

2023 学年第一学期期末学业水平测试

高二数学试题卷

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔再答题卷指定的区域（黑色边框）内作答，超出答题区域的作答无效！

3. 考试结束后，只需上交答题卷。选择题部分（共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{0, 1, 4\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合 B ，利用交集的定义可求得集合 $A \cap B$ 。

【详解】因为 $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\} = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

则 $A \cap B = \{0, 1, 4\}$ 。

故选：D。

2. 已知 $(2+i)z = i$, i 为虚数单位，则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数的除法化简复数 z ，利用复数的模长公式可求得 $|z|$ 的值。

【详解】因为 $(2+i)z = i$, 则 $z = \frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$, 故 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

故选：C。

3. 已知平面向量 $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 且 $(m\vec{a} - \vec{b}) \parallel (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $m =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先求出 $m\vec{a} - \vec{b}$ 、 $\vec{a} + \vec{b}$ 的坐标, 再根据平面向量共线的坐标表示得到方程, 解得即可.

【详解】因为 $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1)$,

所以 $m\vec{a} - \vec{b} = m(2, 0) - (-1, 1) = (2m + 1, -1)$, $\vec{a} + \vec{b} = (2, 0) + (-1, 1) = (1, 1)$,

因为 $(m\vec{a} - \vec{b}) \parallel (\vec{a} + \vec{b})$, 所以 $(2m + 1) \times 1 = -1 \times 1$, 解得 $m = -1$.

故选: A

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左, 右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 若双曲线左支上存在点 P

使得 $|PF_2| = \frac{3}{2}c - 2a$, 则离心率的取值范围为 ()

- A. $[6, +\infty)$ B. $(1, 6]$
C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据双曲线的性质: 双曲线左支上的点 P 到右焦点 F_2 的距离: $|PF_2| \geq a + c$ 可确定双曲线离心率的取值范围.

【详解】由题意: $\frac{3}{2}c - 2a \geq a + c \Rightarrow \frac{1}{2}c \geq 3a \Rightarrow e = \frac{c}{a} \geq 6$.

故选: A

5. 已知 $2\cos^2 \theta - \cos \theta = 1$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\sin \theta =$ ()

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 0 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由已知可得出 $-1 < \cos \theta < 1$ ，解方程 $2\cos^2 \theta - \cos \theta = 1$ ，可得出 $\cos \theta$ 的值，再利用同角三角函数的基本关系可求得 $\sin \theta$ 的值.

【详解】因为 $\theta \in (0, \pi)$ ，则 $-1 < \cos \theta < 1$ ，由已知可得 $2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$ ，解得 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ，
故 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D.

6. 数学家欧拉研究调和级数得到了以下的结果：当 x 较大时， $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} = \ln x + \gamma$ ($x \in \mathbf{N}^*$ ，常数 $\gamma = 0.557K$)。利用以上公式，可以估算 $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{300}$ 的值为 ()

A. $\ln 30$ B. $\ln 3$ C. $-\ln 3$ D. $-\ln 30$

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{300} = \ln 300 + \gamma$ ， $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} = \ln 100 + \gamma$ ，两式相减，根据对数的运算法则计算可得.

【详解】依题意可得 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{300} = \ln 300 + \gamma$ ，
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} = \ln 100 + \gamma$ ，
两式相减可得 $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{300} = \ln 300 - \ln 100 = \ln 3$.

故选：B

7. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则“ $\cos(\alpha - \beta) < \frac{1}{4}$ ”是“ $\cos \alpha + \sin \beta < \frac{1}{4}$ ”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta < \cos \alpha + \sin \beta$ ，利用充分条件、必要条件的定义判断可得答案.

【详解】由 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $0 < \cos \beta < 1$ ， $0 < \sin \alpha < 1$ ，

所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta < \cos \alpha + \sin \beta$,

所以由 $\cos(\alpha - \beta) < \frac{1}{4}$ 不能推出 $\cos \alpha + \sin \beta < \frac{1}{4}$, 充分性不成立;

反之, $\cos \alpha + \sin \beta < \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) < \frac{1}{4}$ 成立, 即必要性成立;

$\therefore \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则“ $\cos(\alpha - \beta) < \frac{1}{4}$ ”是“ $\cos \alpha + \sin \beta < \frac{1}{4}$ ”的必要不充分条件.

故选: B.

