

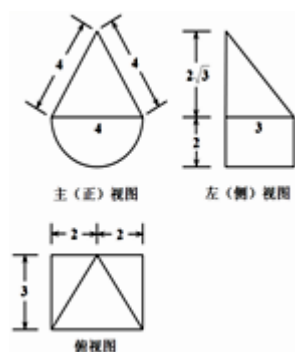
江西省临川一中等九校协作体 2023-2024 学年高三数学试题 3 月 11 日第 2 周测试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为（ ）



- A. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + 6\pi$ B. $8\sqrt{3} + 6\pi$
- C. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$ D. $8\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}$

2. 设 $m \in \mathbf{R}$ ，命题“存在 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是（ ）

- A. 任意 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根
- B. 任意 $m \leq 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根
- C. 存在 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根
- D. 存在 $m \leq 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根

3. 设函数 $g(x) = e^x + (1 - \sqrt{e})x - a$ ($a \in \mathbf{R}$ ， e 为自然对数的底数)，定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) = x^2$ ，

且当 $x \leq 0$ 时， $f'(x) < x$ 。若存在 $x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\}$ ，且 x_0 为函数 $y = g(x) - x$ 的一个零点，则实数

a 的取值范围为（ ）

- A. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$ B. $(\sqrt{e}, +\infty)$ C. $[\sqrt{e}, +\infty)$ D. $\left[\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$

4. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - ax$ ，若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 2x$ ，则实数 a 的取值为 ()

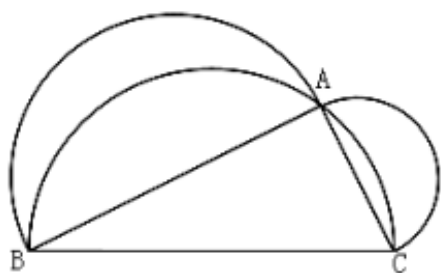
- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

5. 已知 m, n 是两条不重合的直线， α 是一个平面，则下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$ ，则 $m // n$ B. 若 $m // \alpha, n \subset \alpha$ ，则 $m // n$
C. 若 $m \perp n, m \perp \alpha$ ，则 $n // \alpha$ D. 若 $m \perp \alpha, n // \alpha$ ，则 $m \perp n$

6. 下图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 、直角边 AB 、 AC ，已知以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，记 $\angle ABC = \alpha$ ，则

$\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = ()$



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 1 D. $\frac{8}{5}$

7. 已知复数 $z_1 = 3 + 4i, z_2 = a + i$ ，且 $z_1 \bar{z}_2$ 是实数，则实数 a 等于 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(x) - f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{2}{1-x^2}$ ，若对 $\forall x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ ， $|f(ax+1)| < |f(x-1)|$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-3, -1)$ B. $(-4, -1)$ C. $(-3, 0)$ D. $(-4, 0)$

9. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图象关于点 $M(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 成中心对称，且与

点 M 相邻的一个最低点为 $N(\frac{2\pi}{3}, -3)$ ，则对于下列判断：

- ① 直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴；
② 点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心；
③ 函数 $y = 1$ 与 $y = f(x)$ $(-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{35\pi}{12})$ 的图象的所有交点的横坐标之和为 7π 。

其中正确的判断是 ()

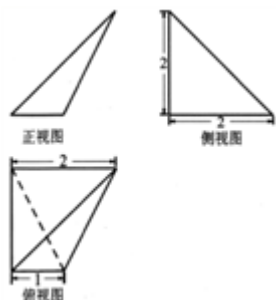
- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

10. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点若双曲线上存在点 P , 使 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, 且

$|PF_1| = 2|PF_2|$, 则双曲线的离心率为 ()

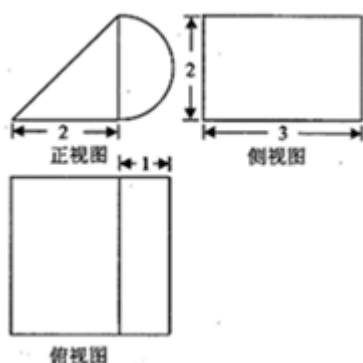
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

11. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

12. 某几何体的三视图如图所示(单位: cm), 则该几何体的体积等于 () cm^3



- A. $4 + \frac{2\pi}{3}$ B. $4 + \frac{3\pi}{2}$ C. $6 + \frac{2\pi}{3}$ D. $6 + \frac{3\pi}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在回归分析的问题中, 我们可以通过对数变换把非线性回归方程 $y = c_1 e^{c_2 x}$, ($c_1 > 0$) 转化为线性回归方程, 即两边取对数, 令 $z = \ln y$, 得到 $z = c_2 x + \ln c_1$. 受其启发, 可求得函数 $y = x^{\log_3(9x)}$ ($x > 0$) 的值域是_____.

