

北京市日坛中学 2023-2024 学年度第一学期 10 月月考

高二年级数学

一、单选题（每题 5 分，共 55 分）

1. 直线 l 的方向向量为 $\vec{l}$ ，平面 α 与 β 的法向量分别为 $\vec{m}$ ， $\vec{n}$ ，则下列选项正确的是（ ）

A. 若 $l \perp \alpha$ ，则 $\vec{l} \cdot \vec{m} = 0$

B. 若 $l \parallel \beta$ ，则 $\vec{l} = k\vec{n}$

C. 若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

D. 若 $\alpha \parallel \beta$ ，则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据空间中直线与平面，平面与平面的位置关系与对应向量的关系逐项进行判断即可求解.

【详解】若 $l \perp \alpha$ ，则 $\vec{l}$ 与 $\vec{m}$ 共线，故选项 A 错误；

若 $l \parallel \beta$ ，则 $l \perp \vec{n}$ ，即 $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$ ，故选项 B 错误；

若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，即 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，故选项 C 正确；

若 $\alpha \parallel \beta$ ，则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 共线，故选项 D 错误，

故选：C.

2. 若向量 $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, x, y)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $|\vec{b}| =$ （ ）

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】由向量平行 坐标运算得出 $x = 2, y = 4$ ，进而由模长公式求解.

【详解】因为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，所以 $\frac{2}{1} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2}$ ，所以 $x = 2, y = 4$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$.

故选：D

3. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC = 3, BC = 3, AB = 3\sqrt{2}, AA_1 = 4$ ，则异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值为（ ）

A. $\frac{16}{25}$

B. $\frac{9}{25}$

C. $\frac{16}{25}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用勾股定理的逆定理及直棱柱的定义，建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标及直线 A_1C 与 BC_1 的方向向量，利用向量的夹角公式，结合向量夹角与线线角的关系即可求解.

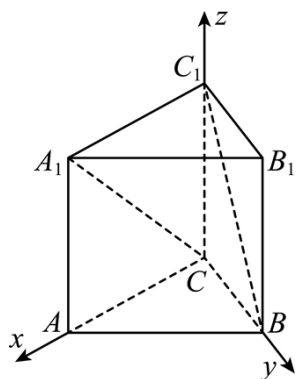
【详解】因为 $AC = 3, BC = 3, AB = 3\sqrt{2}$,

所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

所以 $AC \perp BC$,

又因为侧棱与底面垂直，

所以以 C 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $C - xyz$ ，如图所示



易得 $C(0,0,0), C_1(0,0,4), A_1(3,0,4), B(0,3,0)$,

所以 $\overrightarrow{A_1C} = (-3,0,-4), \overrightarrow{BC_1} = (0,-3,4)$,

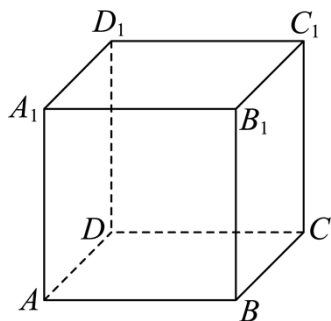
设异面直线 A_1C 与 BC_1 所成角为 θ ，则

$$\cos \theta = |\cos \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{BC_1}| = \frac{|\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{A_1C}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{|-4 \times 4|}{5 \times 5} = \frac{16}{25}.$$

所以异面直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{16}{25}$.

故选：C.

4. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，下列结论错误的为（ ）



- A. 直线 AD_1 与直线 A_1C 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$
- B. 直线 AD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$
- C. 直线 $B_1D \perp$ 平面 D_1AC
- D. 平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $\frac{\pi}{6}$

【答案】D

【解析】

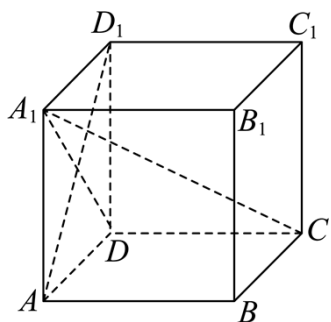
【分析】对 A，证明直线 $AD_1 \perp$ 平面 A_1DC 即可；对 B，根据线面角的定义，根据直线 AD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\angle AD_1A_1$ 即可；对 C，根据线面垂直的判定证明即可；对 D，根据二面角的定义可得平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $\angle AD_1A_1$ 即可.

