

2025 年高考第三次模拟考试

高三数学（新高考江苏专用）·全解全析

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$ ， $B = \{x | a < x < 5\}$ ，若 $A \cup B = \{x | 2 < x < 5\}$ ，则实数 a 的取值范围为（ ）
- A. $[2, 4)$ B. $[2, 4]$ C. $[2, 5)$ D. $[2, 5]$

【答案】A

【详解】∵ $A = \{x | 2 < x < 4\}$ ， $B = \{x | a < x < 5\}$ ， $A \cup B = \{x | 2 < x < 5\}$ ，

∴ 结合数轴可知： $2 \leq a < 4$ 。

故选：A。

2. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i)=2$ ，则 $|z| =$ （ ）
- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

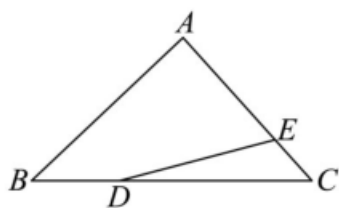
【答案】A

【详解】因为 $z(1+i)=2$ ，所以 $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$ ，

所以 $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 。

故选：A

3. 如图，已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$ ，则 $\overrightarrow{DE} =$ （ ）



- A. $\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$ B. $\frac{5}{12}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$ C. $\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\frac{5}{12}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

【答案】B

【详解】由 $\overline{BC} = 4\overline{BD}$ ，得 $\overline{DC} = \frac{3}{4}\overline{BC} = \frac{3}{4}(\overline{AC} - \overline{AB})$ ，而 $\overline{CA} = 3\overline{CE}$ ，

所以 $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE} = \frac{3}{4}(\overline{AC} - \overline{AB}) + \frac{1}{3}\overline{CA} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)\overline{AC} - \frac{3}{4}\overline{AB} = \frac{5}{12}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$ 。

故选：B

4. “体育强则中国强，国运兴则体育兴”.已知某运动员在 2024 年篮球联赛中连续 10 场的得分数据为：9，12，17，8，17，18，20，17，12，14，则这组数据的（ ）

- A. 第 85 百分位数为 18 B. 众数为 12
C. 中位数为 17 D. 平均成绩为 14

【答案】A

【详解】将得分数据按升序排列为：8，9，12，12，14，17，17，17，18，20，

对于 A：因为 $10 \times 0.85 = 8.5$ ，所以第 85 百分位数为第 9 位数，即为 18，故 A 正确；

对于 B：众数为 17，故 B 错误；

对于 C：中位数为： $\frac{14+17}{2} = 15.5$ ，故 C 错误；

对于 D：平均数 $x = \frac{1}{10}(8+9+12+12+14+17+17+17+18+20) = 14.4$ ，故 D 错误；

故答案为：A.

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 S_{n+1} ， S_n ， S_{n+2} 成等差数列，则 $\frac{a_{2025}}{a_{2024}} = ()$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】A

【详解】因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 S_{n+1} ， S_n ， S_{n+2} 成等差数列，

所以 $2S_n = S_{n+1} + S_{n+2}$ ，

设等比数列的公比为 q ，

由题意知， $q \neq 1$ ，

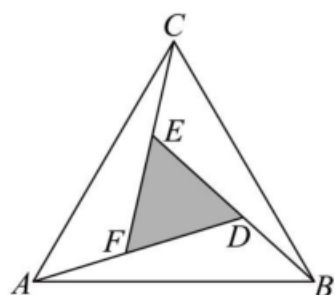
$$\text{所以 } 2 \times \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q} + \frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q},$$

化简, 得 $q^2 + q - 2 = 0$, 解得 $q = -2$ 或 $q = 1$ (舍去),

$$\text{所以 } \frac{a_{2025}}{a_{2024}} = q = -2.$$

故选: A.

