安徽省合肥市部分学校 2024—2025 学年高一上学期第二次教学质量检测数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M=\{-1,1,2,3\}$，$N=\{-1,1\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $\{-1,1,2,3\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

【答案】A

【解析】$M=\{-1,1,2,3\}$，$N=\{-1,1\}$，则 $M\cup N=\{-1,1,2,3\}$．

故选：A.

2. 下列函数与函数 $y=x$ 是同一函数的是（　　）

A. $y=|x|$　　B. $y=\sqrt[3]{t^3}$　　C. $y=\sqrt{x^2}$　　D. $y=\dfrac{v^2}{v}$

【答案】B

【解析】对于 A，$y=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$，对应关系不同，与函数 $y=x$ 不是同一函数；

对于 B，$y=\sqrt[3]{t^3}=t$，与函数 $y=x$ 的定义域和对应关系都相同，所以它们是同一函数；

对于 C，$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x\leq 0\end{cases}$，对应关系不同，与函数 $y=x$ 不是同一函数；

对于 D，$y=\dfrac{v^2}{v}=v(v\neq 0)$，与函数 $y=x$ 的定义域不同，所以与函数 $y=x$ 不是同一函数.

故选：B.

3. 若两个正实数 x，y 满足 $4x+y=xy$，且存在这样的 x，y 使不等式 $x+\dfrac{y}{4}<m^2+3m$ 有解，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $-1<m<4$　　B. $-4<m<1$

C. $m<-4$ 或 $m>1$　　D. $m<-3$ 或 $m>0$

【答案】C

【解析】由题设 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，则

$x+\frac{y}{4}=(x+\frac{y}{4})(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geq 2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$，

当且仅当 $\frac{y}{4x}=\frac{4x}{y}\Rightarrow y=4x$，即 $\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$ 时等号成立，

要使不等式 $x+\frac{y}{4}<m^2+3m$ 有解，则 $m^2+3m>4\Rightarrow m^2+3m-4=(m+4)(m-1)>0$，

所以 $m<-4$ 或 $m>1$.

故选：C.

4. 命题“$\exists x\geq 2$，$x^2<5$”的否定是（　　）

A. $\exists x\geq 2$，$x^2\geq 5$　　B. $\exists x<2$，$x^2\geq 5$

C. $\forall x\geq 2$，$x^2\geq 5$　　D. $\forall x<2$，$x^2\geq 5$

【答案】C

【解析】$\exists x\geq 2$，$x^2<5$ 的否定是：$\forall x\geq 2$，$x^2\geq 5$.

故选：C.

5. 已知 $a>0$，$b>2$，且 $2a+b=ab+1$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的最小值是（　　）

A. $5+2\sqrt{2}$　　B. $3+\sqrt{2}$　　C. $3-\sqrt{2}$　　D. $5-2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】因 $2a+b=ab+1$，则 $b-1=(b-2)a\Rightarrow a=\frac{b-1}{b-2}$，

则 $a+2b=2b+\frac{b-1}{b-2}=2b+\frac{b-2+1}{b-2}=2(b-2)+\frac{1}{b-2}+5$

$\geq 5+2\sqrt{2(b-2)\cdot\frac{1}{b-2}}=5+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $2(b-2)=\frac{1}{b-2}\Rightarrow (b-2)^2=\frac{1}{2}$，结合 $a=\frac{b-1}{b-2}$，$b>2$，

即 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}+2$，$a=1+\sqrt{2}$ 时取等号.

故选：A.

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f(x)-1$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(16)=$（　　）

A. 0　　B. 16　　C. 22　　D. 32

【答案】B

【解析】因为$f\left(x\right)-1$为奇函数，则$f\left(0\right)=1$，且函数$f(x)$的图象关于(0,1)中心对称，

即$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=2$，

因为$f\left(x+2\right)$为偶函数，所以$f\left(x+2\right)=f\left(2-x\right)$，则$f\left(x+4\right)=f\left(-x\right)$，

所以$f\left(x\right)+f\left(x+4\right)=2$，$f\left(x+4\right)+f\left(x+8\right)=2$，所以$f\left(x\right)=f\left(x+8\right)$，

故$f\left(x\right)$的周期为8，

因为$f\left(1\right)+f\left(5\right)=2,f\left(2\right)+f\left(6\right)=2,f\left(3\right)+f\left(7\right)=2,f\left(4\right)+f\left(8\right)=2$，

所以$f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots+f\left(16\right)=2\left[f\left(1\right)+f\left(2\right)+\cdots+f\left(8\right)\right]=16$.