【详解】对 A，连接如图，由正方体性质可得 $A_1D \perp AD_1$ ，且 $DC \perp$ 平面 A_1ADD_1 ， $AD_1 \subset$ 平面 A_1ADD_1 ，故 $DC \perp AD_1$.

又 $A_1D \cap DC = D$ ， $A_1D, DC \subset$ 平面 A_1DC ，故 $AD_1 \perp$ 平面 A_1DC .

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1DC ，故 $AD_1 \perp A_1C$.

故直线 AD_1 与直线 A_1C 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$ ，故 A 正确；



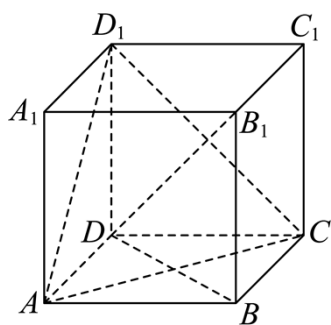
对 B，因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，故直线 AD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\angle AD_1A_1 = 45^\circ$ ，故 B 正确；

对 C，连接如图，由正方体性质可得 $AC \perp BD$ ，且 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，故 $AC \perp BB_1$ 。

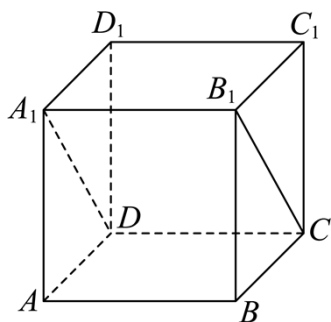
又 $BD \cap BB_1 = B$ ， $BD, BB_1 \subset$ 平面 BDB_1 ，故 $AC \perp$ 平面 BDB_1 。

又 $B_1D \subset$ 平面 A_1D_1C ，故 $AC \perp B_1D$ 。

同理 $AD_1 \perp B_1D$ ，又 $AD_1 \cap AC = A$ ， $AD_1, AC \subset$ 平面 AD_1C ，故 $B_1D \perp$ 平面 D_1AC ，故 C 正确：



对 D，平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 交于 CD ，且 $CD \perp AD$ ， $CD \perp A_1D$ ，故平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $\angle AD_1A_1 = 45^\circ$ ，故 D 错误。



故选：D

5. 在空间直角坐标系中，已知 $A(1, -1, 0)$ ， $B(4, 3, 0)$ ， $C(5, 4, -1)$ ，则 A 到 BC 的距离为（ ）

- A. 3 B. $\frac{\sqrt{58}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{17}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{78}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用向量法求解。

【详解】解：因为 $A(1, -1, 0)$ ， $B(4, 3, 0)$ ， $C(5, 4, -1)$ ，

所以 $\overrightarrow{BA} = (-3, -4, 0)$ ， $\overrightarrow{BC} = (1, 1, -1)$ ， $|\overrightarrow{BA}| = 5$ ， $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}$ ，

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{7\sqrt{3}}{15},$$

$$\text{所以 } \sin \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle} = \sqrt{1 - \frac{49}{75}} = \frac{\sqrt{78}}{15},$$

$$\text{所以 A 到 BC 的距离为 } d = |\overrightarrow{BA}| \cdot \sin \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\sqrt{78}}{3},$$

故选：D

6. 设直线 l 的斜率 k 满足 $|k| \leq 1$ ，则直线 l 的倾斜角的取值范围是（ ）

- A. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ C. $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ D. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式得到 $-1 \leq k \leq 1$ ，然后根据斜率范围求倾斜角范围即可.