6. 某同学用 3 个全等的小三角形拼成如图所示的等边 $\triangle ABC$, 已知 $EF = 2$, $\cos \angle ACF = \frac{13}{14}$, 则 $S_{\triangle ABC} = (\quad)$



A. $\frac{49}{4}$

B. $\frac{49\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{49}{2}$

D. $\frac{49\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【详解】解: 在 $\triangle AFC$ 中, $\angle AFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

又 $\cos \angle ACF = \frac{13}{14}$, 则 $\sin \angle ACF = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, 设 $AF = CE = t (t > 0)$, 则 $CF = 2 + t$,

在 $\triangle AFC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AF}{\sin \angle ACF} = \frac{AC}{\sin \angle AFC}$, 解得 $AC = \frac{7}{3}t$,

在 $\triangle AFC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AF^2 + CF^2 - 2AF \cdot CF \cdot \cos \angle AFC$,

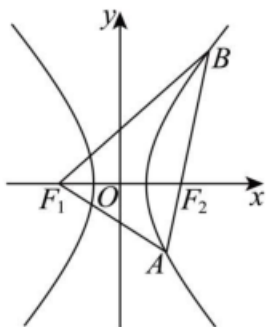
即 $\frac{49}{9}t^2 = t^2 + (2+t)^2 - 2t \cdot (2+t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, 又 $t > 0$, 解得 $t = 3$, 则 $AC = 7$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4},$$

故选: B

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两焦点分别为 F_1, F_2 , 过右焦点 F_2 作直线 l 交右支于 A、B 点, 且 $\overline{AB} = 3\overline{AF_2}$,

若 $\angle F_1AB = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()



A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{7}{3}$

【答案】D

【详解】令 $|AF_2| = t$ ，由 $\overline{AB} = 3\overline{AF_2}$ ，得 $|AB| = 3t$ ， $|BF_2| = 2t$ ，

由双曲线定义 $|AF_1| = |AF_2| + 2a = t + 2a$ ， $|BF_1| = |BF_2| + 2a = 2t + 2a$ ，

在 $\triangle ABF_1$ 中， $\angle F_1AB = \frac{\pi}{3}$ ，

由余弦定理可得 $|AF_1|^2 + |AB|^2 - 2|AF_1| \cdot |AB| \cos \angle F_1AB = |BF_1|^2$ ，

得 $(t + 2a)^2 + (3t)^2 - 2(t + 2a) \times 3t \cos \frac{\pi}{3} = (2t + 2a)^2$ ，整理得 $3t^2 - 10at = 0$ ，

解得 $t = \frac{10}{3}a$ ，所以， $|AF_1| = t + 2a = \frac{16}{3}a$ ， $|AF_2| = t = \frac{10}{3}a$ 。

在 $\triangle AF_1F_2$ 由余弦定理 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cos \angle F_1AF_2 = |F_1F_2|^2$ ，

得 $\left(\frac{16}{3}a\right)^2 + \left(\frac{10}{3}a\right)^2 - 2 \times \frac{16}{3}a \cdot \frac{10}{3}a \cos \frac{\pi}{3} = (2c)^2$ ，

整理得 $\frac{196}{9}a^2 = 4c^2$ ，则 $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$ 。

故选：D。

8. 已知函数 $f(x) = e^{-x}(\ln a + \ln x)$ ，若存在 $x > 0$ ，使得 $f(x) > \frac{1}{a}$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

B. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

C. $(0, \sqrt{e})$

D. $(e, +\infty)$

【答案】D

【详解】由题意可知， $a > 0$ ， $x > 0$ ，由 $f(x) = e^{-x}(\ln a + \ln x) > \frac{1}{a}$ ，

可得 $\ln a + \ln x > \frac{e^x}{a} = e^{x - \ln a}$ ，可得 $x + \ln x > e^{x - \ln a} + x - \ln a = e^{x - \ln a} + \ln e^{x - \ln a}$ ，

令 $g(x) = x + \ln x$ ，其中 $x > 0$ ，则 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ ，

所以, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

由 $x + \ln x > e^{x-\ln a} + \ln e^{x-\ln a}$ 可得 $g(x) > g(e^{x-\ln a})$, 则 $x > e^{x-\ln a} = \frac{e^x}{a}$, 可得 $a > \frac{e^x}{x}$,

