

专题 03 原函数与导函数混合还原问题

【考点预测】

1. 对于 $xf'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x \cdot f(x)$,
2. 对于 $xf'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x^k \cdot f(x)$
3. 对于 $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,
4. 对于 $x \cdot f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x^k}$
5. 对于 $f'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^x \cdot f(x)$,
6. 对于 $f'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^{kx} \cdot f(x)$
7. 对于 $f'(x) - f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,
8. 对于 $f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{bx}}$
9. 对于 $\sin x \cdot f'(x) + \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = f(x) \cdot \sin x$,
10. 对于 $\sin x \cdot f'(x) - \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$
11. 对于 $\cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = f(x) \cdot \cos x$,
12. 对于 $\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$
13. 对于 $f'(x) - f(x) > k$ (< 0), 构造 $g(x) = e^x [f(x) - k]$
14. 对于 $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$
15. $f'(x) + c = [f(x) + cx]'$; $f'(x) + g'(x) = [f(x) + g(x)]'$; $f'(x) - g'(x) = [f(x) - g(x)]'$;
16. $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]'$; $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$.

【题型归纳目录】

题型一：利用 $x^n f(x)$ 构造型

题型二：利用 $\frac{f(x)}{x^n}$ 构造型

题型三：利用 $e^{nx} f(x)$ 构造型

题型四：用 $\frac{f(x)}{e^{nx}}$ 构造型

题型五：利用 $\sin x$ 、 $\tan x$ 与 $f(x)$ 构造型

题型六：利用 $\cos x$ 与 $f(x)$ 构造型

题型七：复杂型： e^n 与 $af(x) + bg(x)$ 等构造型

题型八：复杂型： $(kx + b)$ 与 $f(x)$ 型

题型九：复杂型：与 $\ln(kx + b)$ 结合型

题型十：复杂型：基础型添加因式型

题型十一：复杂型：二次构造

题型十二：综合构造

题型十三：找出原函数

【典例例题】

题型一：利用 $x^n f(x)$ 构造型

例 1. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时，恒有 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 。则不等式 $x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$ 的解集为 ()。

- A. $\{x | -3 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < -\frac{1}{3}\}$
C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$

例 2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$ ，且有 $2f(x) + xf'(x) > x^2$ 则不等式 $(x+2019)^2 f(x+2019) - 4f(-2) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-2019, -2017)$ B. $(-2021, -2019)$
C. $(-2019, -2018)$ D. $(-2020, -2019)$

例 3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，其导函数为 $f'(x)$ ，若对任意的正实数 x ，都有 $xf'(x) + 2f(x) > 0$ 恒成立，且 $f(\sqrt{2}) = 1$ ，则使 $x^2 f(x) < 2$ 成立的实数 x 的集合为 ()

- A. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
C. $(-\infty, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, +\infty)$

例 4. 函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $xf'(x) + 2f(x) > 0$ ，则不等式 $\frac{(x+2020)f(x+2020)}{3} < \frac{3f(3)}{x+2020}$ 的解集为

- A. $\{x | x > -2017\}$ B. $\{x | x < -2017\}$
C. $\{x | -2020 < x < 0\}$ D. $\{x | -2020 < x < -2017\}$

例 5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数，且 $x > 0$ 时， $f'(x) + \frac{2f(x)}{x} < 0$ ，又 $f(1) = 0$ ，则 $f(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

【方法技巧与总结】

1. 对于 $xf'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x \cdot f(x)$,

2. 对于 $xf'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x^k \cdot f(x)$

题型二：利用 $\frac{f(x)}{x^n}$ 构造型

例 6. 设 $f'(x)$ 是偶函数 $f(x)$ ($x \neq 0$) 的导函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $xf'(x) - 2f(x) > 0$, 则不等式

$4f(x+2019) - (x+2019)^2 f(-2) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2021)$

B. $(-2021, -2019) \cup (-2019, -2017)$

C. $(-2021, -2017)$

D. $(-\infty, -2019) \cup (-2019, -2017)$

例 7. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f(2) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > \frac{2}{x} f(x)$, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为

()

A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

例 8. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得

$f(x) < 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

例 9. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - f(x) < 0$, 其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若

$f(m-2022) > (m-2022)f(1)$, 则实数 m 的取值范围为 ()

A. $(0, 2022)$

B. $(2023, +\infty)$

C. $(2023, +\infty)$

D. $(2023, 2023)$

【方法技巧与总结】

1. 对于 $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,

2. 对于 $x \cdot f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x^k}$

题型三：利用 $e^{nx} f(x)$ 构造型

例 10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f'(x)$ 是其导函数, 若 $f(x) + f'(x) > -e^{-x} f'(x)$, $f(0) = 1$, 则不等式 $f(x) >$

$\frac{2}{e^x + 1}$ 的解集是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 1)$

例 11. 若 $f(x)$ 在 R 上可导且 $f(0) = 0$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x) + f'(x) < 0$, 则 $f(x) < 0$ 的解集是

例 12. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f'(x) > 1$, $f(0) = 4$, 则不等式 $f(x) > \frac{3}{e^x} + 1$ (e 为自然对数的

底数) 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

例 13. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 满足 $f(0) = 2$, $\forall x \in R$, 都有 $f(x) + f'(x) > 1$, 则关于 x 的不等式

$f(x) > e^{-x} + 1$ 的解集为 ()

- A. $\{x | x > 0\}$ B. $\{x | x > e\}$ C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | 0 < x < e\}$

【方法技巧与总结】

1. 对于 $f'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^x \cdot f(x)$,

2. 对于 $f'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^{kx} \cdot f(x)$

题型四：用 $\frac{f(x)}{e^{nx}}$ 构造型

例 14. 定义在 $(-2,2)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足: $f(x)+e^{4x}f(-x)=0$, $f(1)=e^2$, 且当 $x>0$ 时, $f'(x)>2f(x)$, 则不等式 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 的解集为 ()

- A. $(1,4)$ B. $(-2,1)$ C. $(1,+\infty)$ D. $(0,1)$

例 15. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x)>f(x)+1$, $f'(x)=f'(6-x)$, $f(3)=1$, $f(6)=5$, 则不等式 $f(\ln x)+2x+1<0$ 的解集为 ()

- A. $(0,1)$ B. $(0,3)$ C. $(1,3)$ D. $(3,6)$

例 16. 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x)$ 满足 $\frac{f'(x)-f(x)}{x-1}>0$, $y=\frac{f(x)}{e^x}$ 关于直线 $x=1$

