湖北省武汉市武昌区2024届高三上学期期末质量检测数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．命题“有些三角形是直角三角形”的否定为（　）

A．所有三角形都是直角三角形

B．所有三角形都不是直角三角形

C．有些三角形不是直角三角形

D．有些三角形不是锐角三角形

2．若复数z满足$z(\mathrm{i}+1)=1$，则$z\cdot\bar{z}=$（　）

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．已知正数a，b满足$a+2b=1$，则（　）

A．$ab\geq\frac{1}{8}$　　B．$ab>\frac{1}{8}$　　C．$0<ab\leq\frac{1}{8}$　　D．$0<ab<\frac{1}{8}$

4．已知$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0\leq x\leq 1\\ 2f(x-1),x>1\end{cases}$，则$f(\frac{5}{4})=$（　）

A．2　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．1

5．已知集合$A=\{y|y=\ln x,x\in B\}$，若$A\cup B=[0,\mathrm{e}]$，则集合B可以为（　）

A．$(0,\mathrm{e}]$　　B．$(0,1]$　　C．$(1,\mathrm{e}]$　　D．$[1,\mathrm{e}]$

6．为了解决化圆为方问题，古希腊数学家希皮亚斯发明了“割圆曲线”，若割圆曲线的方程为$y=\frac{x}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$，$0<x<1$，则（　）

A．y有最大值　　B．y有最小值

C．y随x的增大而增大　　D．y随x的增大而减小

7．已知函数$f(x)=\sin(x+\varphi)$，$0<\varphi<\pi$，若函数$f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$上存在最大值，但不存在最小值，则$\varphi$的取值范围是（　）

A．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$　　B．$\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$　　C．$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D．$\left(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$

8．已知O是坐标原点，过抛物线$C:y^2=4x$上异于O的点$M(a,b)$作抛物线的切线l交x

轴于点$N(b,0)$，则$\triangle OMN$的外接圆方程为（　）

A．$(x+2)^2+(y+6)^2=40$

B．$(x+2)^2+(y-6)^2=40$

C．$(x+2)^2+(y+6)^2=20$

D．$(x+2)^2+(y-6)^2=20$

二、多选题

9．对于随机变量X，下列说法正确的有（　）

A．若$E(X)=1$，则$E(2X-1)=1$

B．若$D(X)=1$，则$D(2X-1)=4$

C．若X：$N(2,4)$，则$E(X)=4$

D．若$X\sim B(10,0.5)$，则$E(X)=5$

10．已知不重合的直线m，n，l和平面α，β，则（　）

A．若$m//l$，$n//l$，则$m//n$

B．若$m\perp l$，$n\perp l$，则$m\perp n$

C．若$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，则$\alpha//\beta$

D．若$m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\dfrac{1}{a_n-a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，则（　）

A．$a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3$

B．$a_nb_n=a_{n+1}b_{n+1}$

C．存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得$a_k\leqslant a_{k+1}$

D．数列$\{b_n\}$单调递增，且对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$b_1+b_2+\cdots+b_n<2^{n+1}$

12．已知$P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$是曲线$C:6x^2-6x+7y^2-21+|y^2+6x-3|=0$上不同的两点，$O$为坐标原点，则（　）

A．$x_Q^2+y_Q^2$的最小值为1

B．$4\leqslant\sqrt{(x_P-1)^2+y_P^2}+\sqrt{(x_P+1)^2+y_P^2}\leqslant 6$

C．若直线$y=k(x-3)$与曲线C有公共点，则$k\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

D．对任意位于y轴左侧且不在x轴上的点P，都存在点Q，使得曲线C在P，Q两点处的切线垂直

三、填空题

13．设P为$\triangle ABC$所在平面内一点，满足$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，则$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=$_____.

14．若点$A(0,1)$在圆$C:(x-1)^2+y^2=r^2(r>0)$上，则过A的圆的切线方程为_____.

15．楷书也叫正楷、真书、正书，是从隶书逐渐演变而来的一种汉字字体，其书写特点是笔画严整规范、线条平直自然、结构匀称方正、运笔流畅有度，《辞海》解释楷书“形体方正，笔画平直，可作楷模”，故名楷书.楷书中竖的写法有垂露竖、悬针竖和短竖三种，小君同学在练习用楷书书写“十”字时，竖的写法可能随机选用其中任意一种，现在小君一行写了5个“十”字，若只比较5处竖的写法，不比较其它笔画，且短竖不超过3处，则不同的写法共有_____种.（用数字作答）

16．棱长为10cm的密闭正四面体容器内装有体积为$18\sqrt{2}\text{cm}^3$的水，翻转容器，使得水面至少与2条棱平行，且水面是三角形，不考虑容器厚度及其它因素影响，则水面面积的最小值为_____cm^2.

