

微专题 23 奇偶性及应用 13 种常考题型总结

高频考点

题型 1 函数奇偶性的定义及判断

题型 2 利用奇偶性求值

题型 3 已知 $f(x) = \text{奇函数} + M$

题型 4 利用奇偶性求解析式

题型 5 由函数的奇偶性求参数

题型 6 利用函数的奇偶性求最值

题型 7 应用函数的奇偶性画函数图象

题型 8 利用函数的奇偶性识别图象

题型 9 抽象函数的奇偶性问题

题型 10 函数的单调性和奇偶性的综合应用

题型 11 函数的奇偶性和周期性的综合应用

题型 12 奇偶性与对称性的综合运用

题型 13 基于奇偶(对称性)的凸凹反转



解题策略

1、函数的奇偶性

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 是偶函数	关于 y 轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 是奇函数	关于原点对称

注:

① 奇函数 $\Leftrightarrow$ 图像关于原点对称 $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

② 偶函数 $\Leftrightarrow$ 图像关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

③ 对于含参函数中参数的求值问题, 在填空题与选择题中, 掌握以下两个结论, 会给解题带来方便:

(i) $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x) = f(|x|)$. (ii) 若奇函数在 $x=0$ 处有意义, 则 $f(0) = 0$.

④ 奇函数在 y 轴两侧相对称的区间增减性相同, 偶函数在 y 轴两侧相对称的区间增减性相反. (重要)

⑤ 利用性质法来判断奇偶性 (以函数的定义域关于原点对称为前提, 所有奇偶函数都非零函数):

(1) 奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数; (2) 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数; (3) 偶函数 $\pm$ 奇函数 = 非奇非偶函数

记忆口诀: 加减看自身

(3) 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数; (4) 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数; (5) 奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数

(6) $\frac{\text{奇函数}}{\text{奇函数}} = \frac{\text{偶函数}}{\text{偶函数}} = \text{偶函数}$ (7) $\frac{\text{奇函数}}{\text{偶函数}} = \frac{\text{偶函数}}{\text{奇函数}} = \text{奇函数}$

记忆口诀：乘除看正负

（注：在记忆的时候可将偶函数看成“+”号，将奇函数看成“-”号）

⑥奇(偶)函数倒数或相反数运算，奇偶性不变；

⑦奇(偶)函数的绝对值运算，函数的奇偶性均为偶函数.

⑧若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数的和的形式. 记

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad \text{则 } f(x) = g(x) + h(x).$$

⑨复合函数 $y = f[g(x)]$ 的奇偶性原来：内偶则偶，两奇为奇.

2、奇偶函数的图象特征（几何意义）

①奇函数的图象特征：若一个函数是奇函数，则这个函数的图象是以原点为对称中心的中心对称图形；反之，若一个函数的图象是以原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数.

②偶函数的图象特征：若一个函数是偶函数，则这个函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形；反之，若一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数是偶函数.

③奇偶函数的结论：奇函数在关于原点对称的区间上有相同的单调性，偶函数在关于原点对称的区间上有相反的单调性；偶函数在关于原点对称的区间上有相同的最大(小)值，取最值时的自变量互为相反数；奇函数在关于原点对称的区间上的最值互为相反数，取最值时的自变量也互为相反数.

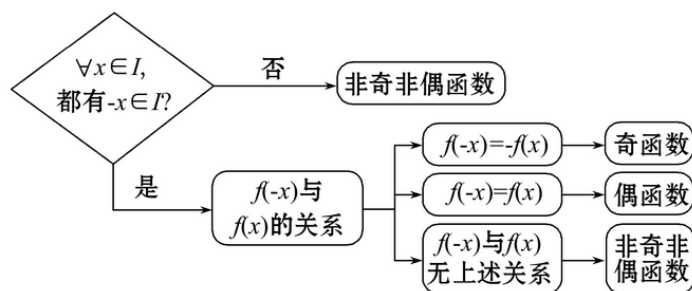
注：奇、偶函数图象对称性的应用

①若一个函数的图象关于原点对称，则这个函数是奇函数；

②若一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数是偶函数.

3、函数奇偶性的判断

（1）定义法：若函数的定义域不是关于原点对称，则立即可判断该函数既不是奇函数也不是偶函数；若函数的定义域是关于原点对称的，再判断 $f(-x)$ 与 $\pm f(x)$ 之一是否相等.



（2）验证法：在判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系时，只需验证 $f(-x) \pm f(x) = 0$ 及 $\frac{f(-x)}{f(x)} = \pm 1$ 是否成立即可.

（3）图象法：奇（偶）函数等价于它的图象关于原点（ y 轴）对称.

（4）性质法：两个奇函数的和仍为奇函数；两个偶函数的和仍为偶函数；两个奇函数的积是偶函数；两个偶函数的积是偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数.