14. 甲、乙、丙、丁四名同学报名参加淮南文明城市创建志愿服务活动, 服务活动共有“走进社区”、“环境监测”、“爱心义演”、“交通宣传”等四个项目, 每人限报其中一项, 记事件 A 为“4 名同学所报项目各不相同”, 事件 B 为“只有甲同学一人报走进社区项目”, 则 $P(A|B)$ 的值为_____.

15. 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 圆 O 内切于正方形 $ABCD$, MN 为圆 O 的一条动直径, 点 P 为正方形 $ABCD$

边界上任一点，则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.

16. 如果复数 z 满足 $i \cdot z = 1 + i$ ，那么 $|z| =$ _____ (i 为虚数单位).

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$ ，其中 $m \in R$.

(I) 若 $m > 0$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的最大值.

18. (12 分) 在创建“全国文明卫生城”过程中，运城市“创城办”为了调查市民对创城工作的了解情况，进行了一次创城知识问卷调查(一位市民只能参加一次)，通过随机抽样，得到参加问卷调查的 100 人的得分统计结果如表所示：.

组别	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
频数	2	12	20	25	24	13	4

(1) 由频数分布表可以大致认为，此次问卷调查的得分 $Z \sim N(\mu, 198)$, μ 似为这 100 人得分的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)，利用该正态分布，求 $P(38.2 < Z \leq 80.2)$ ；

(2) 在 (1) 的条件下，“创城办”为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案：

- ①得分不低于 μ 的可以获赠 2 次随机话费，得分低于 μ 的可以获赠 1 次随机话费；
- ②每次获赠的随机话费和对应的概率为：

赠送话费的金额(单位：元)	20	50
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

现有市民甲参加此次问卷调查，记 X (单位：元)为该市民参加问卷调查获赠的话费，求 X 的分布列与数学期望.

附：参考数据与公式： $\sqrt{198} \approx 14$ ，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ，

$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ， $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$

19. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求矩阵 M 的特征值及其相应的特征向量.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足： $a_1 = 2, b_1 = -1$ ， $a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}$ ， $b_n = 2b_{n-1} - a_{n-1}$ ， $n \in N^*, n \geq 2$.

(1) 求证:数列 $\{a_n - b_n\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\left\{\frac{3^n}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (12 分) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\tan A, \tan B, \tan C$ 成等差数列, $\cos A, \sqrt{\cos C}, \cos B$ 成等比数列.

(1) 求 A 的值;

(2) 若 V_{ABC} 的面积为 1, 求 c 的值.

22. (10 分) 古人云:“腹有诗书气自华.”为响应全民阅读, 建设书香中国, 校园读书活动的热潮正在兴起.某校为统计学生一周课外读书的时间, 从全校学生中随机抽取 n 名学生进行问卷调查, 统计了他们一周课外读书时间 (单位: h) 的数据如下:

一周课外 读书时间/ h	(0,2]	(2,4]	(4,6]	(6,8]	(8,10]	(10,12]	(12,14]	(14,16]	(16,18]	合 计
频数	4	6	10	12	14	24	a	46	34	n
频率	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.12	0.25	p	0.17	1

(1) 根据表格中提供的数据, 求 a, p, n 的值并估算一周课外读书时间的中位数.

(2) 如果读书时间按 $(0,6], (6,12], (12,18]$ 分组, 用分层抽样的方法从 n 名学生中抽取 20 人.

①求每层应抽取的人数;

②若从 $(0,6], (6,12]$ 中抽出的学生中再随机选取 2 人, 求这 2 人不在同一层的概率.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

还原几何体可知原几何体为半个圆柱和一个四棱锥组成的组合体，分别求解两个部分的体积，加和得到结果.

【详解】

由三视图还原可知，原几何体下半部分为半个圆柱，上半部分为一个四棱锥

半个圆柱体积为： $V_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi \times 2^2 \times 3 = 6\pi$

四棱锥体积为： $V_2 = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

原几何体体积为： $V = V_1 + V_2 = 8\sqrt{3} + 6\pi$

本题正确选项： B

【点睛】

本题考查三视图的还原、组合体体积的求解问题，关键在于能够准确还原几何体，从而分别求解各部分的体积.

2、A

【解析】

只需将“存在”改成“任意”，有实根改成无实根即可.

【详解】

由特称命题的否定是全称命题，知“存在 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是

“任意 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根”.

故选：A

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定，此类问题要注意在两个方面作出变化：1.量词，2.结论，是一道基础题.

3、D

【解析】

先构造函数 $T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ ，由题意判断出函数 $T(x)$ 的奇偶性，再对函数 $T(x)$ 求导，判断其单调性，进而可求出结果.