8. 已知圆 $C: x^2 - 2x + y^2 = 0$ 与直线 $l: y = mx + 2m (m > 0)$, 过 l 上任意一点 P 向圆 C 引切线, 切点为 A 和 B , 若线段 AB 长度的最小值为 $\sqrt{2}$, 则实数 m 的值为 ()

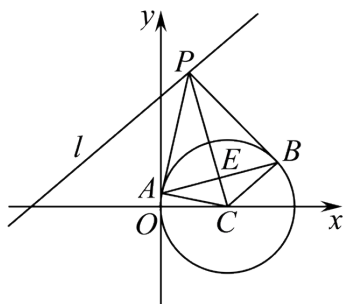
- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{14}}{7}$

【答案】D

【解析】

【分析】推导出 PC 垂直平分 AB , 分析可知, 当 $|PC|$ 取最小值时, $|AB|$ 取最小值, 此时, $PC \perp l$, 利用点到直线的距离公式可得出关于 m 的等式, 解之即可.

【详解】圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 圆心为 $C(1, 0)$, 半径为 1, 如下图所示:



由圆的几何性质可知 $AC \perp PA$, $BC \perp PB$,

因为 $|PA| = |PB|$, $|AC| = |BC|$, $|PC| = |PC|$, 所以, $\triangle PAC \cong \triangle PBC$,

所以, $\angle APC = \angle BPC$, 则 $PC \perp AB$,

设 $AB \cap PC = E$, 则 E 为 AB 的中点,

由勾股定理可得 $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{|PC|^2 - 1}$,

由等面积法可得 $|AB| = 2|AE| = \frac{2|PA| \cdot |AC|}{|PC|} = \frac{2\sqrt{|PC|^2 - 1}}{|PC|} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{|PC|^2}}$,

所以, 当 $|PC|$ 取最小值时, $|AB|$ 取最小值, 由 $2\sqrt{1-\frac{1}{|PC|^2}} = \sqrt{2}$, 可得 $|PC| = \sqrt{2}$,

所以, $|PC|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$, 当 PC 与直线 l 垂直时, $|PC|$ 取最小值,

则 $\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}$, 因为 $m > 0$, 解得 $m = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

故选: D.

【点睛】方法点睛: 本题考查圆的切点弦长的计算, 一般方法有如下两种:

- (1) 求出切点弦所在直线的方程, 然后利用勾股定理求解;
- (2) 利用等面积法转化为直角三角形斜边上的高, 作为切点弦长的一般求解.

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知一组数据: 3, 3, 4, 4, 4, x , 5, 5, 6, 6 的平均数为 4.7, 则 ()

- A. $x = 7$
- B. 这组数据的中位数为 4
- C. 若将这组数据每一个都加上 0.3, 则所有新数据的平均数变为 5
- D. 这组数据的第 70 百分位数为 5.5

【答案】 ACD

【解析】

【分析】 根据平均数求出 x 值, 再根据百分位的性质求出结果.

【详解】 由题意得 $\frac{1}{10}(3+3+4+4+4+x+5+5+6+6) = 4.7$, 解得 $x = 7$, 故 A 正确;

将这组数据从小到大排列为 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 则中位数 $\frac{4+5}{2} = 4.5$, 故 B 错误;

若将这组数据每一个都加上 0.3, 则所有新数据的平均数变为 $4.7 + 0.3 = 5$, 故 C 正确;

因为 $10 \times 70\% = 7$, 所以这组数据的第 70 百分位数为 $(5+6) \div 2 = 5.5$, 故 D 正确.

故选: ACD.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 且 $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, 下面说法正确的是 ()

- A. $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$
- B. $\cos A : \cos B : \cos C = 5 : 6 : 7$
- C. $\triangle ABC$ 是锐角三角形

D. $\triangle ABC$ 的最大内角是最小内角的 2 倍

【答案】AC

【解析】

【分析】利用正弦定理可判断 A 选项；利用余弦定理可判断 BC 选项；利用二倍角的余弦公式可判断 D 选项。

【详解】对于 A，由正弦定理可得 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 5 : 6 : 7$ ，A 对；

对于 B，由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{2 \times 6 \times 7} = \frac{5}{7}$ ，

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25 + 49 - 36}{2 \times 5 \times 7} = \frac{19}{35}$ ， $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \times 5 \times 6} = \frac{1}{5}$ ，

所以， $\cos A : \cos B : \cos C \neq 5 : 6 : 7$ ，B 错；

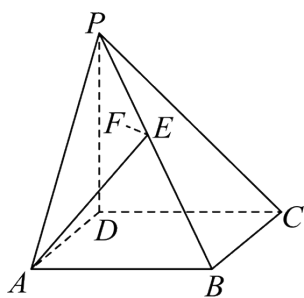
对于 C，因为 $a < b < c$ ，则 C 为最大角，又因为 $\cos C = \frac{1}{5} > 0$ ，则 C 为锐角，故 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，C 对；

对于 D，由题意知，A 为最小角，则 $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 - 1 = \frac{1}{49} \neq \cos C$ ，

因为 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $2A \in (0, \pi)$ ，则 $C \neq 2A$ ，D 错。

