

专题 5.2 平行线的性质【十大题型】

【华东师大版】

题型先知

【题型 1 平行线的判定与性质的运用（计算与证明）】	1
【题型 2 平行线的判定与性质（书写过程）】	5
【题型 3 平行线与三角尺（直角顶点在平行线上）】	10
【题型 4 平行线与三角尺（直角顶点不在平行线上）】	12
【题型 5 平行线的判定与性质综合（角度之间的数量关系）】	18
【题型 6 平行线的判定与性质综合（求定值）】	24
【题型 7 平行线的判定与性质综合（规律问题）】	35
【题型 8 平行线的性质（折叠问题）】	40
【题型 9 平行线的应用（转角问题）】	46
【题型 10 平行线的判定与性质综合（旋转）】	51

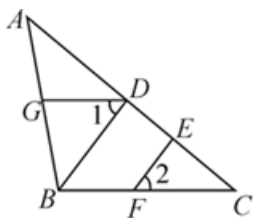
举一反三

【知识点 平行线的性质】

1. 两条平行被第三条直线所截同位角相等.简单说成两直线平行同位角相等.
2. 两条平行线被第三条直线所截内错角相等.简单说成两直线平行内错角相等.
3. 两条平行线被第三条直线所截同旁内角互补.简单说成两直线平行同旁内角互补.

【题型 1 平行线的判定与性质的运用（计算与证明）】

【例 1】（2022·西藏·林芝市广东实验中学七年级期中）如图，点 D, E 在 AC 上，点 F, G 分别在 BC, AB 上，且 $DG \parallel BC$ ， $\angle 1 = \angle 2$.



- (1) 求证： $DB \parallel EF$;
- (2) 若 $EF \perp AC$ ， $\angle 1 = 50^\circ$ ，求 $\angle ADG$ 的度数.

【答案】(1) 见解析

(2) $\angle ADG = 40^\circ$

【分析】（1）利用两直线平行，内错角相等，再根据同位角相等，两直线平行即可得证；

（2）先求出 $\angle C$ ，再根据两直线平行，同位角相等，即可得解．

（1）

证明： $\because DG \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle DBC.$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle DBC,$$

$$\therefore DB \parallel EF.$$

（2）

$$\because EF \perp AC,$$

$$\therefore \angle CEF = 90^\circ.$$

$$\because \angle 2 = \angle 1 = 50^\circ,$$

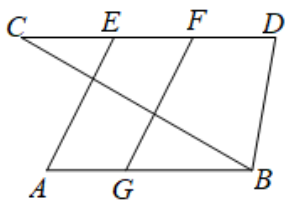
$$\therefore \angle C = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

$$\because DG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle C = 40^\circ.$$

【点睛】本题考查平行线的判定和性质．熟练掌握平行线的性质和判定是解题的关键．

【变式 1-1】（2022·湖北·五峰土家族自治县中小学教研培训中心七年级期末）已知：如图，
 $AE \perp BC, FG \perp BC$ ， $\angle CEA = \angle FGB$ ， $\angle D = \angle ABC + 50^\circ$ ， $\angle CBD = 70^\circ$ ．



(1) 求证： $AB \parallel CD$ ；

(2) 求 $\angle C$ 的度数．

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \angle C = 30^\circ$$

【分析】（1）先证明 $AE \parallel FG$ ，可得 $\angle EAB = \angle FGB$ ，再证明 $\angle CEA = \angle EAB$ ，从而可得答案；

(2) 由 $AB \parallel CD$, 可得 $\angle D + \angle CBD + \angle ABC = 180^\circ$, 再把 $\angle D = \angle ABC + 50^\circ, \angle CBD = 70^\circ$ 代入进行计算即可.

(1)

证明: $\because AE \perp BC, FG \perp BC,$

$\therefore AE \parallel GF,$

$\therefore \angle EAB = \angle FGB,$

$\because \angle CEA = \angle FGB,$

$\therefore \angle CEA = \angle EAB,$

$\therefore AB \parallel CD;$

(2)

解: 由 (1) 得, $AB \parallel CD,$

$\therefore \angle D + \angle CBD + \angle ABC = 180^\circ,$

$\because \angle D = \angle ABC + 50^\circ, \angle CBD = 70^\circ,$

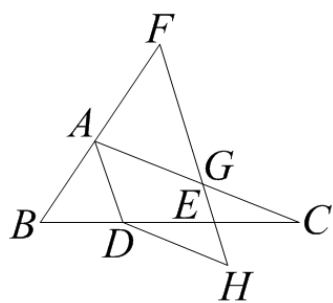
$\therefore \angle ABC + 70^\circ + \angle ABC + 50^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$

$\therefore \angle C = \angle ABC = 30^\circ.$

【点睛】本题考查的是平行线的判定与性质, 方程思想的应用, 掌握“平行线的判定与性质”是解本题的关键.

【变式 1-2】(2022·重庆·巴川初级中学校七年级期中) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D , 点 F 在 BA 的延长线上, 点 E 在线段 CD 上, EF 与 AC 相交于点 G , 且 $\angle BDA + \angle CEG = 180^\circ$.



(1) 求证: $AD \parallel EF$;

(2) 若点 H 在 FE 的延长线上, 且 $\angle EDH = \angle C$, 则 $\angle F$ 与 $\angle H$ 相等吗? 请说明理由.