【详解】由 $|k| \leq 1$ 得 $-1 \leq k \leq 1$ ，

当 $k = -1$ 时，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ ，当 $k = 1$ 时，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

所以倾斜角的范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

故选：B.

7. 过点 $A(1, 4)$ 的直线在两坐标轴上的截距之和为零，则该直线方程为（ ）

- A. $x - y + 3 = 0$ B. $x + y - 5 = 0$
C. $4x - y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$ D. $4x - y = 0$ 或 $x - y + 3 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】可以分截距都为零和截距不为零两种情况进行考虑，截距为零，直线过原点，求出方程即可，截距不为零，利用截距式，设出方程求解即可；也可以设出方程，求出截距，进行计算即可.

【详解】解法一 当直线过原点时，满足题意，此时直线方程为 $y = 4x$ ，即 $4x - y = 0$ ；

当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 (a \neq 0)$ ，

因为直线过点 $A(1, 4)$ ，所以 $\frac{1}{a} - \frac{4}{a} = 1$ ，

解得 $a = -3$ ，此时直线方程为 $x - y + 3 = 0$ 。

故选：D。

解法二 易知直线斜率不存在或直线斜率为 0 时不符合题意。

设直线方程为 $y - 4 = k(x - 1) (k \neq 0)$ ，

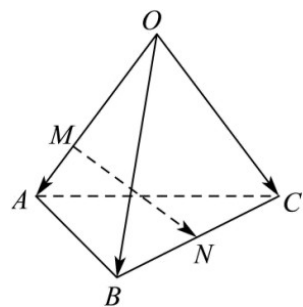
则 $x = 0$ 时， $y = 4 - k$ ， $y = 0$ 时， $x = 1 - \frac{4}{k}$ ，

由题意知 $1 - \frac{4}{k} + 4 - k = 0$ ，

解得 $k = 4$ 或 $k = 1$ ，即直线方程为 $y = 4x$ 或 $x - y + 3 = 0$ 。

故选：D。

8. 如图，在四面体 $OABC$ 中， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 。点 M 在 OA 上，且 $OM = 2MA$, N 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于 ()



A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

D. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

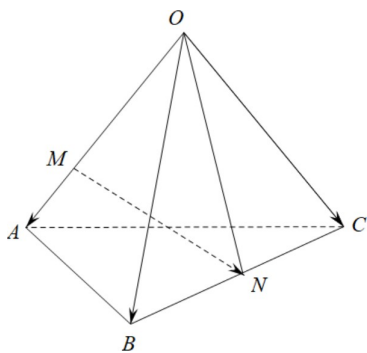
【答案】B

【解析】

【分析】连接 ON ，利用空间向量基本定理可得答案。

详解】连接 ON ， $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ 。

故选：B。



9. 已知 $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, 则“直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $(a+1)x - 2ay + 1 = 0$ 垂直”是“ $a = 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件,

【答案】B

【解析】

【分析】根据两直线的位置关系、充分、必要条件的知识确定正确答案.

【详解】直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $(a+1)x - 2ay + 1 = 0$ 垂直,

即 $a(a+1) + 2 \times (-2a) = a^2 - 3a = 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = 3$.

所以“直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $(a+1)x - 2ay + 1 = 0$ 垂直”是“ $a = 0$ ”的必要不充分条件.

故选: B

10. 点 $P(-2, -1)$ 到直线 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$ 的距离最大时, 其最大值以及此时的直线方程分别为 ()

- A. $\sqrt{13}$; $x + y - 2 = 0$
B. $\sqrt{11}$; $3x + y - 4 = 0$
C. $\sqrt{13}$; $2x - 3y + 1 = 0$
D. $\sqrt{11}$; $2x - 3y + 1 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据直线 l 的方程得到直线 l 恒过点 $A(1, 1)$, 根据几何知识得到当 PA 垂直直线 l 时, 点 P 到直线 l 的距离最大, 然后根据距离公式和点斜式计算即可.