故选：AC。

11. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PD \perp$ 面 $ABCD$ ， $PD = 2\sqrt{3}$ ，点 E 是棱 PB 上一点（不包括端点）， F 是平面 PCD 内一点，则（ ）



A. 一定不存在点 E ，使 $AE \parallel$ 平面 PCD

B. 一定不存在点 E ，使 $PB \perp$ 平面 ACE

C. 以 D 为球心，半径为 2 的球与四棱锥的侧面 PAD 的交线长为 $\frac{\pi}{3}$

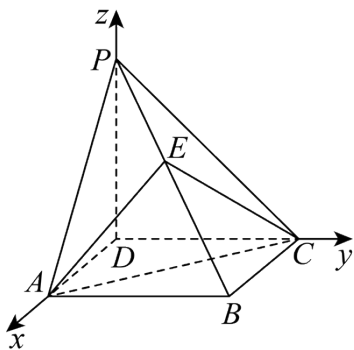
D. $|AE| + |EF|$ 的最小值 $\frac{16}{5}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】建立坐标系，利用空间向量判断 A, B, 把 $\triangle PAB, \triangle PCB$ 展开到同一平面内计算判断 D, 求出球面与 $\triangle PAD, \triangle PAB$ 的交线，再借助对称计算判断 C 即可.

【详解】对于 A, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 面 $ABCD$, 因为 $DA, DC \subset$ 面 $ABCD$, 所以 $PD \perp DA, PD \perp DC$, 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $DA \perp DC$, 以 D 为原点, 射线 DA, DC, DP 分别为 x, y, z 轴非负半轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3})$,

设 $\vec{PE} = \lambda \vec{PB} = \lambda(2, 2, -2\sqrt{3}) = (2\lambda, 2\lambda, -2\sqrt{3}\lambda), \lambda \in (0, 1)$,

$\vec{AE} = \vec{PE} - \vec{PA} = (2\lambda, 2\lambda, -2\sqrt{3}\lambda) - (2, 0, -2\sqrt{3}) = (2\lambda - 2, 2\lambda, 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda)$,

显然面 PCD 的一个法向量为 $\vec{DA} = (2, 0, 0)$, 而 $\vec{DA} \cdot \vec{AE} = 4\lambda - 4 < 0$,

即 $\vec{DA}, \vec{AE}$ 不垂直, 所以 $\vec{AE}$ 与平面 PCD 不平行, 故 A 正确;

对于 B, 又 $\vec{AC} = (-2, 2, 0), \vec{PB} = (2, 2, -2\sqrt{3})$,

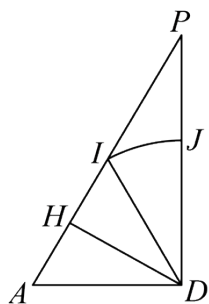
所以 $\vec{AC} \cdot \vec{PB} = -4 + 4 + 0 = 0$, 即 $AC \perp PB$,

若 $\vec{AE} \cdot \vec{PB} = 4\lambda - 4 + 4\lambda - 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda) = 20\lambda - 16 = 0$, 则 $\lambda = \frac{4}{5} \in (0, 1)$,

所以存在点 E , 使得 $AE \perp PB$,

又 $AE \cap AC = A, AE, AC \subset$ 平面 ACE , 所以 $PB \perp$ 平面 ACE , 故 B 错误;

对于 C，由题意球面与 $Rt\triangle PAD$ 的交线如图中圆弧 $\overset{\circ}{IJ}$ ，



而 $DJ = DI = DA = 2$, $\angle PAD = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle IDJ = \frac{\pi}{6}$,

所以圆弧 $\overset{\circ}{IJ}$ 的弧长为 $\frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$, 故 C 正确;

对于 D，由于 $PD \perp$ 面 $ABCD$, $AB \subset$ 面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AB$,

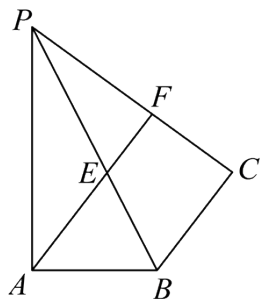
而 $AB \perp AD$, $PD \cap AD = D, PD, AD \subset$ 面 PAD , 所以 $AB \perp$ 面 PAD ,

又 $PA \subset$ 面 PAD , 所以 $AB \perp PA$,

同理 $CB \perp PD$, 且 $PA = PC = \sqrt{12 + 4} = 4$,

把 $\triangle VPAB, \triangle VPCB$ 展开到同一平面内, 要使 $|AE| + |EF|$ 取得最小值, 当且仅当点 F 在 PC 上, 且

$AF \perp PC$, 如图,



因为 $AB = 2$, 所以由勾股定理得 $PB = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$,

所以 $\sin \angle BPA = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle BPA = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

而 $\angle BPA = \angle BPC$, 所以 $\sin \angle APF = \sin 2\angle BPA = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$,

所以 $(|AE| + |EF|)_{\min} = |AF| = |PA| \cdot \sin \angle APF = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$, 故 D 正确.