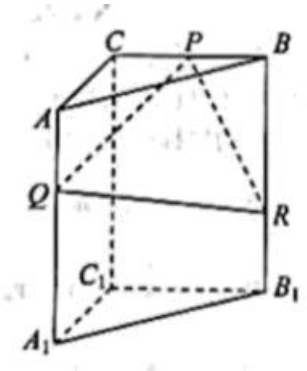
四、解答题

17．已知a,b,c分别为$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边，且$c(a\cos B-b\sin A)=a^2-b^2$.

(1)求A；

(2)若$a=2$，$\triangle ABC$的面积为2，求$b+c$.

18．如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面ABC，$AC=CB=2$，$AA_1=3$，$\angle ACB=90°$，P为BC的中点，点Q，R分别在棱AA_1，BB_1上，$A_1Q=2AQ$，$BR=2RB_1$.



(1)求证： $AC \perp PR$ ；

(2)求平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角的余弦值.

19．数学运算是数学学科的核心素养之一，具备较好的数学运算素养一般体现为在运算中算法合理、计算准确、过程规范、细节到位，为了诊断学情、培养习惯、发展素养，某老师计划调研准确率与运算速度之间是否有关，他记录了一段时间的相关数据如下表：

项目	速度快	速度慢	合计
准确率高	10	22	32
准确率低	11	17	28
合计	21	39	60

(1)依据 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，能否认为数学考试中准确率与运算速度相关？

(2)为鼓励学生全面发展，现随机将准确率高且速度快的 10 名同学分成人数分别为 3，3，4 的三个小组进行小组才艺展示，若甲、乙两人在这 10 人中，求甲在 3 人一组的前提下乙在 4 人一组的概率.

附：

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$\chi^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a+b+c+d$.

20．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1 = m(m \neq 0)$， $\dfrac{1}{S_n} = \dfrac{2}{a_n} - \dfrac{2}{a_{n+1}}$.

(1)求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(2)若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$[S_{10}] = 10$，求实数 m 的取值范围.

21．已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ （ $a>0$， $b>0$ ），点 $F(4,0)$ 是 C 的右焦点， C 的一条渐

近线方程为 $y=\sqrt{3}x$.

(1)求 C 的标准方程；

(2)过点 F 的直线与 C 的右支交于 A,B 两点，以 AB 为直径的圆记为 M，是否存在定圆与圆 M 内切？若存在，求出定圆的方程；若不存在，说明理由.

22．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}+\ln\left(-x+m\right)$，$m\in\mathbf{R}$.

(1)当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)若 $f\left(x\right)$ 有且仅有 1 个零点，求 m 的取值范围.

参考答案：

1．B

【分析】根据命题否定的相关概念直接求解.

【详解】由命题否定的概念可知，命题“有些三角形是直角三角形”的否定为“所有三角形都不是直角三角形”.

故选：B

2．C

【分析】根据给定条件，利用复数除法运算求出z，再结合共轭复数的意义求解即得.

【详解】依题意，$z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

则$\overline{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以$z\cdot\overline{z}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

故选：C.

3．C

【分析】根据基本不等式直接计算即可.

【详解】由题意得，$a>0,b>0$，则$ab>0$，　$a+2b=1\geq 2\sqrt{2ab}$，即$0<ab\leq\dfrac{1}{8}$，

当且仅当$a=2b$，即$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{4}$时等号成立.

故选：C

4．D

【分析】根据给定的分段函数，代入依次计算即得.

【详解】函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0\leq x\leq 1\\ 2f(x-1),x>1\end{cases}$，所以$f(\dfrac{5}{4})=2f(\dfrac{1}{4})=2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1$.

故选：D

5．D

【分析】根据对数函数的性质，结合并集的运算对选项逐一分析验证即可.

