函数的应用基础题汇总（1）

一、单选题（共15小题）

1.以下函数在区间（0，$\frac{1}{2}$）上必有零点的是（　　）

A．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　B．$y=3^{x-\frac{1}{4}}$　　C．y＝ln（x+$\frac{4}{5}$）　　D．y＝2x+1

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于A，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，在区间（0，$\frac{1}{2}$）有y＞0恒成立，在区间（0，$\frac{1}{2}$）上没有零点，不符合题意，

对于B，$y=3^{x-\frac{1}{4}}=\frac{3^x}{\sqrt[4]{3}}$，在区间（0，$\frac{1}{2}$）有y＞0恒成立，在区间（0，$\frac{1}{2}$）上没有零点，不符合题意，

对于C，y＝ln（x+$\frac{4}{5}$），当x＝$\frac{1}{5}$时，y＝ln1＝0，区间（0，$\frac{1}{2}$）上有零点，符合题意，

对于D，y＝2x+1，在区间（0，$\frac{1}{2}$）有y＞0恒成立，在区间（0，$\frac{1}{2}$）上没有零点，不符合题意，

故选：C．

【知识点】函数的零点、函数零点的判定定理

2.已知函数f（x）＝$\frac{x}{x-m}$，若函数f（x）在区间（2，+∞）上单调递减，则实数m的取值范围为（　　）

A．（0，2）　　B．（0，2]　　C．[2，+∞）　　D．（2，+∞）

【解答】解：根据题意，函数f（x）＝$\frac{x}{x-m}$＝$\frac{x-m+m}{x-m}$＝1+$\frac{m}{x-m}$，

由函数y＝$\frac{m}{x}$向左（m＜0）或向右（m＞0）平移|m|个单位，向上平移1个单位得到，

若函数f（x）在区间（2，+∞）上单调递减，必有$\begin{cases}m>0\\m\leqslant 2\end{cases}$，则0＜m≤2，

即m的取值范围为（0，2]，

故选：B．

【知识点】函数的单调性及单调区间、函数单调性的性质与判断

3.已知定义在[0，+∞）上的单调减函数f（x），若f（2a﹣1）＞f（$\frac{1}{3}$），则a的取值范围是（　　）

A. $(-\infty，\frac{2}{3})$　　B. $(\frac{1}{2}，\frac{2}{3})$　　C. $(\frac{2}{3}，+\infty)$　　D. $[\frac{1}{2}，\frac{2}{3})$

【解答】解：根据题意，f（x）是定义在[0，+∞）上的单调减函数，

若 f（2a－1）＞f（$\frac{1}{3}$），则有 0≤2a－1＜$\frac{1}{3}$，解可得$\frac{1}{2}$≤a＜$\frac{2}{3}$，

即 a 的取值范围为$[\frac{1}{2}，\frac{2}{3})$，

故选：D.

【知识点】函数的单调性及单调区间、函数单调性的性质与判断

4.已知函数 f（x）＝$\begin{cases}2^{x}-2，& x>0\\ x^{2}+1，& x\leqslant 0\end{cases}$，若 f（a）＝2，则 a＝（　　）

A. 2　　B. 1　　C. 2 或－1　　D. 1 或－1

【解答】解：当 a＞0 时，f（a）＝2^{a}－2＝2，解得 a＝2；

当 a≤0 时，f（a）＝a^{2}+1＝2，解得 a＝－1；

综上，a＝2 或 a＝－1；

故选：C.

【知识点】函数的零点

5.已知定义在 R 上的函数 f（x）的图象是连续不断的，且有如下对应值表：那么函数 f（x）一定存在零点的区间是（　　）

x	1	2	3	4
f（x）	6.1	2.9	－3.5	－1

A.（－∞，1）　　B.（1，2）　　C.（2，3）　　D.（3，4）

【解答】解：由题意可知：f（3）＝－3.5＜0，

f（2）＝2.9＞0，

所以 f（2）f（3）＜0.

函数 f（x）一定存在零点的区间是（2，3）

故选：C.