【答案】(1) 见详解

(2) $\angle F = \angle H$, 说明见详解

【分析】（1）根据 $\angle BDA + \angle CEG = 180^\circ$ ， $\angle DEF + \angle CEG = 180^\circ$ ，可得 $\angle BDA = \angle DEF$ ，根据同位角相等，两直线平行可判定 $AD \parallel EF$ ；

（2）根据 $\angle EDH = \angle C$ ，可得 $DH \parallel AC$ ，继而得到 $\angle H = \angle EGC$ ，由对顶角 $\angle AGF = \angle EGC$ ，可得 $\angle H = \angle AGF$ ，由

（1） $AD \parallel EF$ 可得 $\angle DAG = \angle AGF$ ， $\angle BAD = \angle F$ ，再因为 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，有 $\angle DAG = \angle BAD$ ，即可证明 $\angle F = \angle H$ 。

（1）

证明： $\because \angle BDA + \angle CEG = 180^\circ$ ， $\angle DEF + \angle CEG = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BDA = \angle DEF$ ，

$\therefore AD \parallel EF$ 。

（2）

解： $\angle F = \angle H$ ，理由如下：

$\because \angle EDH = \angle C$ ，

$\therefore DH \parallel AC$ ，

$\therefore \angle H = \angle EGC$ ，

$\because \angle AGF = \angle EGC$ ，

$\therefore \angle H = \angle AGF$ ，

$\because AD \parallel EF$ ，

$\therefore \angle DAG = \angle AGF$ ， $\angle BAD = \angle F$ ，

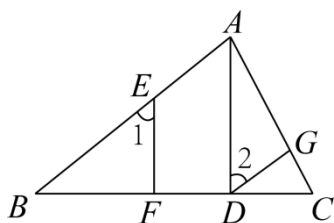
又 $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle DAG = \angle BAD$ ，

$\therefore \angle F = \angle H$ 。

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质，角平分线的定义，熟练掌握并应用平行线的判定与性质是解答本题的关键。

【变式 1-3】（2022·湖北·武汉市新洲区阳逻街第一初级中学三模）如图，已知 $AD \perp BC$ ， $EF \perp BC$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。



(1)求证: $EF \parallel AD$;

(2)求证: $\angle BAC + \angle AGD = 180^\circ$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【分析】(1) 根据垂直得出 $\angle EFB = \angle ADB = 90^\circ$, 根据平行线的判定得出 $EF \parallel AD$;

(2) 根据平行线的性质得出 $\angle 1 = \angle BAD$, 由 $\angle 1 = \angle 2$ 得出 $\angle 2 = \angle BAD$, 根据平行线的判定得出 $DG \parallel BA$, 再根据平行线的性质即可得解.

【详解】(1) 证明: $\because AD \perp BC, EF \perp BC$,

$\therefore \angle EFB = 90^\circ, \angle ADB = 90^\circ$ (垂直的定义),

$\therefore \angle EFB = \angle ADB$ (等量代换),

$\therefore EF \parallel AD$ (同位角相等, 两直线平行);

(2) 证明: $\because EF \parallel AD$,

$\therefore \angle 1 = \angle BAD$ (两直线平行, 同位角相等),

又 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),

$\therefore \angle 2 = \angle BAD$ (等量代换),

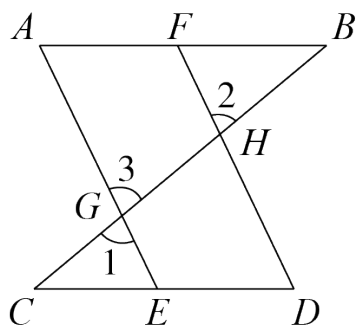
$\therefore DG \parallel BA$ (内错角相等, 两直线平行),

$\therefore \angle BAC + \angle AGD = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补).

【点睛】本题主要考查了平行线的判定与性质, 熟记平行线的判定定理与性质定理是解题的关键.

【题型2 平行线的判定与性质 (书写过程)】

【例2】(2022·黑龙江·哈尔滨市风华中学校七年级期中) 如图, $\angle 1 = \angle 2, \angle A = \angle D$.



求证: $\angle B = \angle C$. (请把下面证明过程补充完整)

证明: $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知)

又 $\because \angle 1 = \angle 3$ (_____)

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}$$

$$\therefore AE \parallel FD \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}$$

$$\therefore \angle A = \angle \underline{\hspace{1cm}} \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}$$

$$\because \angle A = \angle D \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle D = \angle BFD \text{ (等量代换)}$$

$$\therefore \underline{\hspace{1cm}} \parallel CD \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}$$

$$\therefore \angle B = \angle C \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}$$

【答案】对顶角相等；等量代换；内错角相等，两直线平行； BFD ；两直线平行，内错角相等； AB ；内错角相等，两直线平行；两直线平行，内错角相等。

【分析】先利用对顶角的性质证明 $\angle 2 = \angle 3$ ，再证明 $AE \parallel FD$ ，可证明 $\angle A = \angle BFD$ ，可得 $\angle D = \angle BFD$ ，再证明 $AB \parallel CD$ ，从而可得答案。

【详解】证明： $\because \angle 1 = \angle 2$ （已知）

又 $\because \angle 1 = \angle 3$ （对顶角相等）

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 \text{ (等量代换)}$$

$$\therefore AE \parallel FD \text{ (内错角相等，两直线平行)}$$

$$\therefore \angle A = \angle BFD \text{ (两直线平行，内错角相等)}$$

$$\because \angle A = \angle D \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle D = \angle BFD \text{ (等量代换)}$$

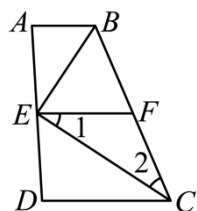
$$\therefore AB \parallel CD \text{ (内错角相等，两直线平行)}$$

$$\therefore \angle B = \angle C \text{ (两直线平行，内错角相等)}$$

【点睛】本题考查的是对顶角的性质，平行线的判定与性质，熟练的利用平行线的判定与性质进行证明是解本题的关键。

【变式 2-1】（2022·黑龙江·哈尔滨市萧红中学校七年级阶段练习）阅读并完成下面的证明过程：

已知：如图， $AB \parallel EF$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， BE 、 CE 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ ，求证： $BE \perp CE$ 。



证明： $\because BE$ 、 CE 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 。

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2}\angle BCD \text{ (角平分线定义)}$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ECD \text{ ()}$$

$$\therefore EF \parallel CD \text{ ()}$$

$$\text{又} \because AB \parallel EF \text{ (已知)}$$

$$\therefore \underline{\hspace{2cm}} \text{ ()}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ \text{ ()}$$

$$\therefore \angle ABE + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because AB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BEF \text{ ()}$$

$$\therefore \angle BEF + \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp CE \text{ ()}$$

【答案】 $\angle ECD$ ；等量代换；内错角相等，两直线平行； $AB \parallel CD$ ；如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；两直线平行，同旁内角互补；两直线平行，内错角相等；垂直定义.