故选：B.

7. 已知全集$U=\left\{x\middle|x<10,x\in\mathrm{N}\right\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，$A\cap\left(\complement_U B\right)=\left\{1,9\right\}$，$\left(\complement_U A\right)\cap\left(\complement_U B\right)=\left\{4,6,7\right\}$，$A\cap B=\left\{3\right\}$，则下列选项不正确的为（　　）

A. $8\in B$

B. A 的不同子集的个数为 8

C. $\left\{9\right\}\subseteq A$

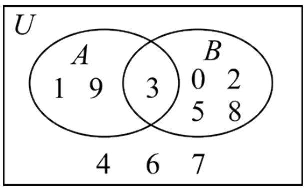
D. $6\notin\complement_U\left(A\cup B\right)$

【答案】D

【解析】$U=\left\{x\mid x<10,x\in\mathrm{N}\right\}=\left\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$，

由$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，$A\cap\left(\complement_U B\right)=\left\{1,9\right\}$，$\left(\complement_U A\right)\cap\left(\complement_U B\right)=\left\{4,6,7\right\}$，$A\cap B=\left\{3\right\}$，

作出 Venn 图，如图所示，



由图可知，$A=\left\{1,3,9\right\}$，$B=\left\{0,2,3,5,8\right\}$，故 A，C 正确；

集合 A 的子集个数为$2^3=8$个，故 B 正确；

因为$\complement_U(A\cup B)=\left\{4,6,7\right\}$，所以$6\in\complement_U(A\cup B)$，D 错误.

故选：D.

8. 若函数 $f\left(x\right)$ 在定义域 $\left[a,b\right]$ 上的值域为 $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]$，则称 $f\left(x\right)$ 为"Ω 函数". 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}5x,0\le x\le 2\\ x^2-4x+m,2<x\le 4\end{cases}$ 是"Ω 函数"，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[4,10\right]$　　B. $\left[4,14\right]$　　C. $\left[10,14\right]$　　D. $\left[10,+\infty\right)$

【答案】C

【解析】由题意可知 $f\left(x\right)=\begin{cases}5x,0\le x\le 2\\ x^2-4x+m,2<x\le 4\end{cases}$ 的定义域为 $[0,4]$，

又因为函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}5x,0\le x\le 2\\ x^2-4x+m,2<x\le 4\end{cases}$ 是"Ω 函数"，故其值域为 $[f\left(0\right),f\left(4\right)]$；

而 $f\left(0\right)=0,f\left(4\right)=m$，则值域为 $[0,m]$；

当 $0\le x\le 2$ 时，$f\left(x\right)=5x\in[0,10]$，

当 $2<x\le 4$ 时，$f\left(x\right)=x^2-4x+m$，此时函数在 $(2,4]$ 上单调递增，则 $f\left(x\right)\in(m-4,m]$，

故由函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}5x,0\le x\le 2\\ x^2-4x+m,2<x\le 4\end{cases}$ 是"Ω 函数"可得 $\begin{cases}0\le m-4\le 10\\ m\ge 10\end{cases}$，

解得 $10\le m\le 14$，即实数 m 的取值范围是 $\left[10,14\right]$.