【知识点】函数零点的判定定理

6.已知函数 f（2x－1）＝4x－1（x∈R），若 f（a）＝15，则 a 的值为（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【解答】解：根据题意，函数 f（2x－1）＝4x－1＝2（2x－1）+1，

则 f（x）＝2x+1，

若 f（a）＝15，即 $2a+1=15$，解可得 $a=7$，

故选：C．

【知识点】函数的零点

7.新冠病毒是一种传染性极强的病毒，在不采取保护措施的情况下，每天的累计感染人数是前一天的累计感染人数的 1.2 倍，某国在 5 月 1 日时确诊的累计新冠病毒感染总人数为 200 人，如果不采取任何措施，从（　　）天后该国总感染人数开始超过 100 万．（lg1.2＝0.0790，lg5＝0.6990）（　　）

A．43　　B．45　　C．47　　D．49

【解答】解：设 y 为 x 天后该国的总感染人数，

则 $y=200\times1.2^x$，令 $200\times1.2^x>1000000$，

两边取对数得：$x\lg1.2>\lg5000$，即 $x\lg1.2>3+\lg5$，

解得 $x\geqslant47$．

故选：C．

【知识点】根据实际问题选择函数类型

8.已知函数 $f(x)=\ln x+ae^{x-1}+1$ 的图象与函数 $g(x)=\ln\dfrac{1}{2-x}-ae^{1-x}-1$ 的图象有唯一公共点，则实数 a 的值为（　　）

A．1　　B．0　　C．$\sqrt{2}$　　D．－1

【解答】解：函数 $f(x)=\ln x+ae^{x-1}+1$ 的图象与函数 $g(x)=\ln\dfrac{1}{2-x}-ae^{1-x}-1$ 的图象有唯一公共点，

则方程 $\ln x+ae^{x-1}+1=\ln\dfrac{1}{2-x}-ae^{1-x}-1$ 有唯一根，

即方程 $\ln x+ae^{x-1}-\ln\dfrac{1}{2-x}+ae^{1-x}+2=0$ 有唯一根，即函数 $h(x)=\ln x+ae^{x-1}+\ln(2-x)+ae^{1-x}+2$ 有唯一零点，

又 $h(2-x)=\ln(2-x)+ae^{2-x-1}+\ln[2-(2-x)]+ae^{1-(2-x)}+2=\ln(2-x)+ae^{1-x}+\ln x+ae^{x-1}+2$，

于是 $h(2-x)=h(x)$，

故函数 h（x）的图象关于 x＝1 对称，

由于 h（x）只有一个零点，故函数 h（x）的零点只能是 x＝1，

于是 $h(1)=a+a+2=0$，解得 $a=-1$．

故选：D．

【知识点】函数的零点与方程根的关系

9.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x<1\\ f(x-2), & x\geqslant1\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-k\ (0\leqslant k\leqslant1)$ 的所有零点从小到大

依次成等差数列，则 g（x）的零点一定不包含（　　）

A. $2019-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 2019　　C. 2020　　D. $2020+\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】解：由题意，可知 f（x）的周期为 2，函数 g（x）的零点几曲线 y＝f（x）与直线 y＝k 的交点的横坐标；

作出图象.

由图象可得：当 k＝0 时，g（x）的零点为﹣1，1，3，5……，都是奇数，此时可知 2019 是 g（x）的零点；

当 k＝1 时，g（x）的零点为 0，2，4，6……，都是偶数，此时可知 2020 是 g（x）的零点；

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，g（x）的零点为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$1\frac{\sqrt{2}}{2}$，$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$……，以此规律，可知 $2020+\frac{\sqrt{2}}{2}$不是 g（x）的零点；

故选：D.

【知识点】函数零点的判定定理

10. 已知函数 f（x）＝$\begin{cases}(x+a)e^{x}+ax, & x\leqslant 0\\ x^{2}, & x>0\end{cases}$，若函数 y＝f（x）﹣ax﹣b 恰有 4 个零点，则（　　）

A. a＞0，b＞0　　B. a＞0，b＜0　　C. a＜0，b＞0　　D. a＜0，b＜0

【解答】解：（1）令 g（x）＝f（x）﹣ax，则$g(x)=\begin{cases}(x+a)e^{x}, & x\leqslant 0,\\ x^{2}-ax, & x>0,\end{cases}$，

则函数 y＝f（x）﹣ax﹣b 恰有 4 个零点等价于方程 g（x）＝b 有 4 个实数根.