对称, 则不等式 $\frac{f(x^2-x)}{e^{x^2-x}}<f(0)$ 的解集是 ()

- A. $(-1,2)$ B. $(1,2)$
C. $(-1,0)\cup(1,2)$ D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

例 17. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且满足 $f(x)<f'(x)$, 则不等式 $e^{-x}f(x^2+x)>e^{x^2-2}f(2)$ 的解集是 ()

- A. $(-2,1)$ B. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$
C. $(-1,2)$ D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

例 18. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x)>f'(x)+2$, 且 $f(1)=2022$, 则不等式 $f(x)-2020e^{x-1}<2$ 的解集为 ()

- A. $(0,+\infty)$ B. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ C. $(1,+\infty)$ D. $(-\infty,1)$

例 19. 已知定义在 \mathbf{R} 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f'(x)<f(x)$ 且 $f(x+3)$ 为偶函数, $f(6)=1$, 则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为 ()

- A. $(-3,+\infty)$ B. $(1,+\infty)$ C. $(0,+\infty)$ D. $(6,+\infty)$

例 20. $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 已知 $f'(x)>f(x)$, 且 $f(1)=e$, 则不等式

1.对于 $\sin x \cdot f'(x) + \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = f(x) \cdot \sin x$,

2.对于 $\sin x \cdot f'(x) - \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$

3.对于正切型, 可以通分 (或者去分母) 构造正弦或者余弦积商型

题型六: 利用 $\cos x$ 与 $f(x)$ 构造型

例 24. 已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 其导函数为 $f'(x)$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$

成立, 则关于 x 的不等式 $f(x) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x$ 的解集为 ()

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

D. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

例 25. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上存在导数 $f'(x)$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) + f(-x) = 2\cos x$, 且在 $[0, +\infty)$ 上有

$f'(x) > -\sin x$, 则不等式 $f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \cos x - \sin x$ 的解集是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{\pi}{6}\right]$

D. $\left[\frac{\pi}{6}, +\infty\right)$

例 26. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 其导函数是 $f'(x)$. 有 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$, 则关于 x 的不等

式 $\sqrt{3}f(x) < 2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x$ 的解集为 ()

A. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right)$

D. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

例 27. 已知偶函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的可导函数, 当 $x \in [-1, 0)$ 时, $f'(x)\cos x + f(x)\sin x > 0$, 若

$\cos(a+1)f(a) \geq f(a+1)\cos a$, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $[-2, -1]$

B. $[-1, -\frac{1}{2}]$

C. $[-\frac{1}{2}, 0]$

D. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

【方法技巧与总结】

1.对于 $\cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = f(x) \cdot \cos x$,

$f(2)=1$, 则不等式 $f(x) < \frac{1}{x-1}$ 的解集是 ()

- A. $(1,2)$ B. $(-\infty,0)$ C. $(0,1) \cup (2,+\infty)$ D. $(-\infty,0) \cup (1,2)$

例 33. 设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意实数 x , 都有 $f(x) = f(-x) + 2x$, 当 $x < 0$ 时,

$f'(x) < 2x+1$, 若 $f(2-a) \leq f(-a) - 4a + 6$, 则实数 a 的最小值是 ()

- A. 1 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【方法技巧与总结】

写出 $y = kx + b$ 与 $y = f(x)$ 的加、减、乘、除各种形式

题型九：复杂型：与 $\ln(kx + b)$ 结合型

例 34. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 图象关于原点对称, 其导函数为 $f'(x)$, 若当 $x > 0$ 时

$f(x) + x \ln x \cdot f'(x) < 0$, 则不等式 $4^{|x|} \cdot f(x) > 4f(x)$ 的解集为 _____.

例 35. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 上的奇函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f(1) \neq 0$, 且满足:

$f'(x) \cdot \ln x + \frac{f(x)}{x} < 0$, 则不等式 $(x-1) \cdot f(x) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(1,+\infty)$ B. $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ C. $(-\infty,1)$ D. $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

【方法技巧与总结】

1. 对于 $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$

2. 写出 $y = \ln(kx + b)$ 与 $y = f(x)$ 的加、减、乘、除各种结果

题型十：复杂型：基础型添加因式型

例 36. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f'(x) + e^x < 0$ (e 为自然对数的底数), 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数,

若 $f(3) = 3e^3$, 则 $f(x) > xe^x$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty,2)$ B. $(2,+\infty)$
C. $(-\infty,3)$ D. $(3,+\infty)$

例 37. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) - 2f(x) - 6 < 0$, 且 $f(1) = e^2 - 3$, 则满足不等式 $f(x) > e^{2x} - 3$ 的 x

的取值有 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

例 38. 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) - f(x) < 1$, 且 $f(0) = 2021$,

则不等式 $f(x) + 1 > 2022e^x$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$
C. $(-\infty, \frac{1}{e})$ D. $(-\infty, 1)$

例 39. 已知在定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f(-x) - 6x + 2\sin x = 0$, 且 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 3 - \cos x$ 恒成

立, 则不等式 $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{3\pi}{2} + 6x + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的解集为 ()

- A. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{\pi}{6}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{6}, +\infty\right)$

【方法技巧与总结】

在本题型一、二、三、四等基础上, 变形或者添加因式, 增加复杂度

题型十一: 复杂型: 二次构造

例 40. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 若 $xf'(x) + x^2 f''(x) = e^x$, $f(1) = e$,

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 ()

- A. 单调递增 B. 单调递减 C. 有极大值 D. 有极小值

例 41. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) + f(x) = x^2 \ln x$, 且 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$, 则 $f(x)$ ()

- A. 有极大值, 无极小值 B. 有极小值, 无极大值
C. 既有极大值又有极小值 D. 既无极大值也无极小值

例 42. 设函数 $f(x)$ 满足: $xf'(x) + 2f(x) = xe^x$, $f(1) = \frac{e}{2}$, 则 $x > 0$ 时, $f(x)$ ()

- A. 有极大值, 无极小值 B. 有极小值, 无极大值
C. 既有极大值, 又有极小值 D. 既无极大值, 又无极小值

例 43. 函数 $f(x)$ 满足: $\frac{1}{2}e^x f(x) + e^x f'(x) = \sqrt{x}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x)$ ()