【分析】根据平行线的性质、平行线的判定以及垂直的定义进行分析即可解答.

【详解】证明： $\because BE$ 、 CE 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$.

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle 2 = \angle ECD = \frac{1}{2}\angle BCD \text{ (角平分线定义)}$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ECD \text{ (等量代换)}$$

$$\therefore EF \parallel CD \text{ (内错角相等，两直线平行)}$$

$$\text{又} \because AB \parallel EF \text{ (已知)}$$

$$\therefore AB \parallel CD \text{ (如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行)}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ \text{ (两直线平行，同旁内角互补)}$$

$$\therefore \angle ABE + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = 90^\circ,$$

又 $\because AB \parallel EF$,

$\therefore \angle ABE = \angle BEF$ (两直线平行, 内错角相等)

$\therefore \angle BEF + \angle 1 = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore BE \perp CE$ (垂直定义) .

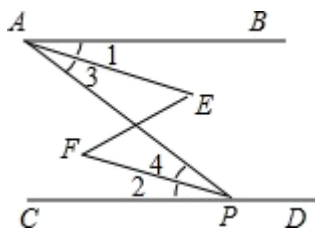
故答案为: $\angle ECD$; 等量代换; 内错角相等, 两直线平行; $AB \parallel CD$; 如果两条直线都与第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行; 两直线平行, 同旁内角互补; 两直线平行, 内错角相等; 垂直定义.

【点睛】本题主要考查了平行线的判定与性质、垂直的定义等知识点, 灵活运用平行线的判定与性质是解答本题的关键.

【变式 2-2】(2022·湖南·株洲景炎学校七年级期中) 完成下面证明过程并写出推理根据:

已知: 如图所示, $\angle BAP$ 与 $\angle APD$ 互补, $\angle 1 = \angle 2$.

求证: $\angle E = \angle F$.



证明: $\because \angle BAP$ 与 $\angle APD$ 互补 (已知),

即 $\angle BAP + \angle APD = 180^\circ$,

$\therefore$ _____ $\parallel$ _____ (_____),

$\therefore \angle BAP = \angle APC$ (_____).

又 $\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle BAP - \angle 1 = \angle APC - \angle 2$ (等式的性质),

即 $\angle 3 = \angle 4$,

$\therefore$ _____ $\parallel$ _____ (_____),

$\therefore \angle E = \angle F$ (_____).

【答案】 AB ; CD ; 同旁内角互补, 两直线平行; 两直线平行, 内错角相等; AE ; FP ; 内错角相等, 两直线平行; 两直线平行, 内错角相等

【分析】根据平行线的判定与性质, 结合图形完成填空即可求解.

【详解】 $\because \angle BAP$ 与 $\angle APD$ 互补 (已知),

即 $\angle BAP + \angle APD = 180^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$ (同旁内角互补, 两直线平行),

$\therefore \angle BAP = \angle APC$ (两直线平行, 内错角相等).

又 $\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle BAP - \angle 1 = \angle APC - \angle 2$ (等式的性质),

即 $\angle 3 = \angle 4$,

$\therefore AE \parallel FP$ (内错角相等, 两直线平行),

$\therefore \angle E = \angle F$ (两直线平行, 内错角相等)

故答案为: AB ; CD ; 同旁内角互补, 两直线平行; 两直线平行, 内错角相等; AE ; FP ; 内错角相等, 两直线平行; 两直线平行, 内错角相等.

【点睛】本题考查了平行线的性质与判定进行证明, 掌握平行线的性质与判定是解题的关键.

【变式 2-3】(2022·重庆·巴川初级中学学校七年级期中) 推理填空: 完成下面的证明过程.

如图, 已知 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle B = \angle DEF$, 求证: $DE \parallel BC$

证明: $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (_____)

$\angle 2 = \angle 3$ (_____)

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

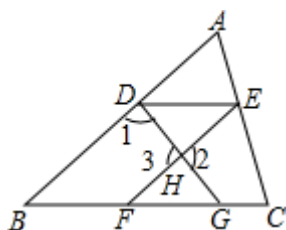
$\therefore$ _____ $\parallel$ _____ (_____)

$\therefore \angle B =$ _____ (_____)

$\because \angle B = \angle DEF$ (已知)

$\therefore \angle DEF =$ _____ (_____)

$\therefore DE \parallel BC$ (_____)



【答案】已知; 对顶角相等; AB ; EF ; 同旁内角互补, 两直线平行; $\angle EFC$; 两直线平行, 同位角相等; $\angle EFC$; 等量代换; 内错角相等, 两直线平行

【分析】由于 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 2 = \angle 3$, 则 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, 根据同旁内角互补, 两直线平行得到 $AB \parallel EF$, 则利用平行线的性质得 $\angle B = \angle CFE$, 由于 $\angle B = \angle DEF$, 所以 $\angle DEF = \angle CFE$, 于是根据平行线的判定得到 $DE \parallel$

BC .

【详解】证明： $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ （已知）

$\angle 2 = \angle 3$ （对顶角相等）

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore AB \parallel EF$ （同旁内角互补，两直线平行）

$\therefore \angle B = \angle EFC$ （两直线平行，同位角相等）

$\because \angle B = \angle DEF$ （已知）

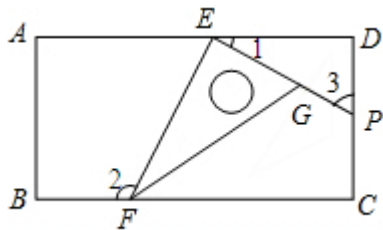
$\therefore \angle DEF = \angle EFC$ （等量代换）

$\therefore DE \parallel BC$ （内错角相等，两直线平行）

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质：内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行；两直线平行，同位角相等．掌握平行线的判定与性质是解题的关键．