【详解】直线 l 的方程可整理为: $\lambda(3x + y - 4) + x + y - 2 = 0$, 令 $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$,

所以直线 l 恒过点 $A(1, 1)$,

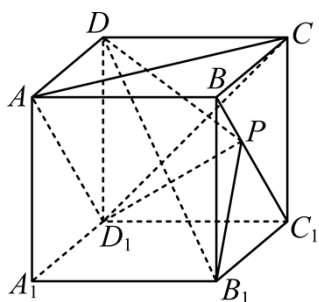
由题意得当 PA 垂直直线 l 时, 点 P 到直线 l 的距离最大,

$$|PA| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}, \quad k_{PA} = \frac{-1-1}{-2-1} = \frac{2}{3},$$

所以直线 PA : $y-1 = \frac{2}{3}(x-1)$, 整理得 $2x-3y+1=0$.

故选: C.

11. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 则下列判断中正确的是 ()



① $B_1D \perp$ 平面 ACD_1 ;

② $AP \parallel$ 平面 ACD_1 ;

③ 异面直线 AP 与 AD_1 所成角的取值范围是 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$;

④ 三棱锥 D_1-APC 的体积不变.

A. ①②

B. ①④

C. ③④

D. ①②④

【答案】D

【解析】

【分析】由线面垂直的判定定理可判断①, 由面面平行的性质定理可判断②, 由线面垂直的性质定理可判断③, 由线面平行的性质及棱锥的体积公式可判断④.

【详解】在正方体中由 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 可得 $DD_1 \perp AC$,

又 $AC \perp BD$, DD_1, BD 是平面 BDD_1B_1 内两相交直线, 从而得 $AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 ,

又 $B_1D \subset$ 平面 BDD_1B_1 , 因此有 $AC \perp B_1D$,

同理 $AD_1 \perp B_1D$,

又 $AC \cap AD_1 = A$, $AC, AD_1 \subset$ 平面 ACD_1 , $\therefore B_1D \perp$ 平面 ACD_1 , 故①正确;

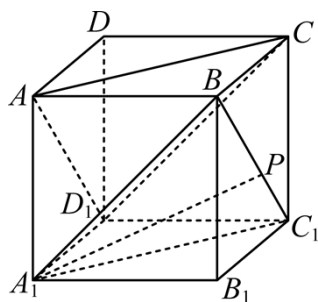
正方体中 AB 与 C_1D_1 平行且相等, 则 ABC_1D_1 是平行四边形, 故 $AD_1 // BC_1$,

又 $AD_1 \not\subset$ 平面 A_1BC_1 , $BC_1 \subset$ 平面 A_1BC_1 , $\therefore AD_1 //$ 平面 A_1BC_1 ,

同理 $AC //$ 平面 A_1BC_1 ,

又 $AD_1 \cap AC = A$, AD_1, AC 都在平面 AD_1C 内, $\therefore$ 平面 $AD_1C //$ 平面 A_1BC_1 ,

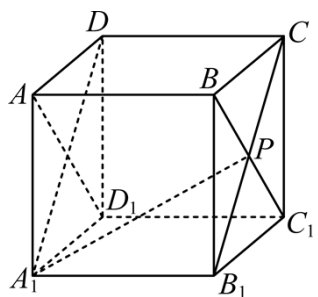
因为 $A_1P \subset$ 平面 A_1BC_1 , $\therefore A_1P //$ 平面 ACD_1 , 故②正确;



与①同理可证 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD ,

当 P 是 BC_1 与 B_1C 交点时, $A_1P \subset$ 平面 A_1B_1CD , 则 $AD_1 \perp A_1P$,

此时异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角为 $\frac{\pi}{2}$, 故③错误;



由②知平面 $AD_1C //$ 平面 A_1BC_1 , 又 $BC_1 \subset$ 平面 A_1BC_1 , 所以 $BC_1 //$ 平面 ACD_1 ,

$\therefore P$ 到平面 ACD_1 的距离不变, 因此 $V_{D_1-APC} = V_{P-ACD_1}$ 恒为定值, 故④正确.

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/908066120135006117>