- A. 有极大值, 无极小值
 B. 有极小值, 无极大值
 C. 既有极大值, 又有极小值
 D. 既无极大值, 也无极小值

例 44. 已知函数 $f(x)$ 满足 $ex(f'(x) + 2f(x)) = \sqrt{x}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2e}}$, 且 $f\left(3^x - 2^x - \frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$, 则 x

的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

例 45. 已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) + f(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{x} (x > 0)$, $f(2) = \frac{e}{2}$, 对满足 $ab = \frac{4}{e}$ 的任意正

数 a, b 都有 $f(2^x) < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【方法技巧与总结】

二次构造: $f(x) \times r(x) \pm g(x)$, 其中 $r(x) = x^n, e^{nx}, \sin x, \cos x$ 等

题型十二: 综合构造

例 46. 已知定义在 R 上的函数 $y = f(x+1) - 3$ 是奇函数, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) \geq x + \frac{1}{x-1} - 3$, 则不等式

$[f(x) - 3] \ln(x+1) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-1, 0) \cup (e, +\infty)$ C. $(0, 1) \cup (e, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

例 47. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 其导函数为 $f'(x)$, $(x+2)[2f(x) + xf'(x)] < xf(x)$ 对 $x \in (1, +\infty)$

恒成立, 且 $f(5) = \frac{14}{25}$, 则不等式 $(x+3)^2 f(x+3) > 2x+10$ 的解集为 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-2, 3)$ D. $(-2, 2)$

例 48. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + xf'(x) > 1$ ($f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数), 则不等式

$(1+x)f(1-x^2) > f(1-x) + x$ 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 1]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

【方法技巧与总结】

结合式子，寻找各种综合构造规律，如 $g(x) = \frac{\cos x \cdot f(x)}{e^x}$ ，或者 $f(x) + r(x)$ ($r(x)$ 为常见函数)

题型十三：找出原函数

例 49. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1, +\infty)$ 上的连续函数，且在 $x=0$ 处存在导数，若函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 满

足 $f'(x)\ln(x+1) = x - \frac{f(x)}{x+1}$ ，则函数 $f(x)$

- A. 既有极大值又有极小值 B. 有极大值，无极小值
C. 有极小值，无极大值 D. 既无极大值也无极小值

例 50. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的连续函数，且在 $x=1$ 处存在导数，若函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 满

足 $f'(x)\ln x = x - \frac{f(x)}{x}$ ，则函数 $f(x)$

- A. 既有极大值又有极小值 B. 有极大值，无极小值
C. 既无极大值也无极小值 D. 有极小值，无极大值

例 51. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，对任意的实数 x 都有 $f'(x) = f(x) - 2e^{-x} + 2x - x^2$ ， $f(0) = 2$ ，则不

等式 $f(|x-1|) < e^2 + e^{-2} + 4$ 的解集是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-1, 3)$ D. $(e, 3)$

【方法技巧与总结】

熟悉常见导数的原函数.

【过关测试】

一、单选题

1. 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ， $f(0) = 2022$ ，若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) < f'(x)$ ，则不等式 $f(x) < 2022e^x$ 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $\left(\frac{2022}{e^2}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{2022}{e^2}\right)$ D. $(-\infty, 0)$

2. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f'(x) - f(x) > 0$, $f(2022) - e^{2022} = 0$, 则不等式

$$f\left(\frac{1}{4} \ln x\right) < \sqrt[4]{x} \text{ 的解集为 ()}$$

- A. $(e^{6063}, +\infty)$ B. $(0, e^{2022})$ C. $(e^{8088}, +\infty)$ D. $(0, e^{8088})$

3. 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $f'(x) - 4x > 0$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则当 $x \in [0, 2\pi]$

时, 不等式 $f(\cos x) - \cos 2x \geq 0$ 的解集为 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
 C. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ D. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $2f'(x) - f(x) < 0$ (其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数), 若

$f(2) = e$, 则 $f(x) > (\sqrt{e})^{|x|}$ 的解集为 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

5. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上存在导数 $f'(x)$, 对于任意的实数 x , 有 $f(x) + f(-x) = 2x^2$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,

$f'(x) + 3 \leq 2x$, 若 $f(m+2) + f(m) \leq 2m^2 - 2m - 2$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $m \geq 1$ B. $m \leq 1$ C. $m \geq -1$ D. $m \leq -1$

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 满足 $f'(x) < f(x)$, 且 $f(1) = 4$, 则关于不等式

$f(x) - 4e^{x-1} > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ C. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

7. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) < f(x)$, 且 $f(x+1)$ 为偶函数, $f(2) = 1$, 则不等式

$f(x) < e^x$ 的解集为 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 2)$

C. $(-\pi, -\frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}, \pi)$ D. $(-\pi, -\frac{\pi}{6}) \cup (0, \frac{\pi}{6})$

14. 已知 $f(x)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, 且 $f(x) > xf'(x)$ 恒成立, 则不等式 $x^2 f(\frac{1}{x}) - f(x) > 0$ 的解集为

A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

15. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意的实数 x 都有 $f(x) = 4x^2 - f(-x)$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,

$f'(x) + \frac{1}{2} < 4x$. 若 $f(m+1) \leq f(-m) + 3m + \frac{3}{2}$, 则实数 m 的取值范围是

A. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$

二、多选题

17. (多选) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 下列说法正确的有 ()

A. 已知 $f(x) > 0$, 且 $\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$, 则 $f(3) < f(2)$

B. 若 $xf(x) + x^2 f'(x) > 0$, 则函数 $xf(x)$ 有极小值

C. 若 $f'(x) > f(x)$, 且 $f(1) = e$, 则不等式 $f(x) > e^x$ 的解集为 $(1, +\infty)$

D. 若 $xf'(x) > 2f'(x) + f(x)$, 则 $f(4) > f(3)$

18. 已知 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $f(x) + f'(x) > 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 ()

A. $2f(\ln 2) > f(0)$ B. $e^2 f(2) > f(0)$ C. $2f(\ln 2) < f(0)$ D. $e^2 f(2) < f(0)$

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 其导函数是 $f'(x)$, 且满足 $\ln x \cdot f'(x) + \frac{1}{x} \cdot f(x) > 0$, 则下列说法

正确的是 ()

A. $f(\frac{1}{e}) > 0$ B. $f(\frac{1}{e}) < 0$ C. $f(e) > 0$ D. $f(e) < 0$

20. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) + \sin 2x < 0$. 则 ()