【题型3 平行线与三角尺（直角顶点在平行线上）】

【例3】（2022·辽宁·阜新实验中学七年级期末）如图，含有 30° 角的直角三角板的两个顶点 E 、 F 放在一个长方形的对边上，点 E 为直角顶点， $\angle EFG = 30^\circ$ ，延长 EG 交 CD 于点 P ，如果 $\angle 3 = 65^\circ$ ，那么 $\angle 2$ 的度数是（ ）



A. 100°

B. 105°

C. 115°

D. 120°

【答案】C

【分析】根据直角三角形两锐角互余得到 $\angle 1 = 25^\circ$ ，根据平角的定义得到 $\angle AEF = 90^\circ - \angle 1 = 65^\circ$ ，根据平行线的性质即可得到结论．

【详解】解： $\because \angle D = 90^\circ$ ， $\angle 3 = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 25^\circ$ ，

$\because \angle FEG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEF = 90^\circ - \angle 1 = 65^\circ$ ，

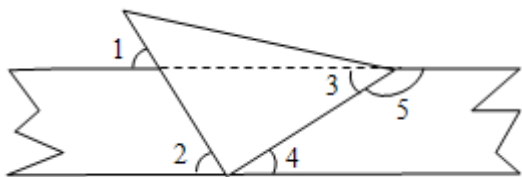
$\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle AEF = 115^\circ,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了直角三角形两锐角互余和平行线的性质，关键是得出 $\angle AEF$ 与 $\angle 2$ 互补.

【变式 3-1】（2022·浙江·金华市第四中学九年级阶段练习）将一直角三角板与两边平行的纸条如图所示放置，下列结论：（1） $\angle 1 = \angle 2$ ；（2） $\angle 3 = \angle 2$ ；（3） $\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ ；（4） $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ ，其中正确的个数是（ ）



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【分析】根据两直线平行同位角相等，内错角相等，同旁内角互补，及直角三角板的特殊性解答.

【详解】解： $\because$ 纸条的两边平行，

$\therefore$ （1） $\angle 1 = \angle 2$ （两直线平行，同位角相等）；

（2） $\angle 3 = \angle 4$ （两直线平行，内错角相等）；

（4） $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ （两直线平行，同旁内角互补）均正确；

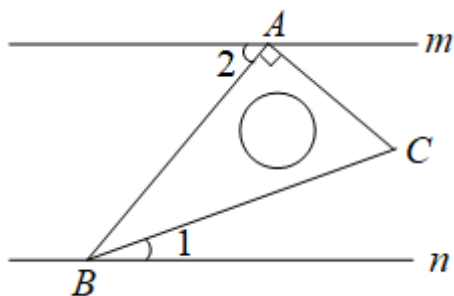
又 $\because$ 直角三角板与纸条下线相交的角为 90° ，

$\therefore$ （3） $\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ ，正确.

故选：D.

【点睛】本题考查平行线的性质，正确识别“三线八角”中的同位角、内错角、同旁内角是正确答题的关键.

【变式 3-2】（2022·山东青岛·七年级期中）将一块直角三角板 ABC 按如图方式放置，其中 $\angle ABC = 30^\circ$ ， A, B 两点分别落在直线 m, n 上， $\angle 1 = 20^\circ$ ，添加下列哪一个条件可使直线 $m \parallel n$ （ ）



A. $\angle 2 = 20^\circ$

B. $\angle 2 = 30^\circ$

C. $\angle 2 = 45^\circ$

D. $\angle 2 = 50^\circ$

【答案】D

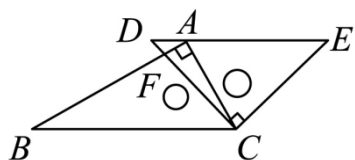
【分析】根据平行线的判定定理求解即可.

【详解】解：由平行线的判定可知，当 $\angle 2 = \angle ABC + \angle 1$ 时， $m \parallel n$ ，
即 $\angle 2 = \angle ABC + \angle 1 = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了平行线的判定，熟练掌握平行线的判定定理是解题的关键.

【变式 3-3】（2022·河南南阳·二模）小明把一副三角板按如图所示方式摆放，直角边 CD 与直角边 AB 相交于点 F ，斜边 $DE \parallel BC$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ，则 $\angle CFB$ 的度数是（ ）



A. 95°

B. 115°

C. 105°

D. 125°

【答案】C

【分析】根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle D = 45^\circ$ ，再由平行线的性质得出 $\angle BCF = 45^\circ$ ，再由三角形的内角和定理进行求解即可.

【详解】 $\because \triangle CDE$ 是直角三角形， $\angle E = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle D = 45^\circ$ ，

$\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BCF = \angle D = 45^\circ$ ，

$\because \angle B + \angle BCF + \angle BFC = 180^\circ, \angle B = 30^\circ$ ，

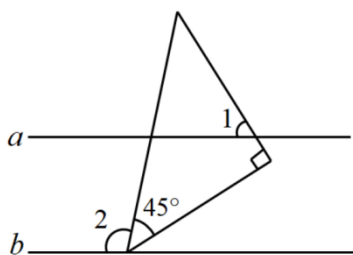
$\therefore \angle CFB = 105^\circ$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了等腰直角三角形的性质，平行线的性质及三角形的内角和定理，熟练掌握知识点是解题的关键.