当 x＞0 时，$g(x)=x^{2}-ax=(x-\frac{a}{2})^{2}-\frac{a^{2}}{4}$，

其图象为开口向上、以直线$x=\frac{a}{2}$为对称轴的抛物线的一部分，

当 x≤0 时，g′（x）＝e^{x}（x+a+1），令 g′（x）＝0，得 x＝﹣（a+1）.

若 a＞0，则 g（x）在（﹣∞，﹣（a+1））上单调递减，在（﹣（a+1），0]上单调递增，

在$(0,\frac{a}{2})$上单调递减，在$(\frac{a}{2},+\infty)$上单调递增，且 g（﹣a﹣1）＜0，g（0）＝a＞0，

当 x→﹣∞时，g（x）→0，故可作出函数 g（x）的大致图象，如图 1 所示，

此时若方程 g（x）＝b 有 4 个实数根，则 b＜0，故选项 B 正确；

若﹣1＜a≤0，则函数 g（x）在（﹣∞，﹣（a+1））上单调递减，

在（﹣（a+1），0]上单调递增，在（0，+∞）上单调递增，且 g（﹣a﹣1）＜0，g（0）＝a＜0，

当 x→﹣∞时，g（x）→0，故可作出函数 g（x）的大致图象，如图 2 所示，

显然此时方程 g（x）＝b 不可能有 4 个实数根；

若 a≤﹣1，分析可知函数 g（x）在（﹣∞，0]上单调递增，在（0，+∞）上单调递增，

且 g（0）＝a＜0，x→﹣∞时，g（x）→0，故可作出函数 g（x）的大致图象，如图 3 所示，

此时显然方程 g（x）＝b 不可能有 4 个实数根.

综上可知，选项 A，C，D 不正确，选项 B 正确，

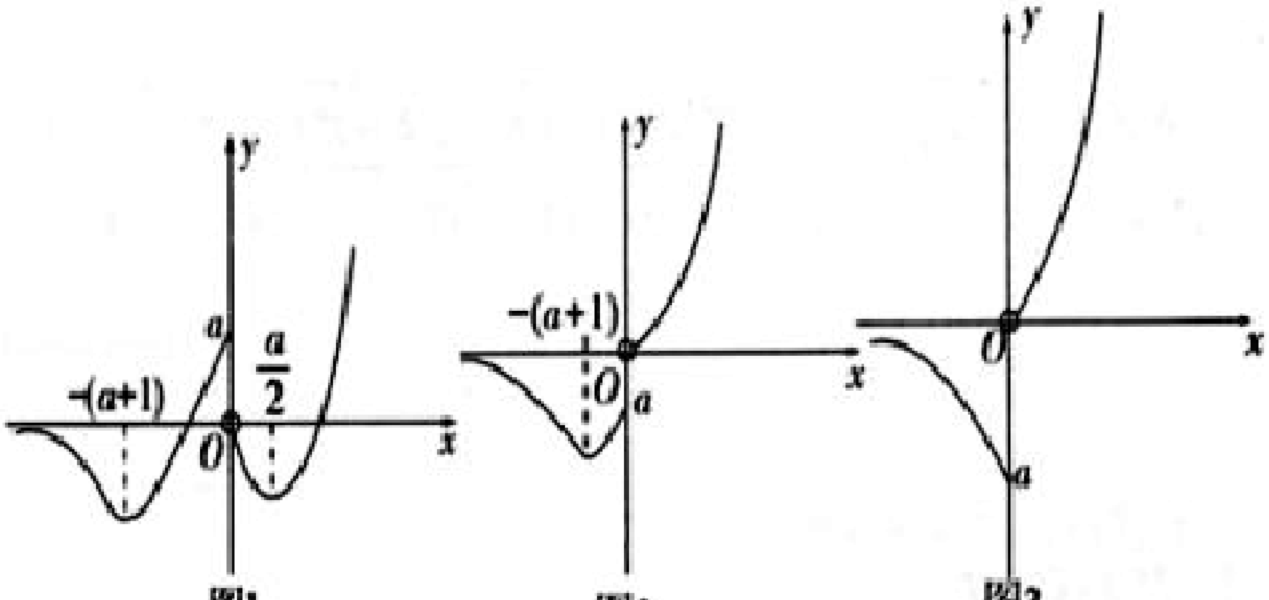


图1　图2　图3

故选：B.

