

专题4 角的平分线的性质和判定常考题型（原卷版）

题型一 角的平分线的作法

1. （2022•资阳）如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，按下列步骤作图：

第一步：在 AB 、 AC 上分别截取 AD 、 AE ，使 $AD=AE$ ；

第二步：分别以点 D 和点 E 为圆心、适当长（大于 DE 的一半）为半径作圆弧，两弧交于点 F ；

第三步：作射线 AF 交 BC 于点 M ；

第四步：过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N 。

下列结论一定成立的是（ ）

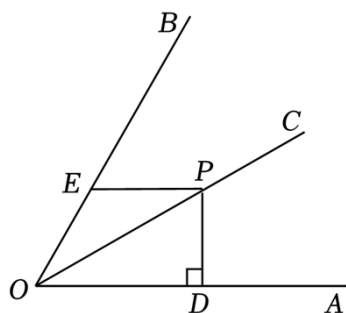
- A. $CM=MN$ B. $AC=AN$ C. $\angle CAM=\angle BAM$ D. $\angle CMA=\angle NMA$

2. （2023 春•西城区校级期中）已知：钝角 $\triangle ABC$ 。分别画出 AC 边上的高 BD 、 BC 边上的中线 AE 及 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的平分线 CF 。

3. （2022 春•来宾期末）在平面直角坐标系中，在 x 轴， y 轴上分别截取 $OA=OB$ ，再分别以点 A ， B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，两弧交于点 P ，若点 P 的坐标为 $(a, 2)$ ，则 a 的值是 _____。

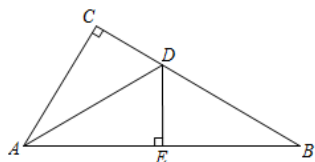
题型二 利用角的平分线的性质求线段的长、角度度数、面积等

4. 如图，已知 $\angle AOB=60^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ，点 P 在 OC 上， $PD \perp OA$ 于 D ， $OP=6cm$ ，点 E 是射线 OB 上的动点，则 PE 的最小值为（ ）



- A. $2cm$ B. $3cm$ C. $4cm$ D. $5cm$

5. （2020 秋•朝阳期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， AD 是 $\angle CAB$ 的平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ， DE 平分 $\angle ADB$ ，则 $\angle DBA$ 等于（ ）

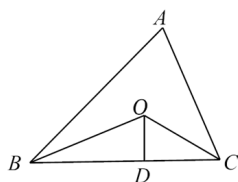


- A. 22.5° B. 30° C. 25° D. 40°

6. (2023•王益区三模) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC$, AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D , $DE \perp AB$ 于 E , 若 $AB=7\text{cm}$, 则 $\triangle DBE$ 的周长是 ()

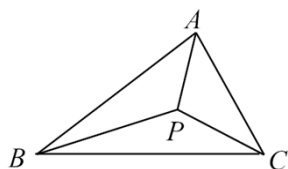
- A. 6cm B. 7cm C. 8cm D. 9cm

7. (2021 秋•古冶区期中) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的周长是 34, OB , OC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$, $OD \perp BC$ 于 D , 且 $OD=4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()



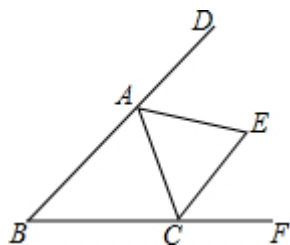
- A. 17 B. 34 C. 38 D. 68

8. 如图, $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 的长分别为 30、40、15, 点 P 是三条角平分线的交点, 将 $\triangle ABC$ 分成三个三角形, 则 $S_{\triangle APB}$: $S_{\triangle BPC}$: $S_{\triangle CPA}$ 等于 ()



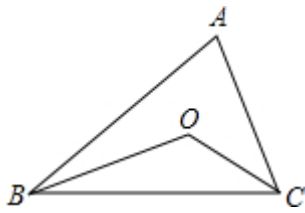
- A. 1: 1: 1 B. 6: 8: 3 C. 5: 8: 3 D. 4: 5: 3

9. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B=30^\circ$, 三角形的外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E , 则 $\angle AEC$ 的度数为_____.