【题型 4 平行线与三角尺（直角顶点不在平行线上）】

【例 4】（2022·全国·八年级专题练习）如图， $a \parallel b$ ，一块含 45° 的直角三角板的一个顶点落在直线 b 上，若 $\angle 1 = 58^\circ 54'$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）



A. $103^{\circ}6'$

B. $104^{\circ}6'$

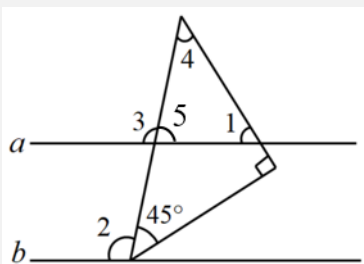
C. $103^{\circ}54'$

D. $104^{\circ}54'$

【答案】C

【分析】设 $\angle 2$ 的同位角为 $\angle 3$ ， $\angle 3$ 的邻补角为 $\angle 5$ ，三角板的一个锐角为 $\angle 4$ ，根据等腰三角板的特点可求出 $\angle 4$ ，根据三角形内角和即可求出 $\angle 5$ ，再根据平角的性质即可求出 $\angle 3$ ，进而根据两直线平行同位角相等即可求出 $\angle 2$ 。

【详解】设 $\angle 2$ 的同位角为 $\angle 3$ ， $\angle 3$ 的邻补角为 $\angle 5$ ，三角板的一个锐角为 $\angle 4$ ，如图，



$\because$ 直角三角板含一个 45° 的锐角，

$\therefore$ 该三角板为等腰三角形，

$\therefore \angle 4 = 45^{\circ}$ ，

$\because \angle 1 = 58^{\circ}54'$ ，

又 $\because$ 在三角形中有 $\angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = 180^{\circ}$ ，

$\therefore \angle 5 = 180^{\circ} - (\angle 1 + \angle 4) = 180^{\circ} - (58^{\circ}54' + 45^{\circ}) = 180^{\circ} - 103^{\circ}54' = 76^{\circ}6'$ ，

$\because \angle 3 + \angle 5 = 180^{\circ}$ ，

$\therefore \angle 3 = 180^{\circ} - \angle 5 = 180^{\circ} - 76^{\circ}6' = 103^{\circ}54'$ ，

$\because a \parallel b$ ，

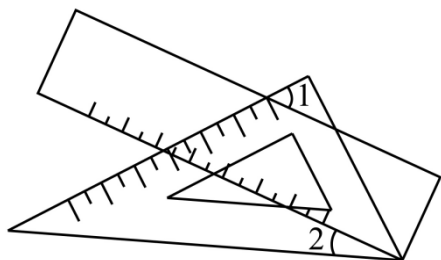
$\therefore \angle 2 = \angle 3$ ，

$\therefore \angle 2 = 103^{\circ}54'$ ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质以及三角形的内角和等知识，掌握两直线平行同位角相等是解答本题的关键。

【变式 4-1】（2022·山西晋中·七年级期末）用一块含 60° 角的直角三角板和一把直尺按图中所示的方式放置，其中直尺的直角顶点与三角板的 60° 角顶点重合，直尺两边分别与三角板的两条直角边相交，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）



- A. 25° B. 22.5° C. 20° D. 15°

【答案】C

【分析】如图，根据题意得到 $\angle C = 90^\circ$ ， $AB \parallel DE$ ， $\angle CDF = 60^\circ$ ．先根据三角形内角和求出 $\angle ABC = 40^\circ$ ，再根据平行的性质求出 $\angle CDE = 40^\circ$ ，即可求出 $\angle 2 = 20^\circ$ ．

【详解】解：如图，由题意得 $\angle C = 90^\circ$ ， $AB \parallel DE$ ， $\angle CDF = 60^\circ$ ．

$$\because \angle C = 90^\circ, \angle 1 = 50^\circ,$$

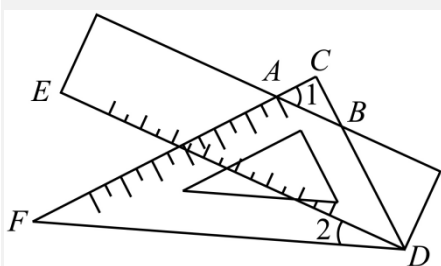
$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle C - \angle 1 = 40^\circ,$$

$$\because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CBA = 40^\circ,$$

$$\because \angle CDF = 60^\circ$$

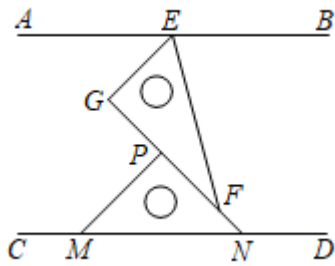
$$\therefore \angle 2 = \angle CDF - \angle CDE = 20^\circ.$$



故选：C

【点睛】本题考查了三角形的内角和定理，平行线的性质，熟知两个定理并理解题意得到已知条件是解题的关键．

【变式 4-2】（2022·福建·莆田市城厢区南门学校七年级阶段练习）如图， $AB \parallel CD$ ，将一副直角三角板作如下摆放， $\angle GEF = 60^\circ$ ， $\angle MNP = 45^\circ$ ．下列结论：① $GE \parallel MP$ ；② $\angle EFN = 150^\circ$ ；③ $\angle BEF = 75^\circ$ ；④ $\angle AEG = \angle PMN$ ．其中正确的是_____．



【答案】①②③④

【分析】①由题意得 $\angle G = \angle MPN = \angle MPG = 90^\circ$ ，利用内错角相等，两直线平行即可判定 $GE \parallel MP$ ；②由题意得 $\angle EFG = 30^\circ$ ，利用邻补角即可求出 $\angle EFN$ 的度数；③过点 F 作 $FH \perp AB$ ，可得 $FH \parallel CD$ ，从而得到 $\angle HFN = \angle MNP = 45^\circ$ ，可求得 $\angle EFN = 105^\circ$ ，再利用平行线的性质即可求出 $\angle BEF$ ；④利用角的计算可求出 $\angle AEG = 45^\circ$ ，从而可判断.