【知识点】函数的零点与方程根的关系

11. 若函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，对任意 x∈R，都有 f（1 - x）＝f（1+x），且当 x∈[0，1]时，f（x）＝2^x - 1，若函数 g（x）＝f（x） - $\log_a$（x+2）（a＞0 且 a≠1）在（ - 1，7）上恰有 4 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（0，$\frac{1}{7}$）∪（7，+∞）　　B.（0，$\frac{1}{7}$）∪（9，+∞）

C.（0，$\frac{1}{9}$）∪（7，+∞）　　D.（0，$\frac{1}{9}$）∪（9，+∞）

【解答】解：∵函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 x∈[0，1]时，f（x）＝2^x - 1，

∴当 x∈[- 1，0]时， - x∈[0，1]，函数 f（x）＝ - f（ - x）＝ - 2^{-x}+1，

又对任意 x∈R，都有 f（1 - x）＝f（1+x），

∴f（x）＝f（x+4），即函数 f（x）的周期为 4，

又由函数 g（x）＝f（x） - $\log_a$（x+2）（a＞0 且 a≠1）在（ - 1，7）上恰有 4 个不同的零点，

得函数 y＝f（x）与 y＝$\log_a$（x+2）的图象在（ - 1，7）上有 4 个不同的交点，

f（1）＝1，当 a＞1 时，由图 1 可得 $\log_a$（5+2）＜1，解得 a＞7；

当 0＜a＜1 时，由图 2 可得 $\log_a$（7+2）＞ - 1，解得$0<a<\frac{1}{9}$.

故选：C.

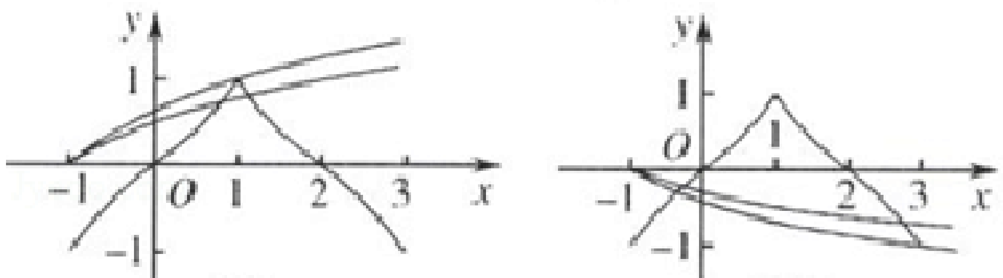


图 1　图 2

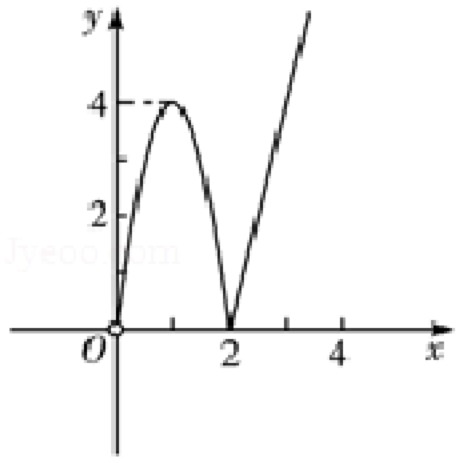
【知识点】函数的零点与方程根的关系

12.已知函数$g(x)=\begin{cases}-4x^2+8x, & x\in(0,2],\\ 4x-8, & x\in(2,+\infty),\end{cases}$ f（x）＝|kx－2|－g（x）（k＞0）在（0，+∞）上有 3 个不同的零点，则 k 的取值范围是（　　）

A.（0，4）　　　　B.（1，+∞）

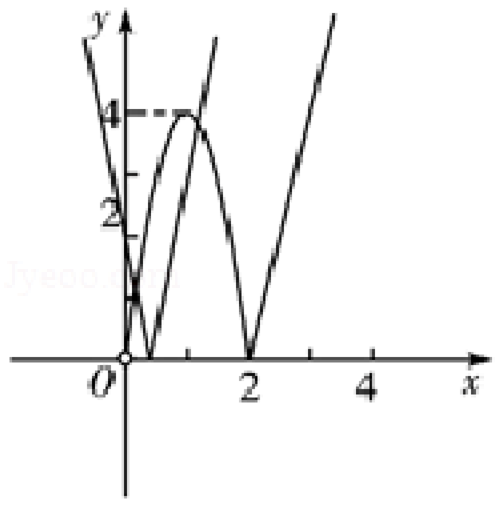
C.（0，1）∪（1，+∞）　　　　D.（0，1）∪（1，4）

【解答】解：因为函数 f（x）＝|kx－2|－g（x）在（0，+∞）上有 3 个不同的零点，所以关于 x 的方程|kx－2|＝g（x）在（0，+∞）上有 3 个不同的实数根．　画出函数 g（x）的图象，如图．