（5）分段函数奇偶性的判断

判断分段函数的奇偶性时，通常利用定义法判断。在函数定义域内，对自变量 x 的不同取值范围，有着不同的对应关系，这样的函数叫做分段函数。分段函数不是几个函数，而是一个函数。因此其判断方法也是先考查函数的定义域是否关于原点对称，然后判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。首先要特别注意 x 与 $-x$ 的范围，然后将它代入相应段的函数表达式中， $f(x)$ 与 $f(-x)$ 对应不同的表达式，而它们的结果按奇偶函数的定义进行比较。

4、与函数奇偶性有关的常见问题及解题策略

(1) 已知函数的奇偶性求函数值

利用奇偶性的定义求函数的值，这是奇偶性定义的逆用，注意利用常见函数（如一次函数、反比例函数、二次函数）具有奇偶性的条件求解。

注：已知 $f(x) = \text{奇函数} + M$ ， $x \in [-a, a]$ ，则

$$(1) f(-x) + f(x) = 2M$$

$$(2) f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = 2M$$

(2) 已知函数的奇偶性求解析式

利用奇偶性求函数的解析式，已知函数奇偶性及其在某区间上的解析式，求该函数在整个定义域上的解析式的方法是：首先设出未知区间上的自变量，利用奇、偶函数的定义域关于原点对称的特点，把它转化到已知的区间上，代入已知的解析式，然后再次利用函数的奇偶性求解即可。

(3) 已知函数的奇偶性，求函数解析式中参数的值

①若表示定义域的区间含有参数，则可利用对称性列出关于参数的方程。

②一般化策略：对 x 取定义域内的任一个值，利用 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系式恒成立来确定参数的值。

(4) 应用奇偶性画图象和判断函数单调性

①如果一个函数是奇函数，则这个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形；反之，如果一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数。如果一个函数是偶函数，则这个函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形；反之，如果一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数是偶函数。

②根据奇、偶函数的图象特征，可以得到：

奇函数在关于原点对称的区间上有相同的单调性，偶函数在关于原点对称的区间上有相反的单调性。上述结论可简记为“奇同偶异”。偶函数在关于原点对称的区间上有相同的最大（小）值，取最值时的自变量互为相反数；奇函数在关于原点对称的区间上的最值互为相反数，取最值时的自变量也互为相反数。

(5) 利用函数的奇偶性求最值

①奇函数的性质：如果函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的奇函数，则 $f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = 0$

②偶函数的性质：如果函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的偶函数，则函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的最值等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, 0]$ （或 $[0, b]$ ）上的最值。

(6) 奇偶性与对称性的综合运用在函数性质探讨中至关重要。技巧与方法包括：

定义法：直接利用奇偶性定义及对称性定义来判断。

图象法：通过绘制函数图像，观察图像是否关于原点或 y 轴对称来判断奇偶性和对称性。

性质法：利用奇偶性、对称性的性质进行推导，如奇 $\pm$ 奇=奇，偶 $\pm$ 偶=偶，以及函数图像的轴对称和中心对称性质。

结合法：在解题时，常将奇偶性与单调性、周期性结合使用，通过性质转换和变量替换简化问题。

5、常见函数的奇偶性及增减性

(1) 幂函数 $y = x^n = \begin{cases} \text{奇函数 (n是奇数)} \\ \text{偶函数 (n是偶数)} \end{cases}$ 非零常数可看成偶函数

(2) $y = a^x + a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是偶函数

(如 $f(x) = e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x}$ 偶 先减后增 $f(x) = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x}$ 偶 先减后增)

(3) $y = a^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数 (或 $y = a^{-x} - a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$))

(如 $f(x) = e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x}$ 奇 增 $f(x) = 2^x - 2^{-x} = 2^x - \frac{1}{2^x}$ 奇 增)

(4) $y = \frac{a^x \pm a^{-x}}{a^x \mp a^{-x}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数

(5) $y = \frac{a^x \pm 1}{a^x \mp 1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数

(如 $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1}$ 奇 减 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = 1 + \frac{2}{2^x - 1}$ 奇 减

$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ 奇 增 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 奇 增)

(6) $y = \log_a \frac{1 \pm x}{1 \mp x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数

(7) $y = \log_a(\sqrt{x^2+1} \pm x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数

(如 $y = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ 奇 增 $y = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 奇 减 $y = x \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 偶 增)

(8) $y = \log_a \frac{b+x}{b-x}$ ($b \neq 0$) 与 $y = \log_a(\sqrt{(nx)^2+1} - nx)$ ($n \neq 0$) 都是奇函数

(如: $f(x) = \lg \frac{1-2x}{1+2x} = \lg(-1 - \frac{2}{1+2x})$ 奇 增 $f(x) = \lg \frac{1+2x}{1-2x} = \lg(-1 + \frac{2}{1-2x})$ 奇 增)

(9) $y = \ln(\text{任意偶函数})$ 偶函数值域 > 0 还是偶函数 单调性与内层偶函数相同

(如 $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ 偶函数 先减后增 $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$ 偶函数 先减后增

$f(x) = \ln(e^{-2x} + 1) + x$ 偶函数 先增后减 $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x$ 偶函数 先减后增

$f(x) = x \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x^2$ 奇函数 增函数 $f(x) = x \ln(e^{2x} + 1) - x^2$ 奇函数 增函数)

(10) $y = f(|x|)$ 与 $y = f(x^{2n})$ ($n \in \mathbb{Z}$) 都是偶函数

(11) $y = \sin(kx)$ ($k \neq 0$) 是奇函数; $y = \cos(kx)$ ($k \neq 0$) 是偶函数; $y = \tan(kx)$ ($k \neq 0$) 是奇函数

(12) $y = f(x) + f(-x)$ 为偶函数; $y = f(x) - f(-x)$ 是奇函数。



考点精析

题型 1 函数奇偶性的定义及判断

【例 1】判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = -|x|$;

(2) $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$;

(3) $f(x) = \frac{x}{x-1}$;

(4) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称,

又 $f(-x) = -|-x| = -|x| = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为偶函数.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{-1, 1\}$, 关于原点对称, 且 $f(x) = 0$,

又 $f(-x) = -f(x)$, $f(-x) = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(3) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 不关于原点对称,

$\therefore f(x)$ 是非奇非偶函数.