【详解】解：① $\because \angle G = \angle MPN = \angle MPG = 90^\circ$,

$\therefore GE \parallel MP$,

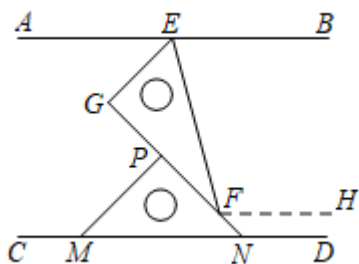
故①正确；

② $\because \angle EFG = 30^\circ$,

$\therefore \angle EFN = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$,

故②正确；

③过点 F 作 $FH \parallel AB$ ，如图，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore FH \parallel CD$,

$\therefore \angle HFN = \angle MNP = 45^\circ$,

$\therefore \angle EFN = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ$,

$\because FH \parallel AB$,

$\therefore \angle BEF = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$;

故③正确；

④ $\because \angle GEF = 60^\circ, \angle BEF = 75^\circ,$

$\therefore \angle AEG = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ,$

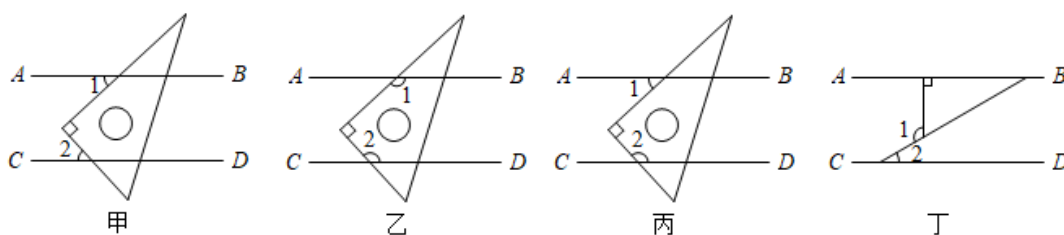
$\therefore \angle AEG = \angle PMN = 45^\circ,$

故④正确.

故答案为: ①②③④.

【点睛】本题考查平行线的性质与判定，解题的关键是熟记平行线的判定条件与性质并灵活运用.

【变式 4-3】（2022·山东淄博·期末）如图所示，将一直角三角板放在 AB, CD 两条平行线之间：



(1)图甲中，容易求得 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，请直接写出图乙中 $\angle 1, \angle 2$ 的数量关系；

(2)请问图丙中 $\angle 1, \angle 2$ 的数量关系是什么？并加以说明；

(3)请直接写出图丁中 $\angle 1, \angle 2$ 的数量关系.

【答案】(1) $\angle 1 + \angle 2 = 270^\circ$

(2) $\angle 2 - \angle 1 = 90^\circ$ ；见解析

(3) $\angle 1 = \angle 2 + 90^\circ$

【分析】（1）过三角板的直角顶点作 AB 的平行线 MN ，得 $AB \parallel MN \parallel CD$ ．根据两直线平行，同旁内角互补，即可得 $\angle 1, \angle 2$ 的关系．

（2）过三角板的直角顶点作 AB 的平行线 MN ，得 $AB \parallel MN \parallel CD$ ．根据两直线平行，内错角相等，平角互补，即可得 $\angle 1, \angle 2$ 的关系．

（3）过点 O 作 AB 的平行线 MN ，得 $AB \parallel MN \parallel CD$ ，据两直线平行，内错角相等，即可得 $\angle 1, \angle 2$ 的关系．

（1）

如图，过三角板的直角顶点作 AB 的平行线 MN ，得 $AB \parallel MN \parallel CD$

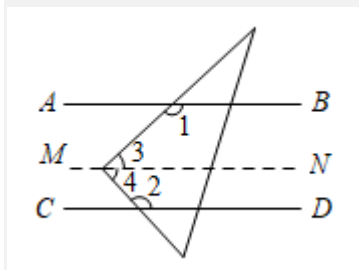
$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ, \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

又 $\because \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ + 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 270^\circ.$$



(2)

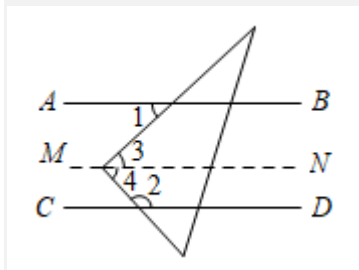
如图，过三角板的直角顶点作 AB 的平行线 MN ，得 $AB \parallel MN \parallel CD$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3, \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\text{又} \because \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + 180^\circ - \angle 2 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 2 - \angle 1 = 90^\circ.$$



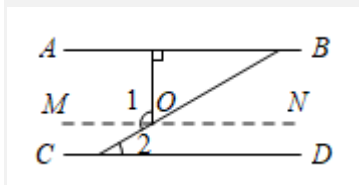
(3)

如图，过点 O 作 AB 的平行线 MN ，得 $AB \parallel MN \parallel CD$

$$\therefore \angle MOC = \angle 2$$

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ + \angle MOC$$

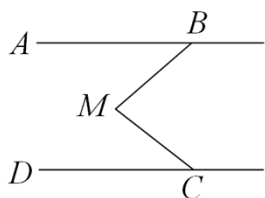
$$\therefore \angle 1 = 90^\circ + \angle 2.$$



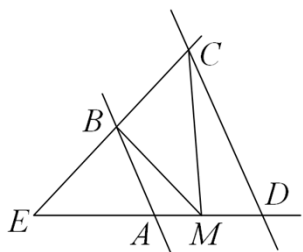
【点睛】本题考查平行线的性质，解题的关键是掌握两直线平行，内错角相等，同旁内角互补；平角互补.

【题型5 平行线的判定与性质综合（角度之间的数量关系）】

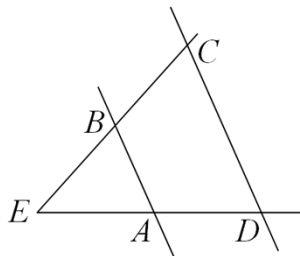
【例5】（2022·黑龙江鹤岗·七年级期末）如图①， $AB \parallel CD$ ， M 为平面内一点，若 $BM \perp MC$ ，则易证 $\angle ABM$ 与 $\angle DCM$ 互余。



图①



图②



备用图

(1)如图②， $AB \parallel CD$ ．点 M 在射线 EA 上运动，猜想点 M 在点 A 和 D 之间时， $\angle BMC$ 与 $\angle ABM$ 、 $\angle DCM$ 之间的数量关系，并证明．

(2)在(1)的条件下，当点 M 在射线 EA 的其它位置上时（不与点 E ， A ， D 重合）请直接写出 $\angle BMC$ 与 $\angle ABM$ 、 $\angle DCM$ 之间的数量关系．

【答案】(1) $\angle ABM + \angle DCM = \angle BMC$ ，理由见解析

(2) $\angle BMC = \angle DCM - \angle ABM$ 或 $\angle BMC = \angle ABM - \angle DCM$ ．