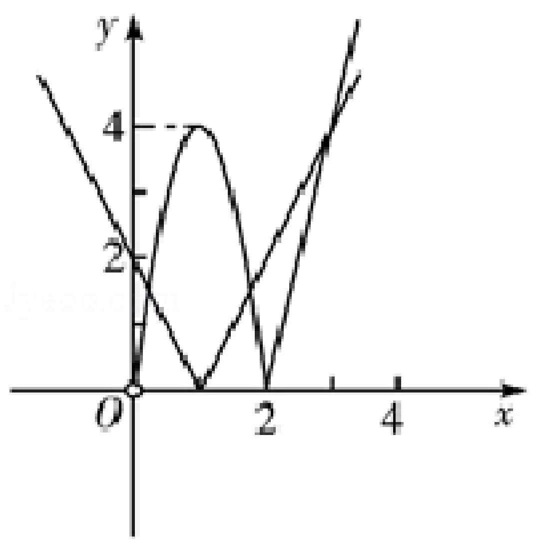


y＝|kx－2|的图象恒过点（0，2），且与 x 轴的交点为$(\frac{2}{k},0)$．

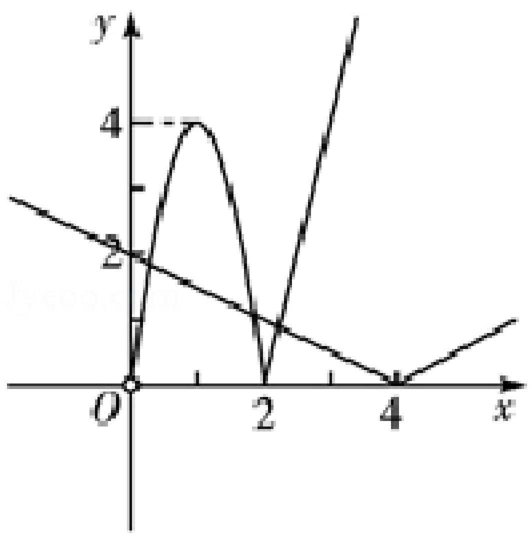
当$0<\frac{2}{k}\leqslant\frac{1}{2}$，即 k≥4 时，y＝|kx－2|与 g（x）的图象在（0，+∞）上仅有 2 个不同的交点，如图．



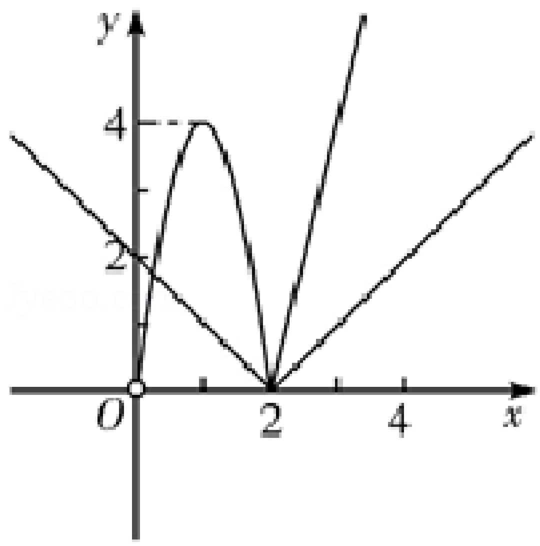
当$\frac{1}{2}<\frac{2}{k}<2$，即 1＜k＜4 时，y＝|kx－2|与 g（x）的图象在$(0,\frac{2}{k})$上有 1 个交点，在$(\frac{2}{k},+\infty)$上有 2 个交点，如图．



当$\frac{2}{k}>2$，即 0＜k＜1 时，y＝|kx－2|与 g(x)的图象在$(0,\frac{2}{k})$上有 3 个交点，在$(\frac{2}{k},+\infty)$上有 0 个交点，如图.