故选：C.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-2<x<1\right\}$，则下列选项正确的是（　　）

A. $b<0$ 且 $c>0$

B. 不等式 $bx-c>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|x>2\right\}$

C. $a+b+c>0$

D. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$

【答案】BCD

【解析】对于 A，$a<0$，-2，1 是方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根，所以 $1-2=-1=\frac{b}{a}$，$-2\times 1=\frac{c}{a}$，所以 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，$c=-2a$，所以 $b>0$，$c>0$，所以 A 错误；

对于B，$bx-c=bx-2b=b\left(x-2\right)$，由$b>0$可得不等式解集为$\left\{x|x>2\right\}$，所以B正确;

对于C，当$x=-1$时，$ax^2-bx+c>0$，$a+b+c>0$，所以C正确；

对于D，由题得$ax^2+bx+c=ax^2-ax-2a>0$，因为$a<0$，所以$x^2-x-2<0$，

所以$-1<x<2$，所以不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$\left\{x|-1<x<2\right\}$，所以D正确.

故选：BCD.

10. 已知全集$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，A是U的非空子集，当$x\in A$时，$x-1\notin A$且$x+1\notin A$，则称x为A的一个“孤立元素”，则下列说法正确的是（　　）

A. 若A中元素均为孤立元素，则A中最多有3个元素

B. 若A中不含孤立元素，则A中最少有2个元素

C. 若A中元素均为孤立元素，且仅有2个元素，则这样的集合A共有9个

D. 若A中不含孤立元素，且仅有4个元素，则这样的集合A共有6个

【答案】ABD

【解析】对于A，因为集合$\{0,1\}$，$\left\{2,3\right\}$，$\left\{4,5\right\}$的并集为U，

且集合$\{0,1\}$，$\left\{2,3\right\}$，$\left\{4,5\right\}$中任意两个集合的交集都为空集，

若A中的元素个数大于3，则必有两个元素来自集合$\{0,1\}$，$\left\{2,3\right\}$，$\left\{4,5\right\}$中的一个，

此时，集合A中存在不是孤立元素的元素，

故若A中元素均为孤立元素，则A中的元素个数小于等于3，

又$A=\left\{0,2,4\right\}$时，A中元素均为孤立元素，

所以若A中元素均为孤立元素，则A中最多有3个元素，

对于B，若A中只有1个元素，则必为孤立元素，

又集合$A=\left\{0,1\right\}$时，A中不含孤立元素，故B正确；

对于C，易知这样的集合A有$\{0,2\}$，$\{0,3\}$，$\{0,4\}$，$\{0,5\}$；$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{1,5\}$；$\{2,4\}$，$\{2,5\}$；$\{3,5\}$共10个，故C错误；

对于D，$\because U=\{0,1,2,3,4,5\}$，其中不含“孤立元素”且包含有四个元素的集合有$\{0,1,2,3\}$，$\{0,1,3,4\}$，$\{0,1,4,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{2,3,4,5\}$共6个，故D正确.

故选：ABD.

11. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in \mathrm{R}$，用$\left[x\right]$表示不超过x的最大整数，则$y=\left[x\right]$称为高斯函数，如$[3.24]=3,\left[-1.5\right]=-2$.设函数$f\left(x\right)=x-\left[x\right]$，则下列说法错误的是（　　）

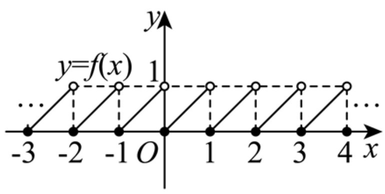
A. $f\left(x\right)$的图象关于y轴对称　　B. $f\left(x\right)$的最大值为1，没有最小值

C. $f\left(\sqrt{6}\right)+f\left(\sqrt{13}\right)>1$　　D. $f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上是增函数

【答案】ABD

【解析】因为$f(x)=x-[x]=\begin{cases}\cdots \\ x+1,-1\le x<0 \\ x,0\le x<1 \\ x-1,1\le x<2 \\ x-2,2\le x<3 \\ \cdots\end{cases}$，

画出$f\left(x\right)=x-\left[x\right]$的图象如下：



A选项，可以看出此函数不是偶函数，不关于y轴对称，A错误；

B选项，$f\left(x\right)$无最大值，有最小值0，B错误；

C选项，因为$\sqrt{6}\in\left(2,3\right),\sqrt{13}\in\left(3,4\right)$，

故$f\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}-2,f\left(\sqrt{13}\right)=\sqrt{13}-3$，

$f\left(\sqrt{6}\right)+f\left(\sqrt{13}\right)=\sqrt{6}-2+\sqrt{13}-3=\sqrt{6}+\sqrt{13}-5$，

因为$\left(\sqrt{6}+\sqrt{13}\right)^2-36=2\sqrt{78}-17=\sqrt{312}-\sqrt{289}>0$，

所以$\sqrt{6}+\sqrt{13}>6$，故$f\left(\sqrt{6}\right)+f\left(\sqrt{13}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{13}-5>1$，C正确；

D选项，由图象可知$f\left(x\right)$在R上不是增函数，D错误.