【详解】

构造函数 $T(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ ，

因为 $f(-x) + f(x) = x^2$ ，

所以 $T(x) + T(-x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + f(-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 = f(x) + f(-x) - x^2 = 0$ ，

所以 $T(x)$ 为奇函数，

当 $x \leq 0$ 时, $T'(x) = f'(x) - x < 0$, 所以 $T(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减,

所以 $T(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

因为存在 $x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\}$,

所以 $f(x_0) + \frac{1}{2} \geq f(1-x_0) + x_0$,

所以 $T(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2} \geq T(1-x_0) + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 + x_0$,

化简得 $T(x_0) \geq T(1-x_0)$,

所以 $x_0 \leq 1-x_0$, 即 $x_0 \leq \frac{1}{2}$

令 $h(x) = g(x) - x = e^x - \sqrt{e}x - a\left(x \leq \frac{1}{2}\right)$,

因为 x_0 为函数 $y = g(x) - x$ 的一个零点,

所以 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时有一个零点

因为当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) = e^x - \sqrt{e} \leq e^{\frac{1}{2}} - \sqrt{e} = 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时单调递减,

由选项知 $a > 0$, $-\frac{a}{\sqrt{e}} < 0 < \frac{1}{2}$,

又因为 $h\left(-\frac{a}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{a}{\sqrt{e}}} - \sqrt{e}\left(-\frac{a}{\sqrt{e}}\right) - a = e^{-\frac{a}{\sqrt{e}}} > 0$,

所以要使 $h(x)$ 在 $x \leq \frac{1}{2}$ 时有一个零点,

只需使 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}\sqrt{e} - a \leq 0$, 解得 $a \geq \frac{\sqrt{e}}{2}$,

所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$, 故选 D.

【点睛】

本题主要考查函数与方程的综合问题, 难度较大.

4、B

【解析】

求出函数的导数，利用切线方程通过 $f'(0)$ ，求解即可；

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$ ，

因为 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - a$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$ ，

可得 $1-a=2$ ，解得 $a=-1$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查函数的导数的几何意义，切线方程的求法，考查计算能力.

5、D

【解析】

利用空间位置关系的判断及性质定理进行判断.

【详解】

解：选项 A 中直线 m ， n 还可能相交或异面，

选项 B 中 m ， n 还可能异面，

选项 C，由条件可得 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查直线与平面平行、垂直的性质与判定等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力，属于基础题.

6、D

【解析】

根据以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比求得 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，即 $\tan \alpha$ 的值，由此求得 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值，进而求得所求表达式的值.

【详解】

由于直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，即 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，

所以 $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}$.

故选：D

【点睛】

本小题主要考查同角三角函数的基本关系式，考查二倍角公式，属于基础题.

7、A

【解析】

分析：计算 $\bar{z}_2 = a - i$ ，由 $z_1 \bar{z}_2 = 3a + 4 + (4a - 3)i$ ，是实数得 $4a - 3 = 0$ ，从而得解。

详解：复数 $z_1 = 3 + 4i, z_2 = a + i$,

$$\bar{z}_2 = a - i.$$

所以 $z_1 \bar{z}_2 = (3 + 4i)(a - i) = 3a + 4 + (4a - 3)i$ ，是实数，

$$\text{所以 } 4a - 3 = 0, \text{ 即 } a = \frac{3}{4}.$$

故选 A.

点睛：本题主要考查了复数共轭的概念，属于基础题。

8、A

【解析】

先根据函数奇偶性求得 $f(x), f'(x)$ ，利用导数判断函数单调性，利用函数单调性求解不等式即可。

【详解】

因为函数 $f(x)$ 是奇函数，

所以函数 $f'(x)$ 是偶函数。

$$f(-x) - f'(-x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{2}{1-x^2},$$

$$\text{即 } -f(x) - f'(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{2}{1-x^2},$$

$$\text{又 } f(x) - f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{2}{1-x^2},$$

$$\text{所以 } f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x), \quad f'(x) = \frac{2}{1-x^2}.$$

$$\text{函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } (-1, 1), \text{ 所以 } f'(x) = \frac{2}{1-x^2} > 0,$$

则函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为单调递增函数。又在 $(0, 1)$ 上，

$f(x) > f(0) = 0$ ，所以 $|f(x)|$ 为偶函数，且在 $(0, 1)$ 上单调递增。

$$\text{由 } |f(ax+1)| < |f(x-1)|,$$

$$\text{可得 } \begin{cases} |ax+1| < |x-1| \\ -1 < ax+1 < 1 \end{cases}, \text{ 对 } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}] \text{ 恒成立,}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/907046045152010000>