A. $f(0) = 0$

B. 函数 $y = f(x) - x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减

C. 不等式 $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) < \cos 2x$ 的解集为 $\left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right)$

D. 不等式 $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) < \cos 2x$ 的解集为 $\left(-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$

21. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 图像连续, 满足 $f(x) - f(-x) = 6\sin x - 2x$, 且 $x > 0$ 时, $f'(x) < 3\cos x - 1$ 恒成立, 则不等式 $f(x) \geq f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} + 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 中的 x 可以是 ()

A. $-\frac{\pi}{6}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

22. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的图象连续不断, 且 $\forall x \in R, f(x) + f(-x) = 4x^2$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 4x$, 若 $f(2m+1) - f(-m) \leq 6m^2 + 8m + 2$, 则实数 m 的取值可以为 ()

A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

三、填空题

23. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 其导函数为 $f'(x)$. 若 $x > 0$ 时, $f'(x) > 2x$, 则不等式 $f(2x) - f(x-1) \leq 3x^2 + 2x - 1$ 的解集为_____.

24. 已知 $f(x)$ 是 R 上的奇函数, $g(x)$ 是在 R 上无零点的偶函数, $f(2) = 0$, 当 $x > 0$ 时,

$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则使得 $\frac{f(\lg x)}{g(\lg x)} < 0$ 的解集是_____

25. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 且 $f(-x) - f(x) = 0$; 其导函数为 $f'(x)$. 若 $x > 0$ 时, $f'(x) < 2x$, 则不等式 $f(2x) - f(x-1) > 3x^2 + 2x - 1$ 的解集是_____.

26. 若 $f(x)$ 为定义在 R 上的连续不断的函数, 满足 $f(x) + f(-x) = 4x^2$, 且当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) + \frac{1}{2} < 4x$. 若

$f(m+1) \leq f(-m) + 3m + \frac{3}{2}$, 则 m 的取值范围_____.

专题 03 原函数与导函数混合还原问题

【考点预测】

1. 对于 $xf'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x \cdot f(x)$,
2. 对于 $xf'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x^k \cdot f(x)$
3. 对于 $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,
4. 对于 $x \cdot f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x^k}$
5. 对于 $f'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^x \cdot f(x)$,
6. 对于 $f'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^{kx} \cdot f(x)$
7. 对于 $f'(x) - f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,
8. 对于 $f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{bx}}$
9. 对于 $\sin x \cdot f'(x) + \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = f(x) \cdot \sin x$,
10. 对于 $\sin x \cdot f'(x) - \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$
11. 对于 $\cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = f(x) \cdot \cos x$,
12. 对于 $\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$
13. 对于 $f'(x) - f(x) > k$ (< 0), 构造 $g(x) = e^x [f(x) - k]$
14. 对于 $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$
15. $f'(x) + c = [f(x) + cx]'$; $f'(x) + g'(x) = [f(x) + g(x)]'$; $f'(x) - g'(x) = [f(x) - g(x)]'$;
16. $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]'$; $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$.

【题型归纳目录】

题型一：利用 $x^n f(x)$ 构造型

题型二：利用 $\frac{f(x)}{x^n}$ 构造型

题型三：利用 $e^{nx} f(x)$ 构造型

题型四：用 $\frac{f(x)}{e^{nx}}$ 构造型

由 x^3 为奇函数, $f(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为偶函数;

又 $x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$, 即 $x^3 f(x) < (1+2x)^3 f(1+2x)$

即 $g(x) < g(1+2x)$

又 $g(x)$ 为开口向上的偶函数

所以 $|x| < |1+2x|$, 解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$

故选: D

【点睛】

此题考查根据导函数构造原函数, 偶函数解不等式等知识点, 属于较难题目.

例 2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数, 其导函数为 $f'(x)$, 且有

$2f(x) + xf'(x) > x^2$ 则不等式 $(x+2019)^2 f(x+2019) - 4f(-2) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-2019, -2017)$

B. $(-2021, -2019)$

C. $(-2019, -2018)$

D. $(-2020, -2019)$

答案: B

【解析】

分析:

令 $F(x) = x^2 f(x)$, 确定 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数, 不等式等价于 $F(x+2019) - F(-2) < 0$, 根据单调性解得答案.

【详解】

由 $2f(x) + xf'(x) > x^2, (x < 0)$, 得 $2xf'(x) + x^2 f'(x) < x^3$,

即 $[x^2 f(x)]' < x^3 < 0$, 令 $F(x) = x^2 f(x)$,

则当 $x < 0$ 时, 得 $F'(x) < 0$, 即 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数,

$\therefore F(x+2019) = (x+2019)^2 f(x+2019)$, $F(-2) = 4f(-2)$,

即不等式等价于 $F(x+2019) - F(-2) < 0$,

Q $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数, \therefore 由 $F(x+2019) < F(-2)$ 得 $x+2019 > -2$,

即 $x > -2021$, 又 $x+2019 < 0$, 解得 $x < -2019$, 故 $-2021 < x < -2019$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了利用函数单调性解不等式, 构造函数 $F(x) = x^2 f(x)$, 确定其单调性是解题的关键.

例 3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 其导函数为 $f'(x)$, 若对任意的正实数 x

，都有 $xf'(x)+2f(x) > 0$ 恒成立，且 $f(\sqrt{2})=1$ ，则使 $x^2f(x) < 2$ 成立的实数 x 的集合为
()

A. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C. $(-\infty, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, +\infty)$

答案：C

【解析】

分析：

根据 $xf'(x)+2f(x) > 0$ 的特征，构造 $h(x)=x^2f(x)$ ，研究其单性，又 $f(\sqrt{2})=1$ ，得到 $h(\sqrt{2})=2f(\sqrt{2})=2$ ，将 $x^2f(x) < 2$ ，转化为 $h(x) < h(\sqrt{2})$ ，利用单调性定义求解。

【详解】

设 $h(x)=x^2f(x)$ ，

所以 $h'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=x(xf'(x)+2f(x))$ ，

因为 $x > 0$ 时，都有 $xf'(x)+2f(x) > 0$ 恒成立，

所以 $h'(x) > 0$ ，

所以 $h(x)=x^2f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

又因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数

所以 $h(x)=x^2f(x)$ 也是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数

所以 $h(x)=x^2f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，

又因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上，其导函数为 $f'(x)$

所以函数 $f(x)$ 是连续函数

所以 $h(x)=x^2f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数，

又因为 $f(\sqrt{2})=1$ ，

所以 $h(\sqrt{2})=2f(\sqrt{2})=2$ ，

又因为 $x^2f(x) < 2$ ，

即 $h(x) < h(\sqrt{2})$ 。

所以 $x < \sqrt{2}$

故选：C

【点睛】

分析：

令 $g(x) = x^2 f(x)$, 则 $g'(x) = x[xf'(x) + 2f(x)]$, 由题设易知 $x > 0$ 上 $xf'(x) + 2f(x) < 0$, 且 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上是奇函数, 即 $g(x)$ 在 $x > 0$ 、 $x < 0$ 都单调递减, 同时可知 $g(1) = g(-1) = 0$, 利用单调性求 $g(x) > 0$ 的解集, 即为 $f(x) > 0$ 的解集.