故选: ACD.

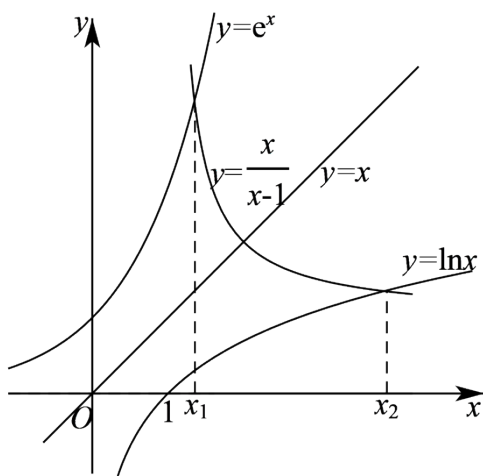
12. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x-1} - e^x (x > 1)$, $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln x (x > 1)$ 的零点分别为 x_1 、 x_2 , 则下列结论正确的是 ()

【答案】ABC

【解析】

$\frac{x_1}{x_1-1} = e^{x_1} = x_2$ 化简可判断 B 选项; 由基本不等式可判断 C 选项; 利用不等式的基本性质可判断 D 选项.

作出函数 $y = e^x$ 、 $y = \ln x$ 、 $y = \frac{x}{x-1}$ 的图象如下图所示:



由对称性可知，点 (x_1, e^{x_1}) 、 $(x_2, \ln x_2)$ 关于直线 $y = x$ 对称，

对于 A 选项， $x_1 = \ln x_2$ ， $x_2 = e^{x_1}$ ，A 对；

对于 B 选项，由 $\frac{x_1}{x_1 - 1} = e^{x_1} = x_2$ ，可得 $x_1 x_2 - x_2 = x_1$ ，所以， $x_1 x_2 = x_2 + x_1$ ，

故 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 1$ ，B 对；

对于 C 选项，若 $x_1 = x_2 > 1$ ，由 $x_1 x_2 = x_2 + x_1$ 可得 $x_1^2 = 2x_1$ ，则 $x_1 = x_2 = 2$ ，

这与 $e^{x_1} = x_2$ 即 $e^2 = 2$ 矛盾，所以， $x_1 \neq x_2$ ，

$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 2 + 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}} = 4$ ，C 对；

对于 D 选项，因为 $x_1 > 1$ ， $x_2 = e^{x_1} > e$ ，由不等式的基本性质可得 $x_1 x_2 > e$ ，D 错。

故选：ABC。

【点睛】关键点点睛：解本题的关键分析出函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，以及同底数的指数函数和对数函数的对称性来得出等量关系，再利用不等式的基本性质求解。

非选择题部分（共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 过 $P(1, \sqrt{3}+1)$ 、 $Q(3, 3\sqrt{3}+1)$ 两点的直线的斜率为_____。

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用两点间的斜率公式可得出直线 PQ 的斜率。

【详解】由已知可得 $k_{PQ} = \frac{(3\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}$ 。

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

14. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 4$ ， $AA_1 = 8$ ，则该直三棱柱的外接球的表面积为_____。

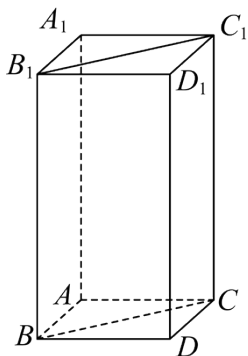
【答案】 80π

【解析】

【分析】将直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 补成长方体 $ABDC - A_1B_1D_1C_1$ ，求出该直三棱柱的外接球的直径，利用球体的表面积公式可求得结果.

【详解】因为 $AB = 2$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 4$ ，则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ，则 $AB \perp AC$ ，

将直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 补成长方体 $ABDC - A_1B_1D_1C_1$ ，如下图所示：



所以，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球直径为 $2R = \sqrt{AB^2 + AC^2 + AA_1^2} = \sqrt{4 + 12 + 64} = 4\sqrt{5}$ ，

因此，该直三棱柱的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \pi \times (2R)^2 = 80\pi$.

故答案为： 80π .

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]$ ，则实数 ω 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

【解析】

【分析】先把函数化成 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式，再根据函数在给定区间上的值域求 ω 的取值范围.

【详解】因为 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \omega x = \sin \omega x \cos \frac{\pi}{3} + \cos \omega x \sin \frac{\pi}{3} + \sin \omega x$

$$= \sin \omega x \cdot \frac{3}{2} + \cos \omega x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right).$$

又 $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq \omega\pi + \frac{\pi}{6}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908017022020007022>