(4) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

$\therefore \forall x \in \{x | x \neq 0\}$, 都有 $-x \in \{x | x \neq 0\}$,

且 $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

【变式 1】 下列函数中的奇函数是 ()

A. $y = 3x^2$

B. $y = \pi x^3 - 5x$

C. $y = |x|$

D. $y = \frac{x(x-1)}{x-1}$

【分析】 根据题意, 结合函数的奇偶性的定义和判定方法, 即可求解.

【解析】 对于 A 中, 函数 $f(x) = 3x^2$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$,

所以函数 $f(x) = 3x^2$ 为偶函数, 不符合题意;

对于 B 中, 函数 $f(x) = \pi x^3 - 5x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

且 $f(-x) = \pi(-x)^3 - 5(-x) = -(\pi x^3 - 5x) = -f(x)$, 所以函数为奇函数, 符合题意;

对于 C 中, 函数 $f(x) = |x|$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$,

所以函数 $f(x) = |x|$ 为偶函数, 不符合题意;

对于 D 中, 函数 $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-1} = x (x \neq 1)$, 所以函数 $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-1}$ 为非奇非偶函数, 不符合题意.

故选: B.

【变式 2】 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ 的奇偶性为

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 即奇又偶函数

D. 非奇非偶函数

【答案】 A

【解析】按照判定函数奇偶性的步骤，先求函数的定义域，并判断是否关于原点对称，求 $f(-x)$ ，与 $f(x)$ 对比，即可得出结论.

【详解】 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, 2]$,

$$f(-x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{-x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

故选:A.

【点睛】本题考查函数奇偶性的判定，不要忘记定义域满足的条件，属于基础题.

【变式 3】若函数 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ，则以下函数为奇函数的是 ()

- A. $f(x-1)-2$ B. $f(x-1)+2$ C. $f(x+1)+2$ D. $f(x+1)-2$

【答案】A

【分析】判断函数为奇函数，一是定义域必须关于原点对称，二是满足 $f(-x) = -f(x)$ ，然后分别检验各个函数即可. 对选项 A，均满足；对选项 B，不满足 $f(-x) = -f(x)$ ；对选项 C 和 D，均不满足定义域必须关于原点对称.

【详解】对选项 A， $f(x-1)-2 = \frac{2x-3}{x}-2 = -\frac{3}{x}$ ，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，且满足 $f(-x) = -f(x)$ ，函数 $f(x-1)-2$ 为奇函数，故选项 A 正确；

对选项 B， $f(x-1)+2 = -\frac{3}{x}+4$ ，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，但不满足 $f(-x) = -f(x)$ ，函数 $f(x-1)+2$ 不是奇函数，故选项 B 错误；

对选项 C， $f(x+1)+2 = \frac{2x+1}{x+2}+2$ ，定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ ，故 $f(x+1)+2$ 不是奇函数，故选项 C 错误；

对选项 D， $f(x+1)-2 = \frac{2x+1}{x+2}-2$ ，定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ ，故 $f(x+1)-2$ 不是奇函数，故选项 D 错误；

故选：A

【变式 4】【多选】已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，则下列函数中为偶函数的是 ()

A. $y = f(|x|)$ B. $y = f(x^2)$ C. $y = x \cdot f(x)$ D. $y = f(x) + x$

【答案】ABC

【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，又因为 $f(|-x|) = f(|x|)$ ，所以 $y = f(|x|)$ 是偶函数；故 A 是偶函数；

令 $F(x) = f(x^2)$ ，则 $F(-x) = f(x^2) = F(x)$ ，所以 $F(x)$ 是偶函数，故 B 是偶函数；

令 $M(x) = x \cdot f(x)$ ，则 $M(-x) = -x \cdot f(-x) = x \cdot f(x) = M(x)$ ，所以 $M(x)$ 是偶函数，故 C 是偶函数；

令 $N(x) = f(x) + x$ ，则 $N(-x) = f(-x) - x = -f(x) - x = -[f(x) + x] = -N(x)$ ，所以 $N(x)$ 是奇函数，故 D 是奇函数。

故选：ABC.

【变式 5】下列函数中，既是奇函数又是增函数的为（ ）

A. $y = x|x|$ B. $y = -x^3$ C. $y = x + 1$ D. $y = \frac{1}{x}$

【答案】A

【分析】根据奇函数和增函数的定义逐一判断即可.