【详解】

令 $g(x) = x^2 f(x)$, 则 $g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf'(x) = x[xf'(x) + 2f(x)]$,

由 $x > 0$ 时, $f'(x) + \frac{2f(x)}{x} < 0$ 知: $xf'(x) + 2f(x) < 0$,

\therefore 在 $x > 0$ 上, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 又 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 为奇函数,

$\therefore g(-x) = (-x)^2 f(-x) = -x^2 f(x) = -g(x)$, 故 $g(x)$ 也是奇函数,

$\therefore g(x)$ 在 $x < 0$ 上单调递减, 又 $f(1) = 0$, 即有 $g(1) = g(-1) = 0$,

$\therefore f(x) > 0$ 的解集, 即 $g(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

故选: C

【方法技巧与总结】

1. 对于 $xf'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x \cdot f(x)$,

2. 对于 $xf'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = x^k \cdot f(x)$

题型二: 利用 $\frac{f(x)}{x^n}$ 构造型

例 6. 设 $f'(x)$ 是偶函数 $f(x)$ ($x \neq 0$) 的导函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $xf'(x) - 2f(x) > 0$, 则不等式 $4f(x+2019) - (x+2019)^2 f(-2) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2021)$

B. $(-2021, -2019) \cup (-2019, -2017)$

C. $(-2021, -2017)$

D. $(-\infty, -2019) \cup (-2019, -2017)$

答案: B

【解析】

分析:

设 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 计算 $F'(x) > 0$, 变换得到 $F(x+2019) < F(-2)$, 根据函数 $F(x)$ 的单调性

和奇偶性得到 $|x+2019| < 2$, 解得答案.

【详解】

由题意 $xf'(x) - 2f(x) > 0$ ($x > 0$), 得 $x^2 f'(x) - 2xf(x) > 0$,

进而得到 $\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} > 0$, 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$,

则 $F'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} > 0$, $F(-2) = \frac{f(-2)}{4}$, $F(x+2019) = \frac{f(x+2019)}{(x+2019)^2}$.

由 $4f(x+2019) - (x+2019)^2 f(-2) < 0$, 得 $\frac{f(x+2019)}{(x+2019)^2} < \frac{f(-2)}{4}$,

即 $F(x+2019) < F(-2)$.

Q 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, $\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

Q 函数 $f(x)$ 是偶函数, $\therefore F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 也是偶函数, 且 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数,

$\therefore |x+2019| < 2$, 解得 $-2021 < x < -2017$, 又 $Q x+2019 \neq 0$, 即 $x \neq -2019$,

$\therefore x \in (-2021, -2019) \cup (-2019, -2017)$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了利用函数的奇偶性和单调性解不等式, 构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 确定其单调性和奇偶性是解题的关键.

例 7. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, $f(2) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > \frac{2}{x} f(x)$, 则不等式

$f(x) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

答案: A

【解析】

分析:

根据题意, 构造出函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $f(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$, 进而结合题意求得答案.

【详解】

设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $f(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$, $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$, 若 $x > 0$,

由 $f'(x) > \frac{2}{x} f(x) \Rightarrow xf'(x) - 2f(x) > 0$, 则 $g'(x) > 0$, 即 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数, $f(2) = 0$, 容易判断, $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 \mathbb{R} 上是奇函数, 且

$g(2) = 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $g(-2) = 0$, 所以 $g(x) < 0$ 的解集为:

$(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

于是 $f(x) < 0$ 的解集为: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

故选：A.

例 8. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 的导函数， $f(-1)=0$ ，当 $x > 0$ 时，

$xf'(x) - f(x) < 0$ ，则使得 $f(x) < 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

答案：B

【解析】

分析：

设 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，求其导数结合条件得出 $F(x)$ 单调性，再结合 $F(x)$ 的奇偶性，得出 $F(x)$

的函数值的符号情况，从而得出答案.

【详解】

设 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，则 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ，

\because 当 $x > 0$ 时， $xf'(x) - f(x) < 0$ ，

当 $x > 0$ 时， $F'(x) < 0$ ，即 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $F(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = F(x)$ ， $F(x)$ 是偶函数，所以 $F(x)$ 在

$(-\infty, 0)$ 上单调递增.

又 $f(1) = f(-1) = 0$ ，所以当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时， $F(x) = \frac{f(x)}{x} < 0$ ；

当 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 时， $F(x) = \frac{f(x)}{x} > 0$.

所以当 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时， $f(x) < 0$.

故选：B.

例 9. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - f(x) < 0$ ，其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$

的导函数，若 $f(m-2022) > (m-2022)f(1)$ ，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(0, 2022)$ B. $(2023, +\infty)$ C. $(2023, +\infty)$ D. $(2023, 2023)$

答案：D

【解析】

分析：

构造函数 $g(x)$ ，使得 $g(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ ，然后根据函数 $g(x)$ 的单调性解不等式即可.

