 的单调

性, 由赋值法即可求得函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值.

【详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$ ，

$$\text{则 } f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m);$$

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ ，

$$\text{故 } f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0,$$

$$\text{令 } m = x_1, \quad n = x_2, \quad \text{则 } f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + f(x_2) = f(x_1),$$

$$\text{即 } f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{故 } f(x)_{\max} = f(16),$$

$$\text{令 } m = 16, \quad n = 4,$$

$$\text{故 } f(4) + f(4) = f(16) = 4,$$

故函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 4.

故选：A.

【点睛】

本题考查了指数幂的运算及化简，利用定义证明抽象函数的单调性，赋值法在抽象函数求值中的应用，属于中档题.

8、A

【解析】

根据正弦定理可得 $\left(a - \frac{1}{2}b\right)a = (c+b)(c-b)$ ，求出 $\cos C$ ，根据平方关系求出 $\sin C$. 由 $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ 两端平方，

求 ab 的最大值，根据三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，求出 V_{ABC} 面积的最大值.

【详解】

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \left(a - \frac{1}{2}b\right) \sin A = (c+b)(\sin C - \sin B),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/907035200044006142>