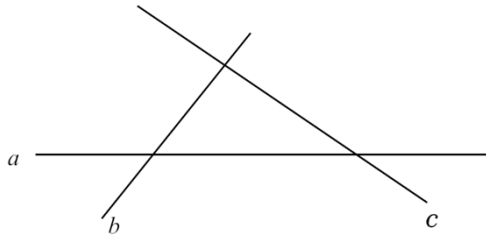
题型三 角平分线的判定

10. (2023 秋•武城县期末) $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且点 O 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等; $\angle A=40^\circ$, 则 $\angle BOC=$ ()



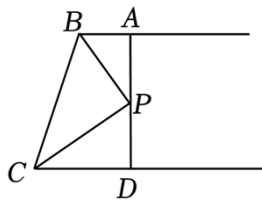
- A. 110° B. 120° C. 130° D. 140°

11. (2021 秋•新城区校级月考) 如图所示, 平面内三条直线 a 、 b 、 c 两两相交, 在平面内找出一點 P , 使得点 P 到三条直线的距离相等, 那么符合条件的点 P 有 ____ 处.



题型四 角平分线的性质和判定的综合运用

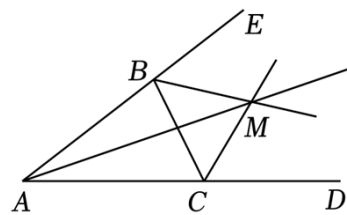
12. (2023 春•永州期末) 如图, $AB \parallel CD$, BP 和 CP 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$, AD 过点 P 且与直线 AB 垂直. 若 $AD=8$, 则点 P 到 BC 的距离是 ()



- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

13. (2022 秋•大兴区期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, $\angle BAC$ 的平分线与外角 $\angle BCD$ 的平分线相交于点 M , 作 AB 的延长线得到射线 AE , 作射线 BM , 有下面四个结论:

- ① $\angle MCD > \angle MAB$;
- ② $BM = CM$;
- ③ 射线 BM 是 $\angle EBC$ 的角平分线;
- ④ $\angle BMC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.

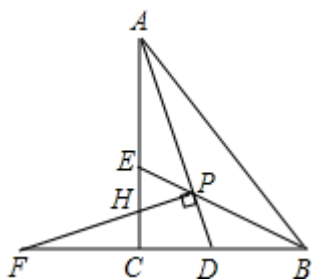


所有正确结论的序号是 ____.

14. (2022 秋•忠县校级月考) 如图, $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 、 BE 相交于点 P , 过 P 作 $PF \perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F , 交 AC 于点 H .

- (1) 求 $\angle APB$ 的度数为 ____;

(2) 证明: $AH+BD=AB$.



15. (2020 秋•饶平县校级期末) 在 $\triangle ABC$ 中, AE 、 BF 是角平分线, 交于 O 点.

(1) 如图 1, AD 是高, $\angle BAC=50^\circ$, $\angle C=70^\circ$, 求 $\angle DAC$ 和 $\angle BOA$ 的度数.

(2) 如图 2, 若 $OE=OF$, $AC \neq BC$, 求 $\angle C$ 的度数.

(3) 如图 3, 若 $\angle C=90^\circ$, $BC=8$, $AC=6$, $AB=10$, 求 $S_{\triangle AOB}$.

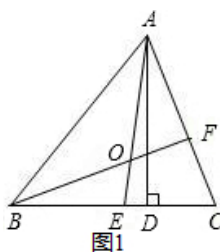


图1

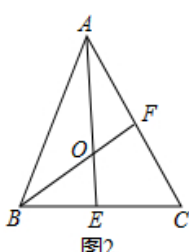


图2

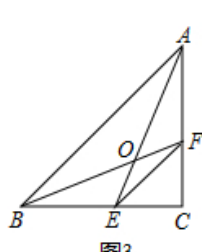
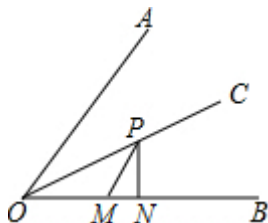


图3

误点警示:

易错点: 忽视点的位置有两种情况而导致漏解

16. (2021 秋•齐河县期末) 如图, 点 P 是 $\angle AOB$ 的角平分线 OC 上一点, $PN \perp OB$ 于点 N , 点 M 是线段 ON 上一点. 已知 $OM=3$, $ON=5$, 点 D 为 OA 上一点, 若满足 $PD=PM$, 则 OD 的长度为 _____.