【详解】

由题设 $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，又

$f(m-2022) > (m-2022)f(1) \Rightarrow \frac{f(m-2022)}{m-2022} > \frac{f(1)}{1}$ ，即

$g(m-2022) > g(1) \Rightarrow m-2022 < 1 \Rightarrow m < 2023$ ，又函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，所以

$m-2022 > 0 \Rightarrow m > 2022$ ，综上可得： $2022 < m < 2023$ 。

故选：D。

【方法技巧与总结】

1. 对于 $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，

2. 对于 $x \cdot f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x^k}$

题型三：利用 $e^{mx} f(x)$ 构造型

例 10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f'(x)$ 是其导函数，若 $f(x) + f'(x) > -e^{-x} f'(x)$ ，

$f(0) = 1$ ，则不等式 $f(x) > \frac{2}{e^x + 1}$ 的解集是 ()

A. $(0, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 0)$

D. $(0, 1)$

答案：A

【解析】

分析：

构造函数 $g(x) = (e^x + 1)f(x)$ ，通过求导判断函数 $g(x)$ 的单调性，利用函数 $g(x)$ 的单调性解不等式即可。

【详解】

令 $g(x) = (e^x + 1)f(x)$ ，则 $g'(x) = e^x f(x) + (e^x + 1)f'(x)$ ，

因为 $f(x) + f'(x) > -e^{-x} f'(x)$ ，所以 $f(x) + (1 + e^{-x})f'(x) > 0$ ，

化简可得 $e^x f(x) + (e^x + 1)f'(x) > 0$ ，

即 $g'(x) > 0$ ，所以函数 $g(x)$ 在 R 上单调递增，

因为 $f(x) > \frac{2}{e^x + 1}$ ，化简得 $(e^x + 1)f(x) > 2$ ，

因为 $g(0) = 2f(0) = 2$ ， $g(x) = (e^x + 1)f(x)$ ，

所以 $g(x) > g(0)$ ，解得 $x > 0$ ，

所以不等式 $f(x) > \frac{2}{e^x + 1}$ 的解集是 $(0, +\infty)$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查通过构造函数、利用导数判断函数的单调性解抽象函数不等式;考查运算求解能力、知识的综合运用能力和转化与化归能力;构造函数 $g(x)=(e^x+1)f(x)$, 并利用其单调性间接解不等式是求解本题的关键;属于抽象型、难度大型试题.

例 11. 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导且 $f(0)=0$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)<0$, 则 $f(x)<0$ 的解集是_____

答案: $(0,+\infty)$

【解析】

分析:

由题意构造函数 $g(x)=e^x f(x)$, 利用导数判断出 $g(x)$ 单调递减, 利用单调性解不等式.

【详解】

设 $g(x)=e^x f(x)$, 则 $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x (f(x)+f'(x))$,

因为 $f(x)+f'(x)<0$, 所以 $g'(x)<0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 所以 $g(x)$ 单调递减,

又 $f(0)=0$ 得 $g(0)=0$, 由 $f(x)<0$ 等价于 $g(x)<0$,

所以 $x>0$, 即 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,+\infty)$.

故答案为: $(0,+\infty)$

例 12. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)>1$, $f(0)=4$, 则不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$ (e

为自然对数的底数)的解集为 ()

A. $(0,+\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

D. $(3,+\infty)$

答案: A

【解析】

分析:

把不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$ 化为 $e^x f(x)>3+e^x$, 构造函数令 $F(x)=e^x f(x)-e^x-3$, 利用导数求得函数 $F(x)$ 的单调性, 结合单调性, 即可求解.

【详解】

由题意, 不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$, 即 $e^x f(x)>3+e^x$,

令 $F(x)=e^x f(x)-e^x-3$, 可得 $F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)-e^x=e^x[f(x)+f'(x)-1]$,

因为 $f(x)+f'(x)>1$ 且 $e^x>0$, 可知 $F'(x)>0$, 所以 $F(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

又因为 $F(0) = e^0 f(0) - e^0 - 3 = f(0) - 4 = 0$,

所以 $F(x) > 0$ 的解集为 $(0, +\infty)$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了利用导数研究函数的单调性及其应用, 以及导数的四则运算的逆用, 其中解答中结合题意构造新函数, 利用导数求得新函数的单调性是解答的关键, 着重考查构造思想, 以及推理与运算能力.

例 13. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 满足 $f(0) = 2$, $\forall x \in R$, 都有 $f(x) + f'(x) > 1$, 则关于 x 的不等式 $f(x) > e^{-x} + 1$ 的解集为 ()

- A. $\{x|x > 0\}$ B. $\{x|x > e\}$ C. $\{x|x < 1\}$ D. $\{x|0 < x < e\}$

答案: A

【解析】

分析:

构造函数 $g(x) = e^x f(x) - e^x - 1$, 利用导数可判断函数 $g(x)$ 的单调性, 由已知条件可得函数 $g(x)$ 的零点, 由此可解得不等式.

【详解】

解: 令 $g(x) = e^x f(x) - e^x - 1$, 则 $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) - e^x = e^x [f(x) + f'(x) - 1]$,

由 $f(x) + f'(x) > 1$, $\therefore f(x) + f'(x) - 1 > 0$,

$\therefore g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 R 上单调递增,

又 $f(0) = 2$, $\therefore g(0) = e^0 f(0) - e^0 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$,

故当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0)$, 即 $e^x f(x) - e^x - 1 > 0$, 整理得 $e^x f(x) > e^x + 1$,

$\therefore f(x) > e^{-x} + 1$ 的解集为 $\{x|x > 0\}$,

故选: A.

【点睛】

关键点睛: 本题考查利用导数分析函数单调性的性质及其应用, 并求解抽象不等式, 综合性较强, 关键在于根据题意构造合适的函数, 求所构造的函数的导函数, 研究构造的函数的单调性, 运用其单调性求解不等式.

【方法技巧与总结】

1. 对于 $f'(x) + f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^x \cdot f(x)$,

2. 对于 $f'(x) + kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = e^{kx} \cdot f(x)$

题型四: 用 $\frac{f(x)}{e^{nx}}$ 构造型

例14. 定义在 $(-2,2)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f(x)+e^{4x}f(-x)=0$, $f(1)=e^2$,

且当 $x>0$ 时, $f'(x)>2f(x)$, 则不等式 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 的解集为 ()

- A. $(1,4)$ B. $(-2,1)$ C. $(1,+\infty)$ D. $(0,1)$

答案: A

【解析】

分析:

由给定的不等式构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$ 对 $g(x)$ 求导, 根据已知条件可判断 $g(x)$ 非得单调性,

将所求解不等式转化为 $g(x)$ 有关的不等式, 利用单调性脱去 f 即可求解.