令 $h(x) = \frac{e^x}{x}$, 其中 $x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 即函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, 即函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

所以, $a > h(x)_{\min} = h(1) = e$, 即实数 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

故选: D.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 α, β 为锐角, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha + \tan \beta = 1$, 则 ()

A. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{3}{10}$

B. $\cos(\alpha - \beta) = 1$

C. $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{4}$

D. $\tan 2(\alpha + \beta) = -\frac{24}{7}$

【答案】BCD

【详解】 α, β 为锐角, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 可得到 $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$, ①

$\tan \alpha + \tan \beta = 1$, 得 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1$, ②,

由①② $\cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{5}$, 又 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 得 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$,

则 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1$, B 正确;

$\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{4}$, C 正确;

又 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{4}{3}$, 从而

$\tan 2(\alpha + \beta) = \frac{2 \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7}$, D 正确;

由 B 知 $\cos(\alpha - \beta) = 1$, 则有 $\alpha - \beta = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, $\beta = \alpha - 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$,

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos(\alpha - 2k\pi) = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

又 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, $\sin(\alpha + \alpha - 2k\pi) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, 所以 $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{2}{5}$, 则 A 错误.

故选: BCD.

10. 已知圆台 O_1O_2 的上、下底面圆的半径分别为 $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$, 体积为 21π , MN 是该圆台的一条母线, A, B 是该圆台下底面圆周上的两个动点, 则下列说法正确的是 ()

- A. 直线 MN 与底面所成的角为 60°
- B. 该圆台侧面展开图扇环的圆心角为 π
- C. 若该圆台的上、下底面圆周均在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 36π
- D. 若 $MN \parallel$ 平面 O_1AB , 则三棱锥 $O_2 - O_1AB$ 体积的最大值为 $3\sqrt{3}$

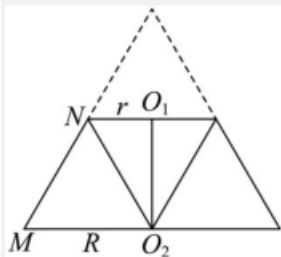
【答案】ABD

【详解】设圆台的高为 h , $r = \sqrt{3}, R = 2\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{1}{3}h(3\pi + 12\pi + \sqrt{3\pi \times 12\pi}) = 21\pi, \text{ 解得 } h = 3,$$

$$\text{可得圆台的母线长为 } MN = \sqrt{h^2 + (R - r)^2} = 2\sqrt{3},$$

将圆台补成圆锥, 可知圆锥的母线长为 $4\sqrt{3}$, 即圆锥的轴截面为等边三角形,



对于选项 A: 所以直线 MN 与底面所成的角为 60° , 故 A 正确;

对于选项 B: 该圆台侧面展开图扇环的圆心角为 $\alpha = \frac{2\pi \times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \pi$, 故 B 正确;

对于选项 C: 因为 $O_2M = O_2N = 2\sqrt{3}$,

可知该圆台的外接球的球心 O 即为 O_2 , 半径即为 $R = 2\sqrt{3}$,

所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 48\pi$, 故 C 错误;

对于选项 D: 设 $AB \cap O_2M = E$, 连接 O_1E ,



可得 $O_1E \parallel MN$ ，可知 O_1NME 为平行四边形，则 $ME = O_1N = \sqrt{3}$ ，

取 AB 的中点 F ，设 $O_2F = d$ ，则 $0 \leq d \leq O_2E = \sqrt{3}$ ，

因为 $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{12 - d^2}$,

$$\text{则 } S_{O_2AB} = \frac{1}{2} AB \cdot d = d\sqrt{12-d^2} = \sqrt{-(d^2-6)^2+36},$$

当且仅当 $d = \sqrt{3}$ 时, $S_{\triangle O,AB}$ 取到最大值 $3\sqrt{3}$,

又因为三棱锥 O_2-O_1AB 体积 $V_{O_2-O_1AB} = V_{O_1-O_2AB} \leq \frac{1}{3} \times 3 \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

所以三棱锥 $O_2 - O_1AB$ 体积的最大值为 $3\sqrt{3}$ ，故 D 正确；

故选: ABD.