【详解】若$B=(0,\mathrm{e}]$，则$A=(-\infty,1]$，　$A\cup B=(-\infty,\mathrm{e}]$，A 不合题意；

若$B=(0,1]$，则$A=(-\infty,0]$，　$A\cup B=(-\infty,1]$，B 不合题意；

若$B=(1,\mathrm{e}]$，则$A=(0,1]$，　$A\cup B=(0,\mathrm{e}]$，C 不合题意；

若$B=[1,\mathrm{e}]$，则$A=[0,1]$，　$A\cup B=[0,\mathrm{e}]$，D 符合题意；

故选：D.

6．D

【分析】利用导数知识直接求解判断即可.

【详解】由 $y=\dfrac{x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$，$0<x<1$，

则 $y'=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-\dfrac{\dfrac{\pi}{2}x}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-\dfrac{\pi}{2}x}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}=\dfrac{\sin(\pi x)-\pi x}{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$，

因为 $0<x<1$，所以 $0<\dfrac{\pi}{2}x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)>0$，

令 $g(x)=\sin(\pi x)-\pi x, 0<x<1$，

则 $g'(x)=\pi\cos(\pi x)-\pi=\pi\left[\cos(\pi x)-1\right]\le 0$，

所以 $g(x)$ 在 $0<x<1$ 单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，则 $y'<0$，

所以 $y=\dfrac{x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$ 在 $0<x<1$ 单调递减，即 y 随 x 的增大而减小，且无最值.

故选：D

7．D

【分析】根据题意分类讨论 $\varphi\ge\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\varphi<\dfrac{\pi}{4}$ 两种情况，结合题目中所给区间的开和闭以及三角函数图象相关知识求解答案即可.

【详解】若 $0\le x<\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\varphi\le x+\varphi<\dfrac{3\pi}{4}+\varphi$，

又因为 $0<\varphi<\pi$，函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上存在最大值，但不存在最小值，

所以当 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi\ge\pi$，即 $\varphi\ge\dfrac{\pi}{4}$ 时，

只需满足 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$，此时 $\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4}$，

当 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi<\pi$，即 $\varphi<\dfrac{\pi}{4}$ 时，

函数一定存在最大值，要让函数无最小值，则 $\dfrac{\pi}{2}-\varphi<\dfrac{3\pi}{4}+\varphi-\dfrac{\pi}{2}$，

此时$\frac{\pi}{8}<\varphi<\frac{\pi}{4}$，

综上，$\frac{\pi}{8}<\varphi\le\frac{3\pi}{4}$，即$\varphi$的取值范围是$\left(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$.

故选：D

8．A

【分析】先求得M,N的坐标，再利用待定系数法即可求得$\triangle OMN$的外接圆的一般方程.

【详解】设过抛物线上异于O的点$M(a,b)$的切线l为$y=k(x-a)+b$，

又l交x轴于点$N(b,0)$，则$k(b-a)+b=0$，

则$\begin{cases}y=k(x-a)+b\\y^2=4x\end{cases}$，整理得$ky^2-4y+4b-4ka=0$，

则$\Delta=16-4k(4b-4ka)=0$，即$k^2a-kb+1=0$

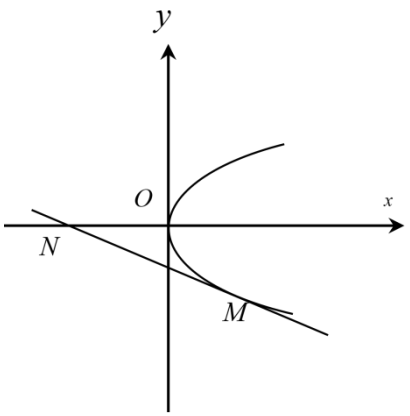
则有$\begin{cases}k(b-a)+b=0\\k^2a-kb+1=0\\b^2=4a\end{cases}$，可化为$\begin{cases}k(b-\frac{b^2}{4})+b=0\\\frac{k^2b^2}{4}-kb+1=0\end{cases}$

解之得$\begin{cases}b=-4\\k=-\frac{1}{2}\end{cases}$，则$\begin{cases}a=4\\k=-\frac{1}{2}\\b=-4\end{cases}$，则$M(4,-4),N(-4,0)$

设$\triangle OMN$的外接圆方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}F=0\\16+16+4D-4E+F=0\\16-4D+F=0\end{cases}$，解之得$\begin{cases}F=0\\E=12\\D=4\end{cases}$

$\triangle OMN$的外接圆方程为$x^2+y^2+4x+12y=0$，即$(x+2)^2+(y+6)^2=40$.