故选：ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{8}{x}$， $x\in\left[1,2\right]$， $g\left(x\right)=ax+2a-1$， $x\in\left[-1,3\right]$. 对于任意的 $x_1\in\left[1,2\right]$，存在 $x_2\in\left[-1,3\right]$，使得 $f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)$，则 a 的取值范围是______.

【答案】$a\leq 5$

【解析】因为 $f\left(x\right)=\dfrac{8}{x}$， $x\in\left[1,2\right]$，所以 $f\left(x\right)\in\left[4,8\right]$，

又对于任意的 $x_1\in\left[1,2\right]$，存在 $x_2\in\left[-1,3\right]$，使得 $f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)$，则 $f\left(x\right)_{\min}\geq g\left(x\right)_{\min}$，

又 $g\left(x\right)=ax+2a-1$， $x\in\left[-1,3\right]$，

当 $a\geq 0$ 时， $g\left(x\right)_{\min}=g(-1)=-a+2a-1=a-1$，所以 $4\geq a-1$，解得 $0\leq a\leq 5$，

当 $a<0$ 时， $g\left(x\right)_{\min}=g(3)=3a+2a-1=5a-1$，所以 $4\geq 5a-1$，解得 $a<0$，

综上， a 的取值范围是 $a\leq 5$.

13. 已知集合 $A=\left\{x|\ x^2-6x+8=0\right\},B=\left\{x|\ mx-4=0\right\}$，若 $B\cap A=B$，且 $B\neq\varnothing$，则实数 m 所取到的值为______或______.

【答案】2　　1

【解析】 $A=\left\{x|\ x^2-6x+8=0\right\}=\left\{2,4\right\}$，

因为 $B\cap A=B$，且 $B\neq\varnothing$，所以 $B=\left\{2\right\}$ 或 $B=\left\{4\right\}$，

当 $B=\left\{2\right\}$ 时，可得： $2m-4=0$，得： $m=2$，

当 $B=\left\{4\right\}$ 时，可得： $4m-4=0$，得： $m=1$，

所以实数 m 所取到的值为 2 或 1.

14. 已知方程 $6x^2-x+2a=0$ 的两根分别为 $x_1,x_2,x_1\neq x_2$，若对于 $\forall t>0$，都有 $\dfrac{1+t}{4+t^2+t}\leq\left(x_1-x_2\right)^2$ 成立，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$(-\infty,-\dfrac{11}{48}]$

【解析】设 $1+t=s$，则 $t=s-1$，且 $s>1$，

则$\dfrac{1+t}{4+t^2+t}=\dfrac{s}{4+(s-1)^2+(s-1)}=\dfrac{s}{s^2-s+4}=\dfrac{1}{s+\dfrac{4}{s}-1}\le\dfrac{1}{2\sqrt{s\cdot\dfrac{4}{s}}-1}=\dfrac{1}{3}$,

当且仅当$s=\dfrac{4}{s}$时，即$s=2$时，即$t=1$时，等号成立，

又由方程$6x^2-x+2a=0$的两根分别为x_1,x_2且$x_1\ne x_2$，

可得$\begin{cases}\Delta=1-48a>0\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{6}\\ x_1x_2=\dfrac{a}{3}\end{cases}$，所以$\left(x_1-x_2\right)^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=\dfrac{1}{36}-\dfrac{4a}{3}$，且$a<\dfrac{1}{48}$，

因为对于$\forall t>0$，都有$\dfrac{1+t}{4+t^2+t}\le\left(x_1-x_2\right)^2$成立，即不等式$\dfrac{1}{36}-\dfrac{4a}{3}\ge\dfrac{1}{3}$成立，

解得$a\le-\dfrac{11}{48}$，所以实数a的取值范围为$(-\infty,-\dfrac{11}{48}]$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知集合$A=\left\{x\middle|\dfrac{x+2}{x-4}<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x-m<0\right\}$.