【详解】

令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$, 则 $e^{2x}g(x)+e^{4x}e^{-2x}g(-x)=0$ 可得 $g(x)+g(-x)=0$

所以 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$ 是 $(-2,2)$ 上的奇函数,

$g'(x)=\frac{f'(x)e^{2x}-2e^{2x}f(x)}{e^{4x}}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$,

当 $x>0$ 时, $f'(x)>2f(x)$, 所以 $g'(x)>0$,

$g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$ 是 $(0,2)$ 上单调递增,

所以 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$ 是 $(-2,2)$ 上单调递增,

因为 $g(1)=\frac{f(1)}{e^2}=\frac{e^2}{e^2}=1$,

由 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 可得 $e^{2x}e^{2(2-x)}g(2-x)<e^4$ 即 $g(2-x)<1=g(1)$,

由 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$ 是 $(-2,2)$ 上单调递增, 可得 $\begin{cases} -2 < 2-x < 2 \\ 2-x < 1 \end{cases}$ 解得: $1 < x < 4$,

所以不等式 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 的解集为 $(1,4)$,

故选: A.

【点睛】

关键点点睛: 本题解题的关键点是: 构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$, 根据已知条件判断 $g(x)$ 的奇偶性和单调性, 利用单调性解不等式.

例15. 设函数 $f(x)$ 在 R 上的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x)>f(x)+1$, $f'(x)=f'(6-x)$,

$f(3)=1$, $f(6)=5$, 则不等式 $f(\ln x)+2x+1<0$ 的解集为 ()

- A. (0,1) B. (0,3) C. (1,3) D. (3,6)

答案: A

【解析】

分析:

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{e^x}$, 得到 $g(x)$ 也是 R 上的单调递增函数., 分析得到函数 $f(x)$ 关于点

(3,1) 对称. 由 $f(\ln x) + 2x + 1 < 0$ 得到 $g(\ln x) < g(0)$, 即得解.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{e^x}$, $g'(x) = \frac{f'(x)-f(x)-1}{e^x} > 0$,

所以 $g(x)$ 也是 R 上的单调递增函数.

因为 $f'(x) = f'(6-x)$, 所以 $f'(x)$ 关于直线 $x=3$ 对称,

所以 $\int f'(x)dx = \int f'(6-x)dx, \therefore f(x) + c_1 = -f(6-x) + c_2$, (c_1, c_2 为常数),

$\therefore f(x) + f(6-x) = c_2 - c_1$, 令 $x=3$, 所以 $2f(3) = c_2 - c_1, \therefore f(3) = \frac{c_2 - c_1}{2}$.

因为 $f(3) = 1$, 所以 $c_2 - c_1 = 2$,

所以 $f(x) + f(6-x) = 2$, 所以函数 $f(x)$ 关于点 (3,1) 对称.

由 $f(3) = 1, f(6) = 5$ 得到 $f(0) = -3$,

因为 $f(\ln x) + 2x + 1 < 0, \therefore f(\ln x) + 1 < -2x = -2e^{\ln x}$,

所以 $\frac{f(\ln x)+1}{e^{\ln x}} < -2$,

所以 $g(\ln x) < -2 = g(0) = \frac{-3+1}{e^0}$,

所以 $g(\ln x) < g(0)$,

所以 $\ln x < 0, \therefore 0 < x < 1$.

故选: A

例 16. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x)$ 满足 $\frac{f'(x)-f(x)}{x-1} > 0$,

$y = \frac{f(x)}{e^x}$ 关于直线 $x=1$ 对称, 则不等式 $\frac{f(x^2-x)}{e^{x^2-x}} < f(0)$ 的解集是 ()

- A. (-1,2) B. (1,2)
C. (-1,0) \cup (1,2) D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

答案: C

【解析】

分析:

令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 求出导函数, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) - f(x) > 0$, 则 $g'(x) > 0$, 判定出 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$

上单增; 据 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 关于直线 $x=1$ 对称, 将不等式中的抽象函数符号去掉, 解出 x 即可.

【详解】

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{e^x},$$

$$\therefore g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x},$$

$$\text{Q } \frac{f'(x) - f(x)}{x-1} > 0,$$

当 $x > 1$ 时, $f'(x) - f(x) > 0$, 则 $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增;

当 $x < 1$ 时, $f'(x) - f(x) < 0$, 则 $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单减;

$$\text{Q } g(0) = f(0),$$

\therefore 不等式 $\frac{f(x^2 - x)}{e^{x^2 - x}} < f(0)$ 即为不等式 $g(x^2 - x) < g(0)$,

$$\text{Q } y = \frac{f(x)}{e^x} \text{ 关于直线 } x=1 \text{ 对称,}$$

$$\therefore 0 < x^2 - x < 2,$$

解得 $-1 < x < 0$ 或 $1 < x < 2$,

故选: C.

例 17. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且满足 $f(x) < f'(x)$, 则不等式 $e^{-x} f(x^2 + x) > e^{x^2 - 2} f(2)$ 的解集是 ()

A. $(-2, 1)$

B. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 2)$

D. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

答案: B

【解析】

分析:

构造函数 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 利用导数判断函数单调性, 根据单调性建立不等式求解即可.

【详解】

令 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$

上单调递增，所以

$$e^{-x}f(x^2+x) > e^{x^2-2}f(2) \Leftrightarrow \frac{f(x^2+x)}{e^{x^2+x}} > \frac{f(2)}{e^2} \Leftrightarrow h(x^2+x) > h(2) \Leftrightarrow x^2+x > 2, \text{解之得 } x < -2$$

或 $x > 1$ ，即原不等式的解集为 $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ，

故选：B.

例 18. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ，都有 $f(x) > f'(x) + 2$ ，且 $f(1) = 2022$ ，则不等式 $f(x) - 2020e^{x-1} < 2$ 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{e})$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

答案：C

【解析】

分析：

设函数 $g(x) = \frac{f(x)-2}{e^x}$ ，根据题意可判断 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减，再求出 $g(1) = \frac{2020}{e}$ ，不等

式 $f(x) - 2020e^{x-1} < 2$ 整理得 $\frac{f(x)-2}{e^x} < \frac{2020}{e}$ ，所以 $g(x) < g(1)$ ，利用 $g(x)$ 单调性解抽象不等式即可.

【详解】

设函数 $g(x) = \frac{f(x)-2}{e^x}$ ，

所以 $g'(x) = \frac{f'(x) \times e^x - [f(x)-2] \times e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x) + 2}{e^x}$ ，因为 $f(x) > f'(x) + 2$ ，

所以 $f'(x) - f(x) + 2 < 0$ ，即 $g'(x) < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减，因为 $f(1) = 2022$ ，

所以 $g(1) = \frac{f(1)-2}{e} = \frac{2020}{e}$ ，因为 $f(x) - 2020e^{x-1} < 2$ ，整理得 $\frac{f(x)-2}{e^x} < \frac{2020}{e}$ ，

所以 $g(x) < g(1)$ ，因为 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减，所以 $x > 1$.