【详解】A：设 $f(x) = x|x|$ ，显然该函数的定义域为全体实数，

因为 $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$ ，

所以该函数是奇函数，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = x|x| = x^2$ ，显然此时该函数是增函数，

又因为该函数是实数集上的奇函数，所以该函数是实数集上的增函数，

因此本选项函数符合题意；

B：设 $g(x) = -x^3$ ，该函数是定义域为全体非零实数集，

因为 $g(-1) = 1, g(1) = -1$ ，所以该函数一定不是增函数，

因此本选项函数不符合题意；

C：该函数定义域为全体实数，因为当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ，所以该函数不是奇函数，

因此本选项函数不符合题意；

D：设 $h(x) = \frac{1}{x}$ ，该函数是定义域为全体非零实数集，

因为 $h(1)=1, h(2)=\frac{1}{2}$ ，所以该函数一定不是增函数，

因此本选项函数不符合题意，

故选：A

【变式 6】 下列函数中，既是奇函数，又在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数的是 ()

- A. $y = |x|$ B. $y = x^3$ C. $y = x^2$ D. $y = -3x$

【分析】 利用基本初等函数的奇偶性和单调性逐项判断，可得出合适的选项.

【解析】 对于 A 选项，设 $f(x) = |x|$ ，该函数的定义域为 R ， $f(-x) = |-x| = f(x)$ ，

所以，函数 $y = |x|$ 为偶函数，且当 $x > 0$ 时， $y = x$ ，即函数 $y = |x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，A 不满足要求；

对于 B 选项，函数 $y = x^3$ 为奇函数，且该函数在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，B 不满足要求；

对于 C 选项，函数 $y = x^2$ 为偶函数，且该函数在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，C 不满足要求；

对于 D 选项，函数 $y = -3x$ 为奇函数，且该函数在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，D 满足要求.

故选：D.

【变式 7】 函数 $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数，在公共定义域内，下列结论一定正确的是 ()

- A. $f(x) + g(x)$ 为奇函数 B. $f(x) + g(x)$ 为偶函数
C. $f(x)g(x)$ 为奇函数 D. $f(x)g(x)$ 为偶函数

【答案】 C

【分析】 依次构造函数，结合函数的奇偶性的定义判断求解即可.

【详解】 令 $F_1(x) = f(x) + g(x)$ ，则 $F_1(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) \neq -F_1(x)$ ，且 $F_1(-x) \neq F_1(x)$ ，

$\therefore F_1(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数，故 A、B 错误；

令 $F_2(x) = f(x)g(x)$ ，则 $F_2(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -F_2(x)$ ，且 $F_2(-x) \neq F_2(x)$ ，

$\therefore F_2(x)$ 是奇函数，不是偶函数，故 C 正确、D 错误；

故选：C

题型2 利用奇偶性求值

【例2】已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 + 2x$ ，则 $f(-2) =$ ()

- A. 8 B. -8 C. 0 D. 2

【答案】B

【分析】根据奇函数的性质求解即可.

【详解】解：因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上奇函数，

所以 $f(-x) = -f(x)$ ，

又因为当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 + 2x$ ，

所以 $f(-2) = -f(2) = -(2^2 + 2 \times 2) = -8$.

故选：B.

【变式1】已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ ，则 $f(\frac{3}{2})$ 的值为 () .

- A. $\frac{47}{4}$ B. $-\frac{47}{4}$ C. $\frac{23}{4}$ D. $-\frac{23}{4}$

【答案】D

【分析】由 $f(\frac{3}{2}) = -f(-\frac{3}{2})$ 即可求解.

【详解】因为函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，

$$f(\frac{3}{2}) = -f(-\frac{3}{2}) = -\left[3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 2\right] = -\frac{23}{4}$$

故选：D

【变式2】设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x + b$ ，则 $f(-1) =$ _____.

【答案】-2

【解析】 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0) = b = 0$ ，即 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x$ ，所以 $f(1) = 2$ ，从而 $f(-1) = -f(1) = -2$.

故答案为：-2.

【变式3】已知 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x^3 + 2^x + a$ ，则 $f(-2) =$ _____.

【答案】-19

【分析】由奇函数的性质可得 $f(0) = 0$ ，由此可求 a ，再由 $f(-2) = -f(2)$ ，结合所给解析式求 $f(-2)$.

【详解】因为 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，

所以 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以 $f(0) = 0$ ， $f(-2) = -f(2)$ ，

又当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x^3 + 2^x + a$ ，

所以 $1 + a = 0$ ， $f(-2) = -(2 \times 2^3 + 2^2 + a)$ ，

所以 $a = -1$ ， $f(-2) = -19$ ，

故答案为：-19.

题型 3 已知 $f(x)$ = 奇函数 + M

【例 3】已知函数 $y = f(x)$ ，其中 $f(x) = ax^4 + bx^2 + x + 6$ ，且 $f(-1) = 2023$ ，则 $f(1) =$ _____.