（1）若$m=3$，全集$U=A\cup B$，试求$A\cap\complement_U B$；

（2）若$A\cap B=\varnothing$，求实数m的取值范围；

（3）若$A\cap B=A$，求实数m的取值范围；

解：（1）解不等式$\dfrac{x+2}{x-4}<0$得$-2<x<4$，$\therefore A=\left\{x\middle|-2<x<4\right\}$，

解$x-m<0$得$x<m$，$\therefore B=\left\{x\middle|x<m\right\}$，

当$m=3$时，$B=\left\{x\middle|x<3\right\}$，

$\therefore U=A\cup B=\left\{x\middle|x<4\right\}$，$\therefore\complement_U B=\left\{x\middle|x\ge3\right\}$，

$\therefore A\cap\complement_U B=\left\{x\middle|3\le x<4\right\}$.

（2）由（1）可知$A=\left\{x\middle|-2<x<4\right\}$，$B=\left\{x\middle|x<m\right\}$，

$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore m\le-2$，

∴实数m的取值范围：$\{m|m\le -2\}$.

（3）由（1）可知$A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<m\}$，

∵$A\cap B=A$，∴$A\subseteq B$，∴$m\ge 4$，

∴实数m的取值范围：$\{m|m\ge 4\}$.

16. 已知函数$y=ax^2+bx+c$.

（1）若$b=-2a$，$c=2a-1$，函数的最小值为0，求a的值；

（2）若$c>0,a=1,b=-c-2$，不等式$ax^2+bx+c<0$有且仅有四个整数解，求实数c的取值范围；

（3）当$b<0$时，对$\forall x\in \mathrm{R}$，$y\ge 0$，若存在实数m使得$(1-m)a+(1+2m)b+3c=0$成立，求m的最小值.

解：（1）当$b=-2a$，$c=2a-1$时，$y=ax^2+bx+c=ax^2-2ax+2a-1$，

由题意得，函数$y=ax^2-2ax+2a-1$的值域$[0,+\infty)$，

（i）$a=0$时，不符合题意；

（ii）$a\ne 0$时，$\Delta=(2a)^2-4a(2a-1)=0$，即$a=1$；

综上，$a=1$.

（2）因为$a=1,b=-c-2$，不等式$ax^2+bx+c<0$转化为$x^2-(c+2)x+c<0$，

因为$x^2-(c+2)x+c<0$有四个整数解，

则$x^2-(c+2)x+c=0$必有两个不相等实数根，记为x_1,x_2，且$x_1<x_2$，

又因为当$x=0$时，$x^2-(c+2)x+c=c>0$，

当$x=1$时，$x^2-(c+2)x+c=-1<0$，

$y=x^2-(c+2)x+c$的图象开口向上，对称轴为$x=\dfrac{c+2}{2}>0$，所以$0<x_1<1$，

故不等式的解集中的四个整数解为$1,2,3,4$，所以$4<x_2\le 5$，

所以$\begin{cases}16-4(c+2)+c<0\\25-5(c+2)+c\ge 0\end{cases}$，故$\dfrac{8}{3}<c\le\dfrac{15}{4}$.

（3）因为当$b<0$时，对$\forall x\in \mathrm{R}$，$y=ax^2+bx+c\geq 0$，

由题设$\begin{cases}a>0\\ \Delta=b^2-4ac\leq 0\end{cases}$，有$b^2\leq 4ac$，

又$b<0$，则$c\geq \dfrac{b^2}{4a}>0$，

又$(1-m)a+(1+2m)b+3c=a+b+3c+(2b-a)m$，$2b-a<0$，

故存在$m\in \mathrm{R}$使$a+b+3c+(2b-a)m=0$成立，则$m=\dfrac{a+b+3c}{a-2b}$，

所以$m=1+\dfrac{3(b+c)}{a-2b}\geq 1+3\cdot\dfrac{\frac{b}{a}(1+\frac{b}{4a})}{1-\frac{2b}{a}}$，