故选：A

9．ABD

【分析】根据期望和方差变换公式和二项分布、正态分布相关概念求解即可.

【详解】对于 A，若 $E(X)=1$，则 $E(2X-1)=2\times1-1=1$，故 A 正确；

对于 B，若 $D(X)=1$，则 $D(2X-1)=1\times2^2=4$，故 B 正确；

对于 C，若 $X:\ N(2,4)$，则 $E(X)=2$，故 C 错误；

对于 D，若 $X\sim B(10,0.5)$，则 $E(X)=10\times0.5=5$，故 D 正确.

故选：ABD

10．AD

【分析】根据直线和平面的相关性质逐一判断即可.

【详解】对于 A，根据平行传递性可知，若 $m//l$，$n//l$，则 $m//n$，故 A 正确；

对于 B，若 $m\perp l$，$n\perp l$，则可能出现 $m\perp n$，或 $m//n$，或 m,n 相交但不垂直，或 m,n 异面但不垂直，故 B 错误；

对于 C，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，则 $\alpha//\beta$ 或 α,β 相交，故 C 错误；

对于 D，根据面面垂直判定定理可知，若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，故 D 正确.

故选：AD

11．ABD

【分析】根据题意，分别求得 a_1,a_2,a_3 和 b_1,b_2,b_3 的值，可判定 A 正确；根据数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，化简得到 $a_n^2=a_{n-1}a_n$，即数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，进而得到 $b_n=2^n$，可判定 B 正确；结合等比数列的单调性，可判定 C 错误；根据等比数列的求和公式，可判定 D 正确.

【详解】对于 A 中，由 $\dfrac{1}{a_n-a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，$\{b_n\}$ 满足 $b_n=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，

因为 $a_1=1$，可得 $b_1=1+\dfrac{1}{a_1}=2$，

当 $n=1$ 时，可得 $\dfrac{1}{a_1-a_2}=2$，解得 $a_2=\dfrac{1}{2}$，$b_2=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=4$；

当 $n=2$ 时，可得 $\dfrac{1}{a_2-a_3}=4$，解得 $a_3=\dfrac{1}{4}$，$b_3=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=8$；

可得 $a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3=2$，所以 A 正确；

对于 B 中，由数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_n-a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，

当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_{n-1}-a_n}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}$，

两式相减得$\frac{1}{a_n-a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n-1}-a_n}=\frac{1}{a_n}$，整理得$a_n^2=a_{n-1}a_n$，

又因为$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，所以数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

所以$a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$，

又由$b_n=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1+1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n$，

则$a_nb_n=(\frac{1}{2})^{n-1}\times 2^n=2$，$a_{n+1}b_{n+1}=(\frac{1}{2})^n\times 2^{n+1}=2$，

所以$a_nb_n=a_{n+1}b_{n+1}$，所以 B 正确；

对于 C 中，因为数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

所以数列$\{a_n\}$为递减数列，所以$a_k>a_{k+1}$，所以 C 不正确；

对于 D 中，由数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^n$，则$b_{n+1}-b_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0$，

所以数列$\{b_n\}$为递增等比数列，且$b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2<2^{n+1}$，

所以 D 正确.

故选：ABD.

12．AD

【分析】根据题中曲线表达式去绝对值化简，根据几何意义判断 A，举出反例判断 B，数形结合判断 C，根据图形特征以及切线概念判断 D.

【详解】当$y^2+6x-3\geq 0$时，原方程即$6x^2-6x+7y^2-21+\left(y^2+6x-3\right)=0$，

化简为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，轨迹为椭圆.

将$y^2=3-\frac{3}{4}x^2$代入$y^2+6x-3\geq 0$，则$0\leq x\leq 8$，

则此时$0\leq x\leq 2$，即此部分为椭圆的一半.

同理当$y^2+6x-3<0$时，原方程即$6x^2-6x+7y^2-21-\left(y^2+6x-3\right)=0$，

化简为$\left(x-1\right)^2+y^2=4$.

将$y^2=4-\left(x-1\right)^2$代入$y^2+6x-3<0$，则$x<0$或$x>8$，

则此时$-1\leq x<0$，即此部分为圆的一部分.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/908026100061006031