专题4 角的平分线的性质和判定常考题型（解析版）

题型一 角的平分线的作法

1.（2022•资阳）如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，按下列步骤作图：

第一步：在 AB 、 AC 上分别截取 AD 、 AE ，使 $AD=AE$ ；

第二步：分别以点 D 和点 E 为圆心、适当长（大于 DE 的一半）为半径作圆弧，两弧交于点 F ；

第三步：作射线 AF 交 BC 于点 M ；

第四步：过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N 。

下列结论一定成立的是（ ）

- A. $CM=MN$ B. $AC=AN$ C. $\angle CAM=\angle BAM$ D. $\angle CMA=\angle NMA$

【思路引领】根据题意可知， AM 平分 $\angle CAB$ ，即可得出正确答案。

【解答】解：由题意可知， AM 平分 $\angle CAB$ ，

$\because \angle C$ 不一定等于 90° ， $\therefore CM \geq MN$ ，因此A选项不符合题意；

$\because \angle C$ 不一定等于 90° ， $\therefore AC$ 不一定等于 AN ，因此B选项不符合题意；

$\because AM$ 平分 $\angle CAB$ ， $\therefore \angle CAM=\angle BAM$ ，因此C选项符合题意；

$\because \angle C$ 不一定等于 90° ， $\therefore \angle CMA$ 不一定等于 $\angle NMA$ ，因此D选项不符合题意。

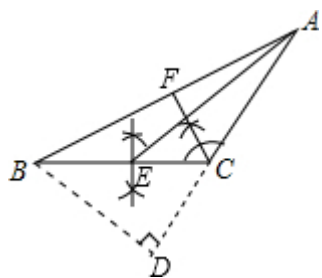
故选：C。

【总结提升】本题考查了尺规作图——角平分线，角平分线的性质，全等三角形的判定，掌握角平分线的作图方法是本题的关键。

2.（2023春•西城区校级期中）已知：钝角 $\triangle ABC$ 。分别画出 AC 边上的高 BD 、 BC 边上的中线 AE 及 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的平分线 CF 。

【思路引领】分别根据角平分线作法以及中线作法和高线作法得出即可。

【解答】解：如图所示：



【总结提升】此题主要考查了复杂作图，正确得出钝角三角形高线作法是解题关键.

3. (2022 春•来宾期末) 在平面直角坐标系中，在 x 轴， y 轴上分别截取 $OA=OB$ ，再分别以点 A ， B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，两弧交于点 P ，若点 P 的坐标为 $(a, 2)$ ，则 a 的值是 2 或 -2.

【思路引领】由题意可得， $\angle AOB=90^\circ$ ，点 P 在 $\angle AOB$ 的角平分线上，由角平分线的性质可知点 P 到 x 轴和 y 轴的距离相等，即 $|a|=2$ ，即可得 a 的值.

【解答】解：由题意可得， $\angle AOB=90^\circ$ ，点 P 在 $\angle AOB$ 的角平分线上，

$\therefore$ 点 P 到 x 轴和 y 轴的距离相等，

即 $|a|=2$ ，

解得 $a=\pm 2$ ，

$\therefore$ 点 P 在第一或第二象限，

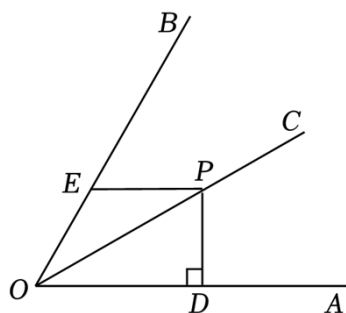
$\therefore a$ 的值为 2 或 -2.

故答案为：2 或 -2.

【总结提升】本题考查作图 - 基本作图、角平分线的性质，明确题中的作图方法及角平分线的性质是解题的关键.