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 当 $x<0$ 时, $f(x)>0$, 且 $f(1)=-2$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(0)=1$
- B. $f(x)$ 是奇函数
- C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减
- D. 不等式 $f(x-1)-f(3-2x)\leq -4$ 的解集为 $[2,+\infty)$

【答案】BCD

【详解】因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

取 $x=0, y=0$ 可得 $f(0)=f(0)+f(0)$,

所以 $f(0)=0$, A 错误;

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 定义域关于原点对称,

由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

用 $-x$ 替换 y 可得, $f(x-x)=f(x)+f(-x)$,

所以 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$, 即 $f(-x)=-f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 为奇函数, B 正确;

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1-x_2)$,

又当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 且 $x_1-x_2 < 0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2) > 0$, 故 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, C 正确;

因为 $f(1)=-2$,

所以不等式 $f(x-1)-f(3-2x) \leq -4$ 可化为 $f(x-1) \leq f(1)+f(1)+f(3-2x)$,

所以 $f(x-1) \leq f(5-2x)$, 又函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

所以 $x-1 \geq 5-2x$,

所以 $x \geq 2$, 所以不等式 $f(x-1)-f(3-2x) \leq -4$ 的解集为 $[2, +\infty)$, D 正确.

故选: BCD.

第二部分 (非选择题 共 92 分)

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \cos\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 则 ω 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【详解】 已知 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\omega > 0$, 所以 $2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}\right]$,

因为函数 $y = \cos t$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减,

而函数 $f(x) = \cos\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 所以 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6}\right] \subseteq [0, \pi]$,

由此可得不等式组 $\begin{cases} \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \pi \\ \frac{\pi}{6} \geq 0 \end{cases}$, 解得 $\omega \leq \frac{5}{4}$.

则 ω 的最大值为 $\frac{5}{4}$

故答案为: $\frac{5}{4}$.

13. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$, $C_2: x^2 = -8y$ 的焦点分别为 F_1, F_2 , 一条平行于 y 轴的直线分别与 C_1, C_2 交于 A, B 两点. 若 $|AF_1| = |BF_2|$, 则四边形 AF_1F_2B 的周长为_____.

【答案】12

【详解】设 $A(x_1, y_1)$, 则 $B(x_1, y_2)$, 将 A, B 坐标分别代入 C_1, C_2 ,

可得 $\begin{cases} x_1^2 = 4y_1 \\ x_1^2 = -8y_2 \end{cases}$, 即 $4y_1 = -8y_2$, 所以 $y_1 = -2y_2$,

由焦半径公式可得 $|AF_1| = y_1 + 1$, $|BF_2| = 2 - y_2$,

由 $|AF_1| = |BF_2|$ 可得 $y_1 + 1 = 2 - y_2$, 即 $y_1 + y_2 = 1$, 所以 $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$,

所以 $|AF_1| = |BF_2| = 3$,

又 $F_1(0, 1), F_2(0, -2)$, 则 $|F_1F_2| = 3$,

$|AB| = |y_1 - y_2| = 3$,

所以四边形 AF_1F_2B 的周长为 $|AF_1| + |BF_2| + |F_1F_2| + |AB| = 3 \times 4 = 12$.

故答案为: 12

14. 将 1, 2, 3, 4, 5, 6 随机排成一行, 前 3 个数字构成三位数 a , 后三个数字构成三位数 b . 记 $m = |a - b|$, 则 m 的最小值为_____, m 小于 100 的概率为_____.