【答案】2025

【解析】 $f(x) = ax^4 + bx^2 + x + 6$ ，得 $ax^4 + bx^2 + 6 = f(x) - x$

构造函数 $g(x) = ax^4 + bx^2 + 6 = f(x) - x$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ 。

因为 $g(-x) = a(-x)^4 + b(-x)^2 + 6 = ax^4 + bx^2 + 6 = g(x)$ 。

所以函数 $g(x)$ 是偶函数，

所以 $g(1) = g(-1)$ ，所以 $f(1) - 1 = f(-1) - (-1)$ ，从而 $f(1) = f(-1) + 2$ ，

又 $f(-1) = 2023$ ，因此 $f(1) = 2025$ 。

故答案为：2025。

【变式 1】已知 $f(x) = -x^3 + 5x$ ，则 $f(2012) + f(-2012)$ 的值是 ()

A. 0

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【分析】先判断函数 $f(x)$ 是奇函数，再利用奇函数的性质求值。

【详解】对于函数 $f(x) = -x^3 + 5x$ ， $f(-x) = -(-x)^3 + 5(-x) = x^3 - 5x = -f(x)$ ，即是奇函数，

所以 $f(-2012) = -f(2012)$ ，则 $f(2012) + f(-2012) = 0$ 。

故选 A.

【点睛】本题考查奇函数的判断与应用，是一道基础题.

【变式 2】已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 4$ ， $f(10) = 6$ ，则 $f(-10) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】-14

【分析】根据函数的奇偶性求函数值.

【详解】设 $g(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ ，则 $f(x) = g(x) - 4$ ，且 $g(x)$ 为奇函数，即 $g(-x) = -g(x)$ 。

又 $f(10) = g(10) - 4 = 6 \Rightarrow g(10) = 10$ ；

所以 $g(-10) = -g(10) = -10$ ，

所以 $f(-10) = g(-10) - 4 = -10 - 4 = -14$ 。

故答案为：-14

【变式 3】已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 R 上的奇函数，且 $h(x) = af(x) + bg(x) + 2$ ， $h(5) = 6$ ，则 $h(-5)$ 的值为 ()

A. -2

B. -8

C. -6

D. 6

【答案】A

【分析】代入 $x = -5$ ，和 $x = 5$ ，利用奇函数的性质，两式相加求值.

【详解】 $h(5) = af(5) + bg(5) + 2$ ，① $h(-5) = af(-5) + bg(-5) + 2$ ，

$\because f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数，

$\therefore f(-5) = -f(5), g(-5) = -g(5)$

即 $h(-5) = -af(5) - bg(5) + 2$ ②

①+②可得 $h(5) + h(-5) = 4$

$h(-5) = 4 - h(5) = -2$.

故选 A.

【点睛】本题考查了奇函数的性质求值，属于基础题型.

题型 4 利用奇偶性求解析式

【例 4】已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数，且当 $x>0$ 时， $f(x)=x^2-2x+3$ ，则当 $x<0$ 时， $f(x)$ 的解析式是 ()

A. $f(x)=-x^2+2x-3$

B. $f(x)=-x^2-2x-3$

C. $f(x)=x^2-2x+3$

D. $f(x)=-x^2-2x+3$

【答案】B

【分析】首先根据 $x<0$ ， $-x>0$ ，结合题中所给的条件，求得 $f(-x)=x^2+2x+3$ ，结合奇函数的定义，得到 $f(x)=-x^2-2x-3$ ，求得结果.

【详解】若 $x<0$ ，则 $-x>0$ ，

因为当 $x>0$ 时， $f(x)=x^2-2x+3$ ，所以 $f(-x)=x^2+2x+3$ ，

因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=x^2+2x+3=-f(x)$ ，

所以 $f(x)=-x^2-2x-3$ ，

所以 $x<0$ 时， $f(x)=-x^2-2x-3$.

故选：B.

【点睛】该题考查的是有关函数的问题，涉及到的知识点有奇函数的定义，奇函数的解析式的求解，属于简单题目.

【变式 1】若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时， $f(x)=2^{-x}+1$ ，则当 $x>0$ 时， $f(x)=$ _____.

【答案】 -2^x-1

【分析】运用奇函数的定义，结合已知小于 0 的解析式，求得大于 0 的解析式即可.

【详解】由题意可得：当 $x>0$ 时，则 $-x<0$ ，

所以 $f(-x)=2^x+1$ ，

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$ ，

所以 $-f(x) = 2^x + 1$ ，即 $f(x) = -2^x - 1$ ，

所以当 $x > 0$ 时， $f(x) = -2^x - 1$ 。

故答案为： $-2^x - 1$ 。

【变式 2】 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x^2 + x$ ，则 $x > 0$ 时， $f(x)$ 的解析式为 ()

A. $f(x) = -x^2 + x$

B. $f(x) = -x^2 - x$

C. $f(x) = x^2 - x$

D. $f(x) = x^2 + x$

【分析】 根据函数的奇偶性求得正确答案。

【解析】 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，

当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ，所以 $f(x) = -f(-x) = -[(-x)^2 + (-x)] = -x^2 + x$ 。

故选：A。

【变式 3】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x - a \cdot 2^{-x}$ ，当 $x < 0$ 时， $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $2^x - 2^{-x}$

【分析】 先根据奇函数性质求 a ，然后设 $x < 0$ ，利用奇函数定义和已知条件求解可得。

【详解】 因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0) = 2^0 - a \cdot 2^0 = 0$ ，解得 $a = 1$ 。

设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，所以 $f(-x) = 2^{-x} - 2^x$ ，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x) = -f(-x) = 2^x - 2^{-x}$ ，

即当 $x < 0$ 时， $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ 。

故答案为： $2^x - 2^{-x}$

【变式 4】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $g(x) =$ ()

A. $\sqrt{x}$

B. $-\sqrt{x}$

C. $\sqrt{-x}$

D. $-\sqrt{-x}$

【答案】D

【解析】由 $x < 0$ 得 $-x > 0$ ，利用给定解析式求出 $f(-x) = \sqrt{-x}$ ，再由函数奇偶性，即可得出结果.