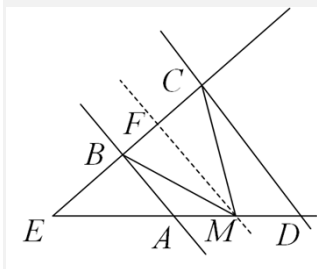
【分析】(1)过 M 作 $MF \parallel AB$ ，交 BC 于 F ，根据平行线的性质可得 $\angle DCM = \angle FMC$ ，可得
 $\angle ABM + \angle DCM = \angle BMF + \angle CMF = \angle BMC$ ；

(2)分两种情况：当点 M 在 E 、 A 两点之间时；当点 M 在 AD 的延长线上时；进行讨论可求 $\angle BMC$ 与 $\angle ABM$ ， $\angle DCM$ 的数量关系．

(1)

解： $\angle ABM + \angle DCM = \angle BMC$ ，理由如下：

如图，过 M 作 $MF \parallel AB$ ，交 BC 于 F ，则 $\angle ABM = \angle BMF$ ，



又 $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore MF \parallel CD,$$

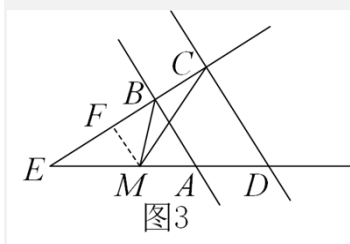
$$\therefore \angle DCM = \angle FMC,$$

$$\therefore \angle ABM + \angle DCM = \angle BMF + \angle CMF = \angle BMC;$$

(2)

解：当点 M 在 E 、 A 两点之间时，如图 3， $\angle BMC = \angle DCM - \angle ABM$ ；

过 M 作 $MF \parallel AB$ ，交 EC 于 F ，则 $\angle ABM = \angle BMF$ ，



$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

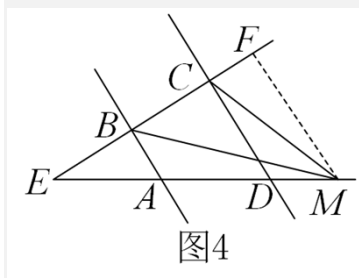
$$\therefore MF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DCM = \angle FMC,$$

$$\therefore \angle BMC = \angle CMF - \angle BMF = \angle DCM - \angle ABM;$$

当点 M 在 AD 的延长线上时，如图 4， $\angle BMC = \angle ABM - \angle DCM$ 。

过 M 作 $MF \parallel AB$ ，交 EC 于 F ，则 $\angle ABM = \angle BMF$ ，



$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore MF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DCM = \angle FMC,$$

$$\therefore \angle BMC = \angle BMF - \angle CMF = \angle ABM - \angle DCM.$$

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，关键是构建平行线，利用平行线的性质进行解答。解题时注意分类思想的运用。

【变式 5-1】（2022·辽宁·兴城市第二初级中学七年级阶段练习）已知，点 A ，点 B 分别在线段 MN ， PQ 上，且 $\angle ACB - \angle MAC = \angle CBP$ 。

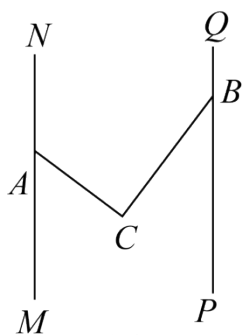


图1

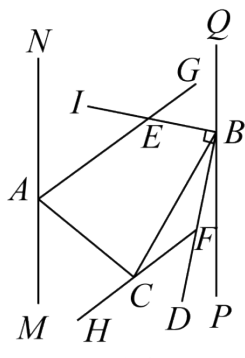


图2

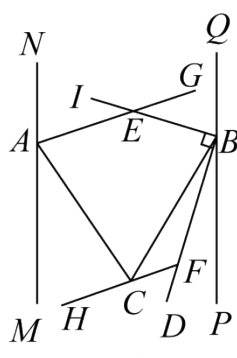


图3

(1)如图 1，求证： $MN \parallel PQ$ ；

(2)分别过点 A 和点 C 作直线 AG 、 CH 使 $AG \parallel CH$ ，以点 B 为顶点的直角 $\angle DBI$ 的两边分别与直线 CH ， AG 交于点 F 和点 E ，如图 2，试判断 $\angle CFB$ 、 $\angle BEG$ 之间的数量关系，并证明；

(3)在 (2) 的条件下，若 BD 和 AE 恰好分别平分 $\angle CBP$ 和 $\angle CAN$ ，并且 $\angle ACB = 80^\circ$ ，求 $\angle CFB$ 的度数。（直接写出答案）

【答案】(1)见解析

(2) $\angle CFB - \angle BEG = 90^\circ$ ，证明见解析

(3) $\angle CFB = 130^\circ$

【分析】(1) 过 C 作 $CE \parallel MN$ ，根据平行线的判定和性质即可得到结论；

(2) 过 B 作 $BR \parallel AG$ ，根据平行线的性质得到 $\angle BEG = \angle EBR$ ， $\angle RBF + \angle CFB = 180^\circ$ ，等量代换即可得到结论；

(3) 过 E 作 $ES \parallel MN$ ，根据平行线的性质得到 $\angle NAE = \angle AES$ ， $\angle QBE = \angle BES$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle NAE = \angle EAC$ ， $\angle CBD = \angle DBP$ ，根据四边形的内角和即可得到结论。

(1)

解：如图，过 C 作 $CE \parallel MN$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle MAC,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle ACB - \angle 1,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle ACB - \angle MAC,$$

$$\therefore \angle ACB - \angle MAC = \angle CBP,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle CBP,$$

$$\therefore CE \parallel PQ,$$

$$\therefore MN \parallel PQ;$$

(2)

