

河南灵宝市实验高中 2024 届高三第一次模拟考试数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 EF 为圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的一条直径, 点 $M(x, y)$ 的坐标满足不等式组 $\begin{cases} x-y+1 \leq 0, \\ 2x+y+3 \geq 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $\overline{ME} \cdot \overline{MF}$ 的

取值范围为 ()

- A.** $\left[\frac{9}{2}, 13\right]$ **B.** $[4, 13]$

- C.** $[4,12]$ **D.** $\left[\frac{7}{2},12\right]$

2. 已知全集 $U = Z, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{x | (x+1)(x-3) > 0, x \in Z\}$, 则集合 $A \cap (C_U B)$ 的子集个数为 ()

- A.** 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

3. 某装饰公司制作一种扇形板状装饰品, 其圆心角为 120° , 并在扇形弧上正面等距安装 7 个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个, 导线接头忽略不计), 已知扇形的半径为 30 厘米, 则连接导线最小大致需要的长度为 ()

- A. 58 厘米 B. 63 厘米 C. 69 厘米 D. 76 厘米

4. 若 $x > 0, y > 0$, 则“ $x + 2y = 2\sqrt{2xy}$ ”的一个充分不必要条件是

- A. $x = y$
- B. $x = 2y$
- C. $x = 2$ 且 $y = 1$
- D. $x = y$ 或 $y = 1$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = 2^{n+1} + \lambda$, 则 λ 的值是()

- A.** 4 **B.** 2 **C.** -2 **D.** -4

6. 若函数 $f(x) = x \ln x - ax^2$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, e)$

7. 设 F_1, F_2 分别是双线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, 以 F_1F_2 为直径的圆与该双曲线的两条渐近线

线分别交于 A, B 两点 (A, B 位于 y 轴右侧), 且四边形 $OA F_2 B$ 为菱形, 则该双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $x \pm y = 0$ B. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ C. $x \pm \sqrt{3}y = 0$ D. $3x \pm y = 0$

8. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $C_1: (x-m)^2 + (y-m-6)^2 = 2$ 与圆 $C_2: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 若 $|OA| = |OB|$, 则实数 m 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

9. 若函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M, N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $g(x) = ax - 2$ 的图象上, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(0, \frac{e}{2}\right)$ D. $(0, e)$

10. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

11. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = (2m+3)x + n$, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 记 $(2m+3)n$ 的最小值为 $f(m, n)$, 则 $f(m, n)$ 最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{e}$ C. $\frac{1}{e^2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

12. 若函数 $f(x) = (x^2 - mx + 2)e^x$ ($e = 2.71828...$ 为自然对数的底数) 在区间 $[1, 2]$ 上不是单调函数, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$ B. $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right)$ C. $\left[2, \frac{10}{3}\right]$ D. $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $PA = PB = AB = 2\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{2}$, 且二面角 $P-AB-C$ 的大小为 135° , 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为_____.

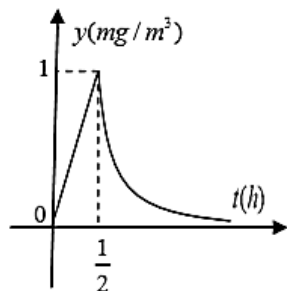
14. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $F: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右两个焦点, 过 F_1 作斜率为 1 的直线, 交 Γ 于 A, B 两点, 则

$|AF_2| + |BF_2| =$ _____

15. 为了抗击新型冠状病毒肺炎, 某医药公司研究出一种消毒剂, 据实验表明, 该药物释放量 $y (mg/m^3)$ 与时间 $t(h)$

的函数关系为 $y = \begin{cases} kt, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{kt}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ (如图所示), 实验表明, 当药物释放量 $y < 0.75 (mg/m^3)$ 对人体无害. (1)

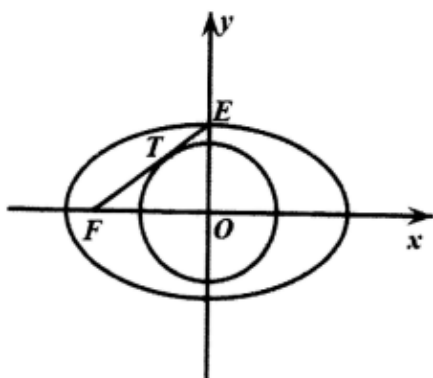
$k =$ _____; (2) 为了不使人体受到药物伤害, 若使用该消毒剂对房间进行消毒, 则在消毒后至少经过 _____ 分钟人方可进入房间.



16. 设 $a \in R$, 若函数 $y = e^x + ax, x \in R$ 有大于零的极值点, 则实数 a 的取值范围是 _____

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知点 E, F 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点和左焦点, 若 EF 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ 相切于点 T , 且点 T 是线段 EF 靠近点 E 的三等分点.



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 只有一个公共点 P , 且点 P 在第二象限, 过坐标原点 O 且与 l 垂直的直线 l' 与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 相交于 A, B 两点, 求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x-a)^2 - 2x \ln x$, 其导函数为 $f'(x)$,

(1) 若 $a = 0$, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 证明: 对任意的 $0 < s < t < 2$, 恒有 $\frac{f'(s) - f'(t)}{s - t} < 1$.