【答案】 47 $\frac{1}{6}$

【详解】由 $m = |a - b|$ 中 a, b 的对称性, 不妨令 $a > b$, 要 m 最小,

百位必相邻， a 的百位为 4， b 的百位为 3；

对于十位， b 的十位尽可能的大，为 6， a 的十位尽可能的小，为 1；

同理 b 的个为 5， a 的个位为 2，因此 $a=412, b=365$ ，所以 m 的最小值为 47；

要 m 小于 100，百位必相邻，且较大数的十位小于较小数的十位，个位无限制，分两步：

取百位的概率为 $\frac{5}{C_6^2} = \frac{1}{3}$ ；取十位，在剩下的 4 个数字中取两数分配给 a, b 作十位，

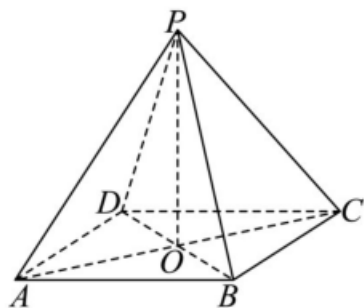
而 a 的十位大于 b 的十位与 a 的十位小于 b 的十位的概率相等，此步符合要求的概率为 $\frac{1}{2}$ ，

所以 m 小于 100 的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

底面为菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中， AC 与 BD 交于点 O ，平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$ 。



(1) 证明： $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $OA=2OD=2$ ，直线 DC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ ，求平面 PAC 与平面 PBC 夹角的余弦值。

【详解】(1) 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC \perp BD$ ，
因为平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ ， BD 为交线， $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，
所以 $AC \perp$ 平面 PBD ，
因为 $PO \subset$ 平面 PBD ，所以 $AC \perp PO$ ，
因为平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$ ， AC 为交线， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，
所以 $BD \perp$ 平面 PBD ，
因为 $PO \subset$ 平面 PBD ，所以 $BD \perp PO$ ，
因为 $AC \cap BD = O$ ， $AC, BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，
所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 由 (1) 知， AC, PO, BD 两两垂直，
以 O 为坐标原点， OA, OB, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，

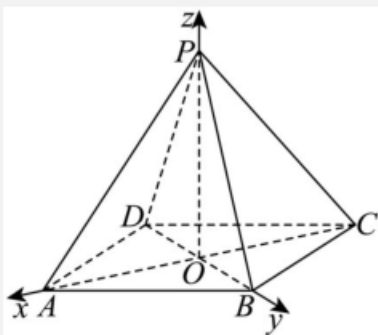
$OA=2OD=2$ ，则 $D(0,-1,0), C(-2,0,0), B(0,1,0)$ ， $\overrightarrow{DC}=(-2,1,0)$ ，

设 $P(0,0,t)$ ， $t>0$ ，则 $\overrightarrow{PB}=(0,1,-t)$ ， $\overrightarrow{CB}=(2,1,0)$ ，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$ ，

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = (x,y,z) \cdot (0,1,-t) = y-tz = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CB} = (x,y,z) \cdot (2,1,0) = 2x+y = 0 \end{cases}$$

令 $z=2$ 得 $y=2t, x=-t$ ，故 $\vec{m}=(-t, 2t, 2)$ ，



直线 DC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ ，

$$\text{即 } \left| \cos \langle \overrightarrow{DC}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{DC} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{|(-2,1,0) \cdot (-t, 2t, 2)|}{\sqrt{4+1} \times \sqrt{(-t)^2 + 4t^2 + 4}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

化简得 $t=1$ ，负值舍去，则 $\vec{m}=(-1, 2, 2)$ ，

平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$ ，

设平面 PAC 与平面 PBC 夹角为 θ ，

$$\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1, 2, 2) \cdot (0, 1, 0)|}{\sqrt{1+4+4} \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

所以平面 PAC 与平面 PBC 夹角余弦值为 $\frac{2}{3}$ 。

16. (15分)

已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ，且 a_2, a_4, a_8 成等比数列。

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)证明： $\ln a_n \leq a_n - 1$ ；

(3)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n a_{n+1}}{2}$ ，证明： $\left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \left(1 + \frac{1}{b_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) < e^2$ (e 为自然对数的底)。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908106062027007051>