【详解】因为 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \geq 0 \\ g(x), x < 0 \end{cases}$,

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，所以 $f(-x) = \sqrt{-x}$ ，

又函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，

所以 $f(-x) = -f(x) = \sqrt{-x}$ ，因此 $f(x) = -\sqrt{-x} = g(x)$.

故选：D.

【变式 5】若定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$ ，则 $f(x) =$ _____.

【答案】 $x^2 + 1$

【解析】由题意 $f(-x) = f(x)$ ， $g(-x) = -g(x)$ ，

则由 $f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$

可得 $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 1$ ，即 $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 1$

由 $\begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1 \\ f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 1 \end{cases}$ ，可得 $f(x) = x^2 + 1$

故答案为： $x^2 + 1$

【变式 6】已知函数 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，且 $f(x) + g(x) = e^x$.

(1)求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式；

(2)求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的值域

【答案】(1) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ；

(2) $\left[\frac{e^2 - 1}{2e}, +\infty \right)$

【分析】(1) 利用函数奇偶性和表达式构造方程组即可求得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式；

(2) 利用指数函数单调性即可求得 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的值域.

【详解】(1) 由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的奇偶性以及 $f(x) + g(x) = e^x$ 可得：

$$f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = e^{-x},$$

两式相减可得 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，两式相加可得 $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ；

所以函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式为 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ；

(2) 由函数 $y = e^x$ 和函数 $y = -e^{-x}$ 为增函数可知，

函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增，且 x 趋近于正无穷时， y 趋近于正无穷；

所以 $f(x) \geq f(1) = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e}$ ，

故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的值域为 $\left[\frac{e^2 - 1}{2e}, +\infty\right)$.

题型 5 由函数的奇偶性求参数

【例 5】若函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 是 $[-1 + a, 2a]$ 上的偶函数，则 $a + b$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】根据偶函数的定义域的对称性得到 a 的值，进一步根据偶函数的定义和函数的解析式得到 b 的值，即得.

【详解】 $\because$ 函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 是定义在 $[-1 + a, 2a]$ 上的偶函数，

$$\therefore -1 + a + 2a = 0, \text{ 即 } a = \frac{1}{3}.$$

$$\because f(x) = f(-x),$$

$$\therefore ax^2 + bx + 1 = ax^2 - bx + 1,$$

$$\therefore b = 0,$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【变式 1】 若函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 是定义在 $[-1-a, 2a]$ 上的偶函数，则 $f(2a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1-a, 2a]$ 上的偶函数， $\therefore -1-a+2a=0$ ，即 $a=1$.

$$\because f(x) = f(-x), \therefore ax^2 + bx + 1 = ax^2 - bx + 1, \therefore b = 0,$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 1, \therefore f(2a-b) = f(2) = 5,$$

故答案为：5.

【变式 2】 函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ 是定义在 $(-\infty, b-3] \cup [b-1, +\infty)$ 上的奇函数. 若 $f(2) = 9$ ，则 $a+b$ 的值为 ()

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】 A

【分析】 由奇函数的定义域可得 b 的值，再由 $f(2) = 9$ 解出 a ，进而求出答案.

【详解】 函数 $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ 是定义在 $(-\infty, b-3] \cup [b-1, +\infty)$ 上的奇函数，则 $(b-3) + (b-1) = 0$ ，解得

$$b = 2. \text{ 又 } f(2) = 9, \text{ 则 } \frac{a \times 2^2 + 2}{2} = 9 \Rightarrow a = 4, \text{ 所以 } a + b = 6.$$

故选：A

【变式 3】 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是定义在 $[2b-5, 2b-3]$ 上的奇函数，则 $f(\frac{1}{2})$ 的值为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{9}{8}$

C. 1

D. 无法确定

【答案】 B

【详解】 由于函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是奇函数，

则 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立，解得 $a = c = 0$ ，

又是定义在 $[2b-5, 2b-3]$ 上的奇函数，

则 $[2b-5, 2b-3]$ 是关于原点对称的区间，

即 $2b-5+2b-3=0$ ，得 $b=2$ ，所以 $f(x)=x^3+2x$ ，

从而 $f(\frac{1}{2})=\frac{9}{8}$ 。

故选：B.

【变式 4】已知函数 $f(x)=ax^2+|x+a+1|$ 为偶函数，则 $a=$ _____.