当$\frac{2}{k}=2$，即 k＝1 时，y＝|kx－2|与 g（x）的图象在（0，+∞）上有 2 个交点，如图.



综上，可得 k 的取值范围为（0，1）∪（1，4）.

故选：D.

【知识点】函数的零点与方程根的关系

13.已知函数$f(x)=\frac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}$与 g（x）＝kx+1，若函数 F（x）＝f（x）﹣g（x）有 n 个零点 x_1，x_2，…，x_n，则 F（x_1）+F（x_2）+…+F（x_n）的值为（　　）

A．0　　　　　B．1　　　　　C．n　　　　　D．2n

【解答】解：函数 f（ - x）$=\dfrac{2^{-x+1}}{2^{x}+2^{-x}}=\dfrac{2\cdot 2^{-x}}{2^{x}+2^{-x}}$

则数 f（ - x）+f（x）$=\dfrac{2\cdot 2^{-x}}{2^{x}+2^{-x}}+\dfrac{2\cdot 2^{x}}{2^{x}+2^{-x}}=2$

即 f（ - x）+f（x）=2，可得 f（x）关于（0，1）对称，

直线 y=kx+1，直线恒过（0，1），

∴f（x）与 g（x）均关于（0，1）中心对称，

可得 f（x）+g（x）=2，且 g（x_1）+g（x_n）=g（x_2）+g（x_{n-1}）=…=2，

∴g（x_1）+g（x_2）+…+g（x_n）$=\dfrac{n}{2}$；

那么 f（x）=2 - g（x），

∴F（x_1）+F（x_2）+…+F（x_n）=2n - 2[g（x_1）+g（x_2）+…+g（x_n）]=2n - n=n.

故选：C.

【知识点】函数的零点与方程根的关系

14. 已知定义在 R 上的函数 f（x）满足条件 f（x - 2）=f（x），且函数 y=f（x+1）为偶函数．当 x∈[0，1]时，f（x）=2^x - 1，则方程$f(x)-\dfrac{1}{2}=0$在[- 1，2]上的实根之和为（　　）

A．4　　B．3　　C．2+$\log_2 3$　　D．3 - $\log_2 3$

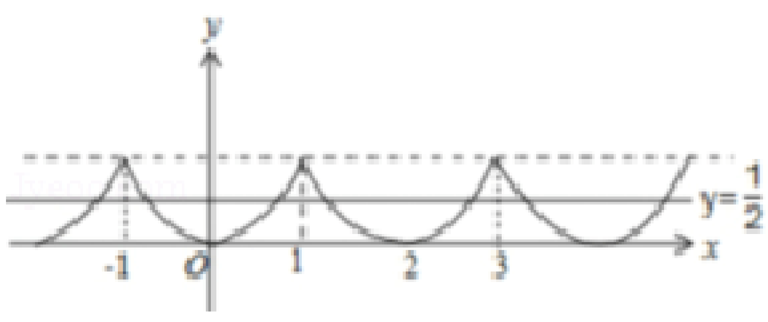
【解答】解：由 f（x - 2）=f（x）得，f（x+2）=f（x），则 f（x）是周期为 2 的周期函数，

又函数 y=f（x+1）为偶函数，

∴函数 y=f（x+1）的图象关于 y 轴对称，

∴函数 y=f（x）的图象关于直线 x=1 对称，

又当 x∈[0，1]，f（x）=2^x - 1，作出函数 y=f（x）的图象如下图所示，



∵函数 f（x）的图象关于直线 x=1 对称，

∴方程$f(x)-\dfrac{1}{2}=0$在[- 1，2]上的实根之和为 2 加上方程$f(x)-\dfrac{1}{2}=0$在[- 1，0]上的实根，

又 x∈[0，1]时，f（x）=2^x - 1，由对称性可知，当 x∈[1，2]时，f（x）=2^{2-x} - 1，

令 x∈[- 1，0]，则 x+2∈[1，2]，故 f（x）=f（x+2）=2^{-x} - 1（x∈[- 1，0]），

令$2^{-x}-1-\dfrac{1}{2}=0$，即$2^{-x}=\dfrac{3}{2}$，解得 x=1 - $\log_2 3$，

∴方程$f(x)-\dfrac{1}{2}=0$在[- 1，2]上的实根之和为 2+1 - $\log_2 3$=3 - $\log_2 3$.