题型二 利用角的平分线的性质求线段的长、角度度数、面积等

4. 如图，已知 $\angle AOB=60^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ，点 P 在 OC 上， $PD \perp OA$ 于 D ， $OP=6cm$ ，点 E 是射线 OB 上的动点，则 PE 的最小值为 ()



A. 2cm

B. 3cm

C. 4cm

D. 5cm

【思路引领】根据角平分线的性质可得 $\angle AOP=30^\circ$ ，则 $PD=\frac{1}{2}OP=3cm$ ，再根据角平分线上的点到两边的距离相等，以及垂线段最短，即可进行解答.

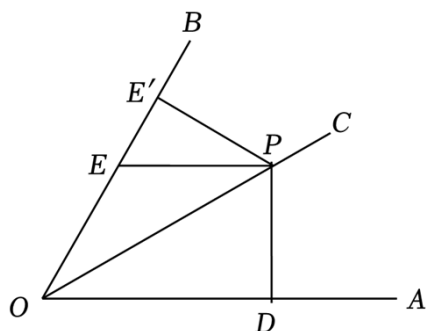
【解答】解： $\because \angle AOB=60^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ，

$\therefore \angle AOP=30^\circ$ ，

$\because PD \perp OA$ ， $OP=6cm$ ，

$$\therefore PD = \frac{1}{2}OP = 3\text{cm},$$

过点 P 作 $PE' \perp OB$ 于点 E' ,



$\because OC$ 平分 $\angle AOB$, $PE' \perp OB$, $PD \perp OA$,

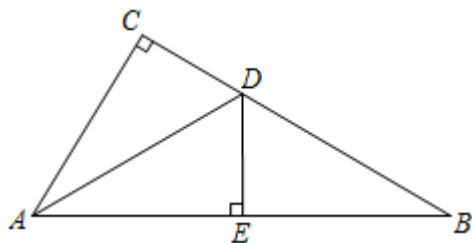
$$\therefore PE' = PD = 3\text{cm},$$

$\therefore PE$ 的最小值为 3cm .

故选: B .

【总结提升】 本题主要考查了垂线段最短以及角平分线的性质, 解题的关键是掌握角平分线上的点到两边的距离相等, 以及垂线段最短.

5. (2020 秋•朝阳期中) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 是 $\angle CAB$ 的平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , DE 平分 $\angle ADB$, 则 $\angle DBA$ 等于 ()



- A. 22.5° B. 30° C. 25° D. 40°

【思路引领】 利用全等直角三角形的判定定理 HL 证得 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED$, 则对应角 $\angle ADC = \angle ADE$; 然后根据已知条件 “ DE 平分 $\angle ADB$ ”、平角的定义证得 $\angle ADC = \angle ADE = \angle EDB = 60^\circ$; 最后由直角三角形的两个锐角互余的性质求得 $\angle B = 30^\circ$.

【解答】 解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 是角平分线, $DE \perp AB$ 于 E ,

$$\therefore CD = ED.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ CD = ED \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADE.$$

$$\because \angle ADC + \angle ADE + \angle EDB = 180^\circ, \text{ } DE \text{ 平分 } \angle ADB,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADE = \angle EDB = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle B + \angle EDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ.$$

故选：B.

【总结提升】 本题考查了角平分线的性质，全等三角形的判定与性质，熟练掌握角平分线的性质是解题的关键.

6. (2023•王益区三模) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ，若 $AB = 7\text{cm}$ ，则 $\triangle DBE$ 的周长是（ ）

A. 6cm

B. 7cm

C. 8cm

D. 9cm

【思路引领】 根据角平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $DE = CD$ ，再根据等腰直角三角形的性质求出 $AC = BC = AE$ ，然后求出 $\triangle DBE$ 的周长 $= AB$ ，代入数据即可得解.

【解答】 解： $\because AD$ 平分 $\angle CAB$ ， $DE \perp AB$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore DE = CD,$$

$$\text{又} \because AC = BC, AC = AE,$$

$$\therefore AC = BC = AE,$$

$$\therefore \triangle DBE \text{ 的周长} = DE + BD + EB = CD + BD + EB = BC + EB = AE + EB = AB,$$

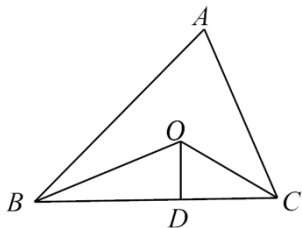
$$\because AB = 7\text{cm},$$

$$\therefore \triangle DBE \text{ 的周长} = 7\text{cm}.$$

故选：B.