【答案】-1

【解析】因为函数 $f(x)=ax^2+|x+a+1|$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ ，

即 $ax^2+|-x+a+1|=ax^2+|x+a+1|$ ，

即 $|-x+a+1|=|x+a+1|$ ，

两边平方，化简可得 $(a+1)x=0$ 。

要使上式恒成立，则 $a+1=0$ ，即 $a=-1$ 。

故答案为：-1

【变式 5】已知 $f(x)=\frac{x^2+1}{(3x+2)(x-a)}$ 为偶函数，则 $a=$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】法一：特殊值法：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$ ，

所以 $\frac{1+1}{(3 \times (-1)+2)(-1-a)}=\frac{1+1}{(3+2)(1-a)}$ ，解得 $a=\frac{2}{3}$ ，

经检验，当 $a=\frac{2}{3}$ 时， $f(x)=\frac{3x^2+3}{9x^2-4}$ 为偶函数，符合题意。

法二：定义法：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ ，

所以 $\frac{(-x)^2+1}{(-3x+2)(-x-a)}=\frac{x^2+1}{(3x+2)(x-a)}$ ，化简得 $(3a-2)x=0$ ，

所以 $3a-2=0$ ，解得 $a=\frac{2}{3}$ 。

故答案为: $\frac{2}{3}$

【变式 6】 若函数 $y = \ln(1+x) - a \ln(1-x)$ 为奇函数, 则实数 a 的值为_____.

【答案】 1

【分析】 先求出函数的定义域, 再由 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$, 代入求解即可.

【详解】 因为函数 $y = \ln(1+x) - a \ln(1-x)$ 的定义域为 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$,

解得: $-1 < x < 1$,

所以由函数 $f(x) = \ln(1+x) - a \ln(1-x)$ 为奇函数,

则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{2} - a \ln \frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - a \ln \frac{3}{2}$, 由 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$,

解得: $a = 1$.

故答案为: 1.

【变式 7】 函数 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$ 是奇函数, 则实数 a 等于 ()

A. -1 或 1

B. 1

C. -3

D. -1

【答案】 D

【分析】 根据奇函数的定义可得 $f(-x) + f(x) = 0$, 结合对数的运算比较系数可得 a 的值.

【详解】 函数 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$ 是奇函数, 则 $f(-x) + f(x) = 0$,

所以 $\lg\left(\frac{2}{1+x} + a\right) + \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right) = \lg\left[\left(\frac{2}{1+x} + a\right)\left(\frac{2}{1-x} + a\right)\right] = 0$

则 $\left(\frac{2}{1+x} + a\right)\left(\frac{2}{1-x} + a\right) = 1$, 整理得 $(a+2)^2 - a^2x^2 = 1 - x^2$

所以 $\begin{cases} (a+2)^2 = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases}$, 解得 $a = -1$.

故 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right) = \lg \frac{1+x}{1-x}$, 其定义域为 $(-1, 1)$, 满足 $f(x)$ 为奇函数

所以 $a = -1$.

故选: D.

【变式 8】 设 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1}$ 为奇函数, a 为常数.

(1) 求 a 的值;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调性并证明.

【答案】 (1) $a = -1$

(2) 增函数, 证明见解析

【分析】 (1) 利用奇函数的定义求解即可;

(2) 利用函数单调性的定义求解.

【详解】 (1) $f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+ax}{-x-1} = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{1-ax}$$

$$\therefore \frac{1+ax}{-x-1} = \frac{x-1}{1-ax}, \text{ 即 } (1+ax)(1-ax) = -(x+1)(x-1),$$

解得 $a = 1$ 或 $a = -1$,

当 $a = 1$ 时, $\frac{1-ax}{x-1} = \frac{1-x}{1+x} = -1$, 此时 $f(x)$ 无意义,

当 $a = -1$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1}$, 符合题意,

$$\therefore a = -1$$

(2) 由 (1) 知, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1}$,

任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 设 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{1+x_1}{x_1-1} - \frac{1+x_2}{x_2-1} = \frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)} > 0$,

$$\therefore \frac{1+x_1}{x_1-1} > \frac{1+x_2}{x_2-1} > 0.$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x_1}{x_1-1} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x_2}{x_2-1}, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

【变式 9】 若函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{ax^2 + 1})$ 是奇函数, 则 a 的值为_____.

【答案】1

【分析】根据奇函数的性质和对数运算法则直接计算即可.

【详解】因为函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{ax^2 + 1})$ 是奇函数,

所以 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{ax^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{ax^2 + 1}) = 0$,

即 $\ln(ax^2 + 1 - x^2) = 0$, 所以 $ax^2 + 1 - x^2 = 1$, 即 $(a-1)x^2 = 0$,

所以 $a-1=0, a=1$, 即 a 的值为1.

故答案为: 1

【变式 10】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x > 0 \\ ax^3 + b, & x < 0 \end{cases}$ 为偶函数, 则 $2^a + b =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【分析】令 $x < 0$ 时, 则 $-x > 0$, 由偶函数的定义可得出 $f(x) = f(-x)$, 可得出 a 、 b 的值, 进而可得出 $2^a + b$ 的值.

【详解】因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x > 0 \\ ax^3 + b, & x < 0 \end{cases}$ 为偶函数,

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 此时, $f(x) = f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 = ax^3 + b$,

所以, $a = -1$, $b = 1$, 故 $2^a + b = 2^{-1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

题型 6 利用函数的奇偶性求最值

【例 6】设函数 $f(x) = \frac{-x}{|x|+1} (-1 \leq x \leq 1)$, 则它的最大值与最小值的和为_____.

【答案】0

【解析】因为 $f(x) = \frac{-x}{|x|+1}$ 的定义域 $-1 \leq x \leq 1$ 关于原点对称, 且 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数, 不妨设 $f(x)_{\max} = f(a) = b$,

则 $f(x)_{\min} = f(-a) = -f(a) = -b$,

所以 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为 0.