19. (12 分) 已知 $x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 证明:

$$(1) (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \geq 4;$$

$$(2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}.$$

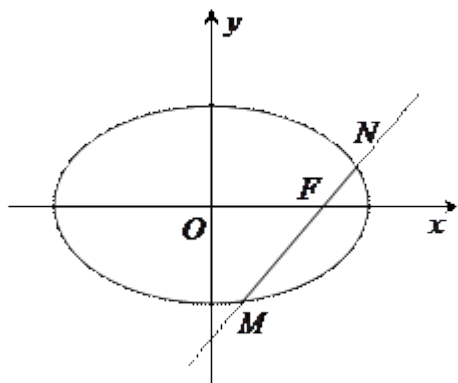
20. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(4m, 0)$

($m > 0$, m 为常数), 离心率等于 0.8, 过焦点 F 、倾斜角为 θ 的直线 l 交椭圆 C 于 M 、 N 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

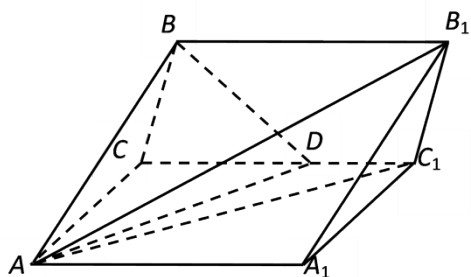
(2) 若 $\theta = 90^\circ$ 时, $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF} = \frac{5\sqrt{2}}{9}$, 求实数 m ;

(3) 试问 $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ 的值是否与 θ 的大小无关, 并证明你的结论.



21. (12分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知四边形 AA_1C_1C 为矩形, $AA_1 = 6$, $AB = AC = 4$,

$\angle BAC = \angle BAA_1 = 60^\circ$, $\angle A_1AC$ 的角平分线 AD 交 CC_1 于 D .



(1) 求证: 平面 $BAD \perp$ 平面 AA_1C_1C ;

(2) 求二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的余弦值.

22. (10分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c . 已知 $\cos 2C = -\frac{3}{4}$.

- (1) 求 $\sin C$ 的值；
- (2) 当 $c = 2a$ ，且 $b = 3\sqrt{7}$ 时，求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

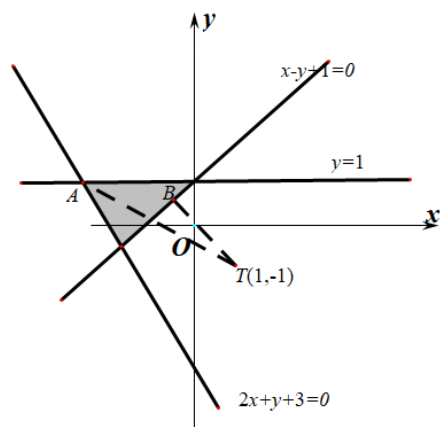
1、D

【解析】

首先将 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$ 转化为 $\overrightarrow{MT}^2 - 1$ ，只需求出 MT 的取值范围即可，而 MT 表示可行域内的点与圆心 $T(1, -1)$ 距离，数形结合即可得到答案.

【详解】

作出可行域如图所示



设圆心为 $T(1, -1)$ ，则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TE}) \cdot (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TF}) = (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TE}) \cdot (\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{TE}) = \overrightarrow{MT}^2 - \overrightarrow{TE}^2 = \overrightarrow{MT}^2 - 1$ ，

过 T 作直线 $x - y + 1 = 0$ 的垂线，垂足为 B ，显然 $MB \leq MT \leq MA$ ，又易得 $A(-2, 1)$ ，

所以 $MA = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}$ ， $TB = \frac{|1 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

故 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MT}^2 - 1 \in [\frac{7}{2}, 12]$ 。

故选：D.

【点睛】

本题考查与线性规划相关的取值范围问题，涉及到向量的线性运算、数量积、点到直线的距离等知识，考查学生转化与划归的思想，是一道中档题.

2、C

【解析】

先求 B.再求 $C_U B$ ，求得 $A \cap (C_U B)$ 则子集个数可求

【详解】

由题 $C_U B = \{x | (x+1)(x-3) \leq 0, x \in Z\} = \{x | -1 \leq x \leq 3, x \in Z\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，则集合 $A \cap (C_U B) = \{1, 2, 3\}$ ，故其子集个数为 $2^3 = 8$

故选 C

【点睛】

此题考查了交、并、补集的混合运算及子集个数，熟练掌握各自的定义是解本题的关键，是基础题

3、B

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小，可将导线的长视为扇形弧长，利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 6 等分，

所以每部分的弦长和弧长相差很小，可以用弧长近似代替弦长，

故导线长度约为 $\frac{2\pi}{3} \times 30 = 20\pi \approx 63$ (厘米).

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了扇形弧长的计算，属于容易题.

4、C

【解析】

$\because x > 0, y > 0$,

$\therefore x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$ ，当且仅当 $x = 2y$ 时取等号.