故选：C.

【点睛】

函数的单调性是函数的重要性质之一，它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中.某些数学问题从表面上看似乎与函数的单调性无关，但如果我们能挖掘其内在联系，抓住其本质，那么运用函数的单调性解题，能起到化难为易、化繁为简的作用.因此对函数的单调性进行全面、准确的认识，并掌握好使用的技巧和方法，这是非常必要的.根据题目的特点，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧.许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效.

例 19. 已知定义在 \mathbf{R} 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，满足 $f'(x) < f(x)$ 且 $f(x+3)$

为偶函数, $f(6)=1$, 则不等式 $f(x) < e^x$ 的解集为 ()

- A. $(-3, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(6, +\infty)$

答案: C

【解析】

分析:

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 求导 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$, 从而得 $g(x)$ 在定义 R 上单调递减; 又

$f(x) < e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} < \frac{f(0)}{e^0}$, 从而有 $g(x) < g(0)$, 利用 $g(x)$ 的单调性即可求解.

【详解】

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{e^x},$$

$$\text{Q } f'(x) < f(x),$$

$$\therefore g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在定义 R 上单调递减; ①

又 $f(x+3)$ 为偶函数,

$$\therefore f(3+x) = f(3-x), \therefore f(0) = f(6) = 1,$$

$$\therefore g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 1,$$

则不等式 $f(x) < e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} < \frac{f(0)}{e^0}$, 即 $g(x) < g(0)$,

由①得 $x > 0$,

故选: C.

例 20. $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 已知 $f'(x) > f(x)$, 且

$f(1) = e$, 则不等式 $f(2x-1) - e^{2x-1} > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$
C. $(1, +\infty)$ D. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

答案: C

【解析】

分析:

根据不等式 $f'(x) > f(x)$ 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 然后利用函数 $g(x)$ 单调性解不等式即可.

【详解】

由 $f'(x) > f(x)$, 得 $f'(x) - f(x) > 0$

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(1) = e$, 所以 $g(1) = 1$

不等式 $f(2x-1) - e^{2x-1} > 0$ 等价于 $\frac{f(2x-1)}{e^{2x-1}} > 1$

即 $g(2x-1) > g(1)$, 所以 $2x-1 > 1 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$

故选: C.

【方法技巧与总结】

1. 对于 $f'(x) - f(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

2. 对于 $f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0), 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{bx}}$

题型五: 利用 $\sin x$ 、 $\tan x$ 与 $f(x)$ 构造型

例 21. 函数 $y = f(x)$ 对任意的 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $x + 2f(x) + f'(x)\sin 2x = e^{x-1}$ (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式成立的是 ()

A. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

B. $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 3f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

C. $(2 - \sqrt{3})f\left(\frac{\pi}{12}\right) > f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

D. $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) < (2 + \sqrt{3})f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

答案: D

【解析】

分析:

由 $x + 2f(x) + f'(x)\sin 2x = e^{x-1}$, 可以构造函数 $F(x) = f(x)\tan x$, $F'(x) \geq 0$, 根据单调性比较大小即可得解.

【详解】

令 $F(x) = f(x)\tan x$,

$$F'(x) = f'(x)\frac{\sin x}{\cos x} + f(x)\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\sin x \cos x + f(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\sin 2x + 2f(x)}{2\cos^2 x}$$

又由已知可得, $2f(x) + f'(x)\sin 2x = e^{x-1} - x \geq 0$, 所以 $F'(x) \geq 0$,

所以 $F(x)$ 在 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

因为 $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12}$ ，所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\frac{\pi}{3} < f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\tan\frac{\pi}{12}$ ，

故 $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) < (2+\sqrt{3})f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ，D 正确，

故选：D

【点睛】

本题考查了构造函数，考查了导数的应用，有一定的计算量，属于较难题.本题的关键点有：

- (1) 根据所给条件构造出对应的函数，并求出单调性；
- (2) 对所给答案进行分析判断，比较大小.

例 22. 已知可导函数 $f(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数. 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$f(x) + f'(x)\tan x > 0$ ，则不等式 $\cos x \cdot f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot f(-x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ C. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

答案：D

【解析】

分析：

构造函数 $\sin xf(x)$ ，并依据函数 $\sin xf(x)$ 的单调性去求解不等式

$\cos x \cdot f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot f(-x) > 0$ 的解集.

【详解】

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $f(x) + f'(x)\tan x > 0$ ，则 $\cos xf(x) + f'(x)\sin x > 0$

则函数 $\sin xf(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又可导函数 $f(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数

则 $\sin xf(x)$ 是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的偶函数，且在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 单调递减，

由 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < -x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，可得 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ，则 $x + \frac{\pi}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

则 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时，不等式 $\cos x \cdot f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot f(-x) > 0$

可化为 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > \sin(-x) \cdot f(-x)$

又由函数 $\sin x f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 且 $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x + \frac{\pi}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

则有 $\frac{\pi}{2} > x + \frac{\pi}{2} > -x > 0$, 解之得 $-\frac{\pi}{4} < x < 0$

故选: D

例 23. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) + f'(x) \tan x > 0$,

则不等式 $\cos x \cdot f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot f(-x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

答案: C

【解析】

分析:

构造函数 $g(x) = f(x) \sin x$, 则经变形后得 $g'(x) = [f(x) + f'(x) \tan x] \cdot \cos x$, 进而得到 $g(x)$ 在

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时单增, 结合 $f(x)$ 单调性证出 $g(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的偶函数, 再去“ f ”, 即可求解

【详解】

令 $g(x) = f(x) \sin x$, $g'(x) = f(x) \cos x + f'(x) \sin x = [f(x) + f'(x) \tan x] \cdot \cos x$,

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) + f'(x) \tan x > 0$, $\therefore g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 单调递增.

又 $g(0) = 0$, $\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g(x) = f(x) \sin x > 0$,

∵ $f(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数, $\therefore g(x)$ 是定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的偶函数.

不等式 $\cos x \cdot f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot f(-x) > 0$,

即 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > \sin x f(x)$, 即 $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > g(x)$,

$\therefore \left|x + \frac{\pi}{2}\right| > |x|$, $\therefore x > -\frac{\pi}{4}$ ①,

又 $-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, 故 $-\pi < x < 0$ ②,

由①②得不等式的解集是 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

故选: C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/908033044044006073>