故答案为: 0.

【变式 1】 设函数 $f(x) = \frac{x^3 + |x| + 2x^2 + x}{2x^2 + |x|}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

【答案】 2

【解析】 因为 $f(x) = \frac{x^3 + |x| + 2x^2 + x}{2x^2 + |x|} = 1 + \frac{x^3 + x}{2x^2 + |x|}$,

令 $g(x) = \frac{x^3 + x}{2x^2 + |x|}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$.

且 $g(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{2(-x)^2 + |-x|} = -\frac{x^3 + x}{2x^2 + |x|} = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数.

因为 $g(x) = f(x) - 1$, 所以 $g(x)$ 的最大值为 $M - 1$, $g(x)$ 的最小值为 $m - 1$.

所以 $M - 1 + m - 1 = 0$, 所以 $M + m = 2$.

故答案为: 2

【变式 2】 已知关于 x 函数 $f(x) = \frac{5x^3 + tx^2 + 3x + \sin x + t^2}{x^2 + t}$ 在 $[-2022, 2022]$ 上的最大值为 M , 最小值 N , 且 $M + N = 2022$, 则实数 t 的值是_____.

【答案】 1011

【分析】 先利用常数分离法化得函数 $f(x) = t + \frac{5x^3 + 3x + \sin x}{x^2 + t}$, 再构造函数 $g(x) = \frac{5x^3 + 3x + \sin x}{x^2 + t}$, 判断得 $g(x)$ 为奇函数, 从而利用奇函数的性质求解即可.

【详解】 因为 $f(x) = \frac{5x^3 + tx^2 + 3x + \sin x + t^2}{x^2 + t} = \frac{t(x^2 + t) + 5x^3 + 3x + \sin x}{x^2 + t} = t + \frac{5x^3 + 3x + \sin x}{x^2 + t}$,

$x \in [-2022, 2022]$,

令 $g(x) = \frac{5x^3 + 3x + \sin x}{x^2 + t}$, $x \in [-2022, 2022]$, 则 $f(x) = g(x) + t$,

因为 $g(x)$ 定义域关于原点对称, $g(-x) = \frac{5(-x)^3 + 3(-x) + \sin(-x)}{(-x)^2 + t} = \frac{-5x^3 - 3x - \sin x}{x^2 + t} = -g(x)$,

所以 $g(x)$ 是在 $[-2022, 2022]$ 上的奇函数,

故由奇函数的性质得 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,

所以 $M + N = f(x)_{\max} + f(x)_{\min} = g(x)_{\max} + t + g(x)_{\min} + t = 2022$,

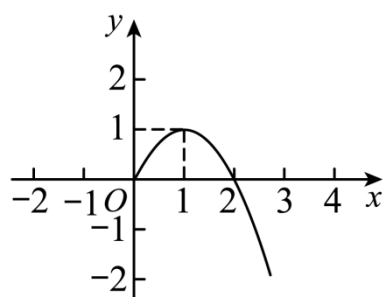
所以 $2t = 2022$, 则 $t = 1011$.

故答案为: 1011.

【点睛】关键点睛: 由于奇函数的图像关于原点对称, 所以其最大值与最小值也关于原点对称, 这一性质是解决本题的关键所在.

题型 7 应用函数的奇偶性画函数图象

【例 7】若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的图象如图所示, 则 $y = f(x)$ 的单调减区间是_____.



【答案】 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$

【分析】由图象可求出函数在 $[0, +\infty)$ 上减区间, 再由函数为奇函数可得其在 $(-\infty, 0)$ 上的减区间, 从而可答案

【详解】由图可知 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的减区间为 $[1, +\infty)$,

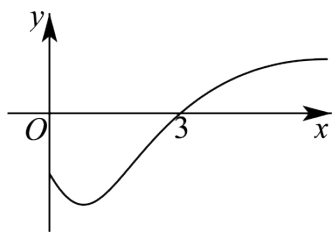
因为 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的减区间为 $(-\infty, -1]$,

所以 $y = f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$,

故答案为: $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$

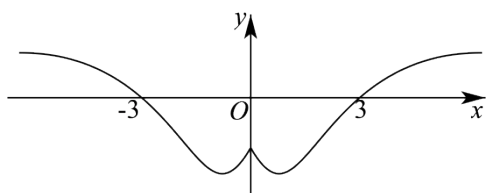
【变式 1】 已知偶函数 $f(x)$ 部分图象如图所示，且 $f(3)=0$ ，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为_____.



【答案】 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

【分析】 根据 $f(x)$ 为偶函数，可以补全 y 轴左侧的图象，再对 $x < 0$ 和 $x > 0$ 分类讨论，确定 $f(x)$ 的正负，由函数图象即可确定最后的取值范围

【详解】 根据函数部分图象和偶函数可以补全 y 轴左侧的图象，



由 $xf(x) < 0$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 结合图象可得 $0 < x < 3$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 可得 $x < -3$,

所以 $xf(x) < 0$ 的解为 $\{x | x < -3 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$.

故答案为: $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

【变式 2】 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x < 0$ 时 $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 请画出函数 $f(x)$ 的图象;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908077135071006142>