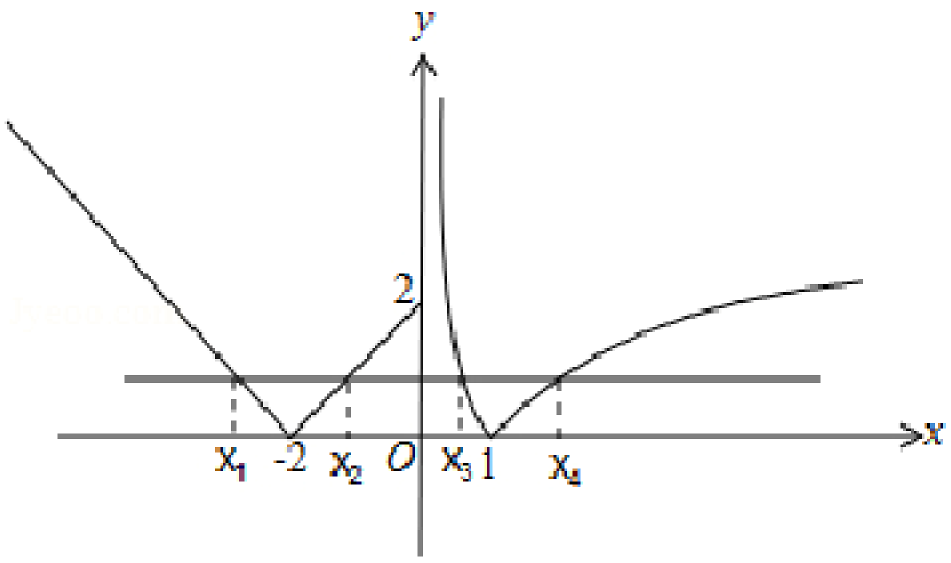
故选：D.

【知识点】函数的零点与方程根的关系、函数奇偶性的性质与判断

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+2|, & x\leqslant 0\\ |\log_2 x|, & x>0\end{cases}$，若方程 f（x）＝a 有四个不同的解 x_1，x_2，x_3，x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_1+x_2+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$的取值范围是（　　）

A. （﹣2，+∞）　B. （﹣2，$\frac{1}{4}$]　C. （0，$\frac{9}{4}$]　D. [﹣2，$\frac{1}{4}$]

【解答】解：作出 $f(x)=\begin{cases}|x+2|, & x\leqslant 0\\ |\log_2 x|, & x>0\end{cases}$ 的图象如图，



由图象的对称性可知，$x_1+x_2=-4$，

又$|\log_2 x_3|=|\log_2 x_4|$，∴$\log_2 x_3=-\log_2 x_4$，

则 $\log_2 x_3+\log_2 x_4=\log_2(x_3x_4)=0$，∴$x_3x_4=1$，

$x_1+x_2+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-4+\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}=-4+x_3+x_4=-4+x_4+\frac{1}{x_4}$.

∵$\log_2 x_4\in(0, 2]$，∴$x_4\in(1, 4]$，

则 $x_1+x_2+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-4+x_4+\frac{1}{x_4}\in(-2, \frac{1}{4}]$.

故选：B.

【知识点】函数的零点与方程根的关系

二、填空题（共 10 小题）

16. 函数$f(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-3}$的零点是____.

【解答】解：函数 f（x）的定义域是（0，3）∪（3，+∞），

显然 x+1＞0，x﹣3≠0，

令 f（x）＝0，即$\frac{(x+1)\ln x}{x-3}$＝0，即 lnx＝0，

解得：x＝1，

故答案为：1．

【知识点】函数的零点

17. 函数$f(x)=\sqrt{x-a}-\sqrt{24-3x}$的值域是$[-2\sqrt{3}，2]$，则 a＝____；f（x）的零点为____．

【解答】解：根据题意，函数$f(x)=\sqrt{x-a}-\sqrt{24-3x}$，则有$\begin{cases}x-a\geqslant 0\\24-3x\geqslant 0\end{cases}$，