令$t=\dfrac{b}{a}$，则$m\geq 1+3\cdot\dfrac{t(1+\frac{t}{4})}{1-2t}=1+\dfrac{3t(t+4)}{4-8t}$，$t<0$，

令$n=4-8t$，则$n>0$，且$t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{8}$，

故$m\geq 1+\dfrac{3\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{8}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{8}+4\right)}{n}=\dfrac{3n}{64}+\dfrac{27}{4n}-\dfrac{7}{8}\geq 2\sqrt{\dfrac{3n}{64}\cdot\dfrac{27}{4n}}-\dfrac{7}{8}=\dfrac{1}{4}$，

当且仅当$\dfrac{3n}{64}=\dfrac{27}{4n}$，即$n=12$，$t=-1$，$a=-b$时，等号成立，

所以$m\geq\dfrac{1}{4}$，即m的最小值为$\dfrac{1}{4}$.

17. 已知$a\geq 0,b>0$，且$a+2b=1$.

（1）求ab最大值；

（2）求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b}$最小值；

（3）若不等式$\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{1}{b}\geq m^2-3m$恒成立，求实数$m$的取值范围.

解：（1）已知$a\geq 0,b>0$，且$a+2b=1$，

$\therefore a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$，$\therefore ab\leq\dfrac{1}{8}$，

当且仅当$a=2b$即$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{4}$，取“=”.

所以 ab 最大值为 $\frac{1}{8}$.

（2）$\frac{1}{a}+\frac{a}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1-2b}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+2b)-2$

$=1+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\geq 1+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=1+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}-1$，$b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取"="，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}$ 最小值为 $1+2\sqrt{2}$.

（3）$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a+1}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a+1+2b)=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4b}{a+1}+\frac{a+1}{b}\right)\geq\frac{1}{2}(4+2\sqrt{\frac{4b}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b}})=4$，

当且仅当 $\frac{4b}{a+1}=\frac{a+1}{b}$，即 $a=0$，$b=\frac{1}{2}$ 时取"="，

$\therefore m^2-3m\leq 4$，解得 $-1\leq m\leq 4$，

所以实数 m 的取值范围为 $[-1,4]$.

18. 已知方程 $x^2-mx+n-2=0(m,n\in\mathbf{R})$.

（1）若 $m=1$，$n=0$，求方程 $x^2-mx+n-2=0$ 的解；

（2）若对任意实数 m，方程 $x^2-mx+n-2=x$ 恒有两个不相等的实数解，求实数 n 的取值范围；

（3）若方程 $x^2-mx+n-2=0(m\geq 3)$ 有两个不相等的实数解 x_1,x_2，且 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=8$，求 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}-\frac{8}{x_1+x_2}$ 的最小值.

解：（1）$m=1$，$n=0$ 时，$x^2-x-2=0$，解得 $x=2$ 或 -1.

（2）$x^2-mx+n-2=x\Rightarrow x^2-(m+1)x+n-2=0$，

故 $\Delta=(m+1)^2-4(n-2)>0$，所以 $n<\frac{1}{4}(m+1)^2+2$，

其中 $\frac{1}{4}(m+1)^2+2\geq 2$，当且仅当 $m=-1$ 时，等号成立，

故 $n<2$.

（3）$x^2-mx+n-2=0(m\geq 3)$ 有两个不相等的实数解 x_1,x_2，

$\Delta=m^2-4(n-2)>0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=m, x_1x_2=n-2$，

故 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=m^2-4n+8=8$，所以 $m^2=4n$，此时 $\Delta=8>0$，

所以 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}-\frac{8}{x_1+x_2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}-\frac{8}{x_1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1x_2}-\frac{8}{x_1+x_2}$

$=\frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{x_1x_2}-\frac{8}{x_1+x_2}=\frac{m(m^2-3n+6)}{n-2}-\frac{8}{m}$，