故“ $x = 2$, 且 $y = 1$ ”是“ $x + 2y = 2\sqrt{2xy}$ ”的充分不必要条件.选 C.

5、C

【解析】

利用 S_n 先求出 a_n ，然后计算出结果.

【详解】

根据题意，当 $n=1$ 时， $2S_1=2a_1=4+\lambda$ ， $\therefore a_1=\frac{4+\lambda}{2}$ ，

故当 $n \geq 2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$ ，

Q 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，

则 $a_1=1$ ，故 $\frac{4+\lambda}{2}=1$ ，

解得 $\lambda=-2$ ，

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了等比数列前 n 项和 S_n 的表达形式，只要求出数列中的项即可得到结果，较为基础.

6、A

【解析】

试题分析：由题意得 $f'(x)=\ln x+1-2ax=0$ 有两个不相等的实数根，所以 $f''(x)=\frac{1}{x}-2a=0$ 必有解，则 $a>0$ ，

且 $f'\left(\frac{1}{2a}\right)>0$ ， $\therefore 0<a<\frac{1}{2}$ 。

考点：利用导数研究函数极值点

【方法点睛】函数极值问题的常见类型及解题策略

(1) 知图判断函数极值的情况.先找导数为 0 的点，再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号.

(2) 已知函数求极值.求 $f'(x)$ → 求方程 $f'(x)=0$ 的根 → 列表检验 $f'(x)$ 在 $f'(x)=0$ 的根的附近两侧的符号 → 下结论.

(3) 已知极值求参数.若函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$ ，且在该点左、右两侧的导数值符号相反.

7、B

【解析】

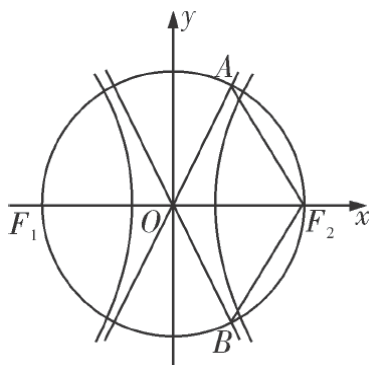
由于四边形 OAF_2B 为菱形，且 $|OF_2|=|OA|$ ，所以 $\triangle AOF_2$ 为等边三角形，从而可得渐近线的倾斜角，求出其斜率.

【详解】

如图，因为四边形 OAF_2B 为菱形， $|OF_2|=|OA|=|OB|$ ，所以 $\triangle AOF_2$ 为等边三角形， $\angle AOF_2=60^\circ$

，两渐近线的斜率分别为 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$ ．

故选：B



【点睛】

此题考查的是求双曲线的渐近线方程，利用了数形结合的思想，属于基础题．

8、D

【解析】

由 $|OA|=|OB|$ 可得，O在AB的中垂线上，结合圆的性质可知O在两个圆心的连线上，从而可求．

【详解】

因为 $|OA|=|OB|$ ，所以O在AB的中垂线上，即O在两个圆心的连线上， $O(0,0)$ ， $C_1(m, m+6)$ ， $C_2(-1, 2)$ 三点共线，所以 $\frac{m+6}{m}=-2$ ，得 $m=-2$ ，故选D．

【点睛】

本题主要考查圆的性质应用，几何性质的转化是求解的捷径．

9、D

【解析】

由题可知，可转化为曲线 $g(x)=ax-2$ 与 $y=\ln x$ 有两个公共点，可转化为方程 $ax-2=\ln x$ 有两解，构造函数

$h(x)=\frac{2+\ln x}{x}$ ，利用导数研究函数单调性，分析即得解

【详解】

函数 $f(x)=e^x$ 的图象上两点M，N关于直线 $y=x$ 的对称点在 $y=\ln x$ 上，

即曲线 $g(x)=ax-2$ 与 $y=\ln x$ 有两个公共点，

即方程 $ax-2=\ln x$ 有两解，

即 $a=\frac{2+\ln x}{x}$ 有两解，

$$\text{令 } h(x) = \frac{2 + \ln x}{x},$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2},$$

则当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) < 0$,

故 $x = \frac{1}{e}$ 时 $h(x)$ 取得极大值 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e$, 也即为最大值,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$,

所以 $0 < a < e$ 满足条件.

故选: D

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的零点, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数形结合, 数学运算的能力, 属于较难题.

10、C

【解析】

根据并集的求法直接求出结果.

【详解】

$$\because A = \{x \mid -1 < x < 2\}, B = \{x \mid x > 1\},$$

$$\therefore A \cup B = (-1, +\infty),$$

故选 C.

【点睛】

考查并集的求法, 属于基础题.

11、C

【解析】

对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 因为 $\ln x \leq (2m+3)x + n$, 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 可得 $2m+3 > 0$,

令 $y = \ln x - (2m+3)x - n$, 可得 $y' = \frac{1}{x} - (2m+3)$, 结合已知, 即可求得答案.

【详解】

Q 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立

$\therefore \ln x \leq (2m+3)x + n$, 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$\therefore 2m+3 > 0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908100067075007032>