【总结提升】 本题考查了角平分线上的点到角的两边的距离相等的性质，等腰直角三角形的性质，熟记性质求出 $\triangle DBE$ 的周长 $= AB$ 是解题的关键.

7. (2021 秋•古冶区期中) 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长是 34， OB ， OC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ ， $OD \perp BC$ 于 D ，且 $OD = 4$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是（ ）



A. 17

B. 34

C. 38

D. 68

【思路引领】过 O 作 $OE \perp AB$ 于 E , $OF \perp AC$ 于 F , 连接 OA , 根据角平分线性性质求出 $OE = OD = OF = 4$, 根据 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ACO$ 的面积、 $\triangle BCO$ 的面积、 $\triangle ABO$ 的面积的和, 即可求出答案.

【解答】解: 过 O 作 $OE \perp AB$ 于 E , $OF \perp AC$ 于 F , 连接 OA ,

$\because OB, OC$ 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$, $OD \perp BC$,

$\therefore OE = OD, OD = OF$,

即 $OE = OF = OD = 4$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积是: $S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle OBC}$

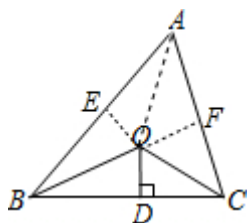
$$= \frac{1}{2} \times AB \times OE + \frac{1}{2} \times AC \times OF + \frac{1}{2} \times BC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (AB + AC + BC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 34$$

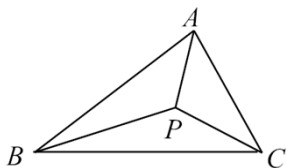
$$= 68,$$

故选: D.



【总结提升】本题考查了角平分线性性质, 三角形的面积, 主要考查学生运用定理进行推理的能力.

8. 如图, $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 的长分别为 30、40、15, 点 P 是三条角平分线的交点, 将 $\triangle ABC$ 分成三个三角形, 则 $S_{\triangle APB} : S_{\triangle BPC} : S_{\triangle CPA}$ 等于 ()



A. 1: 1: 1

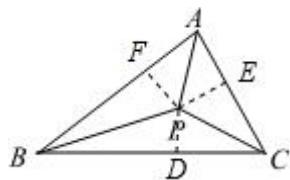
B. 6: 8: 3

C. 5: 8: 3

D. 4: 5: 3

【思路引领】由角平分线的性质可得，点 P 到三角形三边的距离相等，即三个三角形的 AB 、 BC 、 AC 的高相等，利用面积公式即可求解。

【解答】解：过点 P 作 $PD \perp BC$ 于 D ， $PE \perp AC$ 于 E ， $PF \perp AB$ 于 F ，



$\because P$ 是三角形三条角平分线的交点，

$\therefore PD = PE = PF$ ，

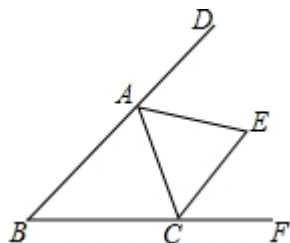
$\because AB = 30$ ， $BC = 40$ ， $AC = 15$ ，

$\therefore S_{\triangle APB} : S_{\triangle BPC} : S_{\triangle CPA} = 30 : 40 : 15 = 6 : 8 : 3$ 。

故选：B。

【总结提升】此题主要考查角平分线的性质和三角形面积的求法，难度不大，熟记角平分线的性质并作出合理的辅助线是解题的关键。

9. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ，三角形的外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E ，则 $\angle AEC$ 的度数为 75° 。



【思路引领】根据三角形内角和定理求出 $\angle BAC + \angle BCA$ ，求出 $\angle DAC + \angle FCA$ ，根据角平分线的定义计算即可。

【解答】解： $\because \angle B = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle BCA = 150^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC + \angle FCA = 210^\circ$ ，

$\because$ 三角形的外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E ，

$\therefore \angle EAC + \angle ECA = 105^\circ$ ，

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ ，

故答案为： 75° 。

【总结提升】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908026011012006132>