必有 a＜8，不等式解可得 a≤x≤8，

则函数的定义域为[a，8]，

函数 y＝$\sqrt{x-a}$在区间[a，8]上为增函数，函数 y＝$\sqrt{24-3x}$在区间[a，8]上为减函数，

则函数 f（x）在[a，8]上为增函数，

又由 f（x）的值域为[﹣2$\sqrt{3}$，2]，则有 f（8）＝$\sqrt{8-a}$＝2，解可得 a＝4，

则 f（x）＝$\sqrt{x-4}$﹣$\sqrt{24-3x}$，若 f（x）＝0，即$\sqrt{x-4}$＝$\sqrt{24-3x}$，解可得 x＝7，

即函数 f（x）的零点为 7，

故答案为：4，7．

【知识点】函数的值域、函数的单调性及单调区间、函数的零点

18. 设函数 f（x）＝$2^{-|x-1|}$，x∈（﹣1，3），定义在 R 上的偶函数 g（x）满足 g（1+x）＝g（1﹣x），当 x∈（﹣1，0）时，g（x）＝x+1，则 f（x）与 g（x）的图象所有交点的横坐标之和为____．

【解答】解：根据题意，函数 f（x）＝$2^{-|x-1|}$＝$(\frac{1}{2})^{|x-1|}$，其图象关于直线 x＝1 对称，

函数 g（x）为偶函数，且满足 g（1+x）＝g（1﹣x），则 g（x）的图象也关于直线 x＝1 对称，

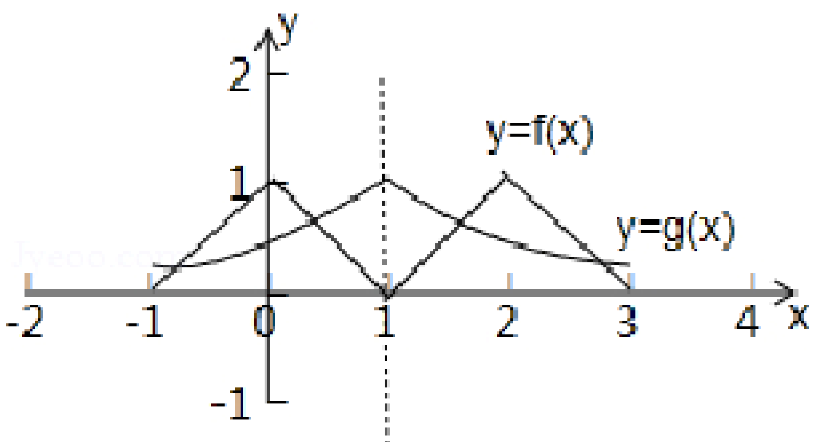
当 x∈（﹣1，0）时，g（x）＝x+1，

则函数 f（x）与 g（x）的大致图象如图，

在区间（﹣1，3）上，两个图象有四个交点，且两两关于直线 x＝1 对称，

则两个图象所有交点的横坐标之和为 4，

故答案为：4．



【知识点】函数的图象与图象的变换、函数奇偶性的性质与判断、函数的零点与方程根的关系

19. 已知 $x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0, 0<\phi<\frac{\pi}{2})$ 相邻的两个零点，则 $\phi=$____；

若函数 $g(x)=|f(x)-\frac{1}{2}|$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, m]$ 上的最大值为 1，则 m 的取值范围是____.

【解答】解：设函数 f（x）的最小正周期为 T，由题意可得 $\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$，则 $T=\pi$，

所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，

则 $f(x)=\sin(2x+\phi)$，

由题意知 $2\times\frac{\pi}{3}+\phi=k\pi$，$k\in Z$，即 $\phi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in Z$，

又 $0<\phi<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\phi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

因为函数 g（x）在 $[-\frac{\pi}{4}, m]$ 上的最大值为 1，且当 $x\in[-\frac{\pi}{4}, m]$ 上的最大值为 1，

当 $x\in[-\frac{\pi}{4}, m]$ 时，$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2m+\frac{\pi}{3}$，

所以 $-\frac{\pi}{6}<2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

所以 $-\frac{\pi}{4}<m\leqslant\frac{5\pi}{12}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$，$(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}]$.

【知识点】函数的零点与方程根的关系

20. 方程 $1+\log_2 x=\log_2(x^2-3)$ 的解为____.

【解答】解：∵$1+\log_2 x=\log_2(x^2-3)$，

∴$\log_2(2x)=\log_2(x^2-3)$，故 $2x=x^2-3$，

故 $\begin{cases} x^2-3>0 \\ x>0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$，解得：$x=3$，

故答案为：$x=3$.

【知识点】函数的零点