因为 $m^2=4n$，

所以 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}-\frac{8}{x_1+x_2}=\frac{m\left(\frac{m^2}{4}+6\right)}{\frac{m^2}{4}-2}-\frac{8}{m}=\frac{m\left(\frac{m^2}{4}-2+8\right)}{\frac{m^2}{4}-2}-\frac{8}{m}=m-\frac{8}{m}+\frac{32}{m-\frac{8}{m}}$，

令 $t=m-\frac{8}{m}$，其在 $m\geq 3$ 上单调递增，故 $t\geq 3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$，

故 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}-\frac{8}{x_1+x_2}=t+\frac{32}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{32}{t}}=8\sqrt{2}$，

当且仅当 $t=\frac{32}{t}$，即 $t=4\sqrt{2}$ 时，等号成立，

故 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}-\frac{8}{x_1+x_2}$ 的最小值为 $8\sqrt{2}$.

19. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 D．集合 $M\subseteq D$，若存在非零实数 t 使得任意 $x\in M$ 都有 $x+t\in D$，且 $f(x+t)>f(x)$，则称 $f(x)$ 为 M 上的 t 增长函数.

（1）已知函数 $g(x)=x$，函数 $h(x)=x^2$，判断 $g(x)$ 和 $h(x)$ 是否为区间 $[-1,0]$ 上的 $\frac{3}{2}-$ 增长函数，并说明理由：

（2）已知函数 $f(x)=|x|$，且 $f(x)$ 是区间 $[-4,-2]$ 上的 $n-$ 增长函数，求正整数 n 的最小值；

（3）如果 $f(x)$ 的图像关于原点对称，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=|x-a^2|-a^2$，且 $f(x)$ 为 R 上的 $4-$ 增长函数，求实数 a 的取值范围.

解：（1）$g(x)=x$是：因为$\forall x\in[-1，0]$，$g(x+\frac{3}{2})-g(x)=(x+\frac{3}{2})-x=\frac{3}{2}>0$；

$h(x)=x^2$不是，反例：当$x=-1$时，$h(-1+\frac{3}{2})=h(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}<h(-1)=1$.

（2）由题意得，$|x+n|>|x|$对于$x\in[-4,-2]$恒成立，

等价于$x^2+2nx+n^2>x^2$，即$2nx+n^2>0$对$x\in[-4,-2]$恒成立，

令$m(x)=2nx+n^2$，因为$n>0$，所以$m(x)$是区间$[-4,-2]$上单调递增的一次函数，

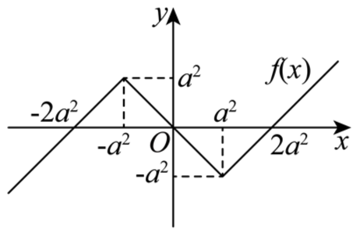
要保证$2nx+n^2>0$对$x\in[-4,-2]$恒成立，则$m(x)_{\min}>0$，

即$m(-2)=-8n+n^2>0$，　解得$n>8$，

所以满足题意的最小正整数n为 9.

（3）根据题意，当$x>a^2$时，$f(x)=x-2a^2$，当$0\le x\le a^2$时，$f(x)=-x$，

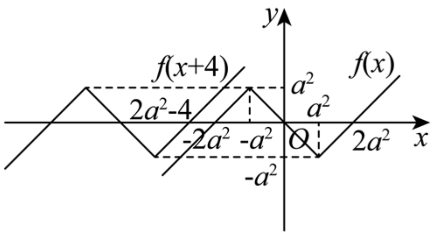
因为$f(x)$的图像关于原点对称，所以可作出其函数图象，如下图所示：



所以$f(x)=\begin{cases}x-2a^2,x>a^2\\-x,-a^2\le x\le a^2\\x+2a^2,x<-a^2\end{cases}$，

若$f(x)$是 R 上的$4-$增长函数，则对任意的x，都有$f(x+4)>f(x)$，

因为$f(x+4)$是将$f(x)$向左平移四个单位得到，如下图所示，



所以$2a^2-4\le-2a^2$，解得$-1\le a\le1$，

所以实数a的取值范围为$[-1,1]$.

安徽省合肥市部分学校 2024—2025 学年高一上学期