如图，过 B 作 $BR \parallel AG$,

$$\because AG \parallel CH,$$

$$\therefore BR \parallel HF,$$

$$\therefore \angle BEG = \angle EBR, \quad \angle RBF + \angle CFB = 180^\circ,$$

$$\because \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG = \angle EBR = 90^\circ - \angle RBF,$$

$$\therefore \angle BEG = 90^\circ - \angle RBF = 90^\circ - (180^\circ - \angle CFB),$$

$$\therefore \angle CFB - \angle BEG = 90^\circ;$$

(3)

如图，过 E 作 $ES \parallel MN$,

$$\because MN \parallel PQ,$$

$$\therefore ES \parallel PQ,$$

$$\therefore \angle NAE = \angle AES, \quad \angle QBE = \angle BES,$$

$$\because BD \text{ 和 } AE \text{ 分别平分 } \angle CBP \text{ 和 } \angle CAN,$$

$$\therefore \angle NAE = \angle EAC, \quad \angle CBD = \angle DBP,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle AES,$$

$$\because \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBQ + \angle PBD = \angle EBC + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QBE = \angle EBC,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle BES,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AES + \angle BES = \angle CAE + \angle EBC = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle ACB),$$

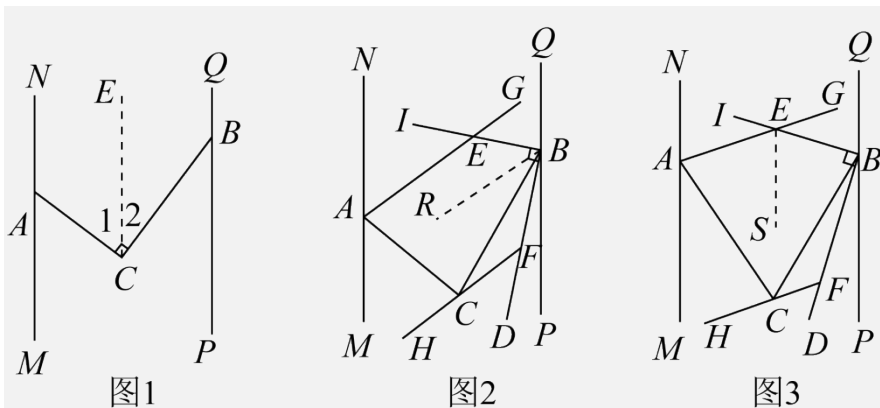
$$\because \angle ACB = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG = 40^\circ,$$

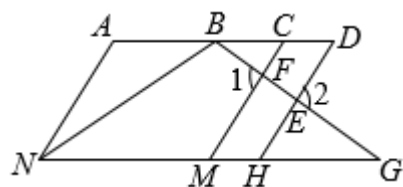
$$\because \angle CFB - \angle BEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CFB = 130^\circ.$$



【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，余角的性质，四边形的内角和，正确的作出辅助线是解题的关键。

【变式 5-2】（2022·湖北·宜昌市第九中学七年级期中）如图， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle D = \angle CMG$ 。



(1) 求证： $AD \parallel NG$ ；

(2) 若 $\angle A + \angle DHG = 180^\circ$ ，试探索： $\angle ANB$ ， $\angle NBG$ ， $\angle 1$ 的数量关系；

(3) 在（2）的条件下，若 $\angle ANB : \angle BNG = 2 : 1$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle NBG = 130^\circ$ ，求 $\angle A$ 的度数。

【答案】(1) 见解析

(2) $\angle NBG + \angle 1 - \angle ANB = 180^\circ$

(3) $\angle A = 105^\circ$

【分析】（1）由 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 = \angle GFC$ ，得到 $\angle 2 = \angle CFG$ ，于是得到 $CM \parallel DE$ ，根据平行线的性质得到 $\angle D = \angle ACM$ ，等量代换得到 $\angle CMG = \angle ACM$ ，于是得到结论。

（2）过 B 作 $BP \parallel AN$ 交 NG 于 P ，由于 $AD \parallel NG$ ，于是得到 $\angle D = \angle DHG$ ，等量代换得到 $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ，得到 $AN \parallel DH$ ，根据平行线的判定得到 $BP \parallel CM$ ，由平行线的性质得到 $\angle PBG + \angle 1 = 180^\circ$ ，等量代换即可得到结论；

（3）由 $\angle 1 + \angle PBG = 180^\circ$ ， $\angle 1 = 100^\circ$ ，得到 $\angle PBG = 80^\circ$ ，由于 $\angle NBG = 130^\circ$ ，于是得到 $\angle ANB = \angle NBP = 50^\circ$ ，根据已知条件得到 $\angle ANB : \angle BNG = 2 : 1$ ，即可得到结论。

（1）

证明： $\because \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 = \angle GFC$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle CFG$ ，

$$\therefore CM \parallel DE,$$

$$\therefore \angle D = \angle ACM,$$

$$\because \angle D = \angle CMG,$$

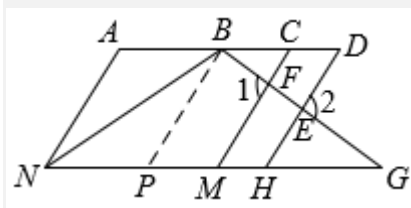
$$\therefore \angle CMG = \angle ACM,$$

$$\therefore AD \parallel NG;$$

(2)

$$\text{解: } \angle NBG - \angle ANB + \angle 1 = 180^\circ;$$

理由如下: 过 B 作 $BP \parallel AN$ 交 NG 于 P ,



$$\therefore \angle ANB = \angle NBP,$$

$$\because AD \parallel NG,$$

$$\therefore \angle D = \angle DHG,$$

$$\because \angle A + \angle DHG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore AN \parallel DH,$$

$$\text{又} \because CM \parallel DH,$$

$$\therefore BP \parallel CM,$$

$$\therefore \angle PBG + \angle 1 = 180^\circ,$$

$$\because \angle PBG = \angle NBG - \angle NBP = \angle NBG - \angle ANB,$$

$$\therefore \angle NBG - \angle ANB + \angle 1 = 180^\circ;$$

(3)

$$\text{解: } \because \angle 1 + \angle PBG = 180^\circ, \angle 1 = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle PBG = 80^\circ,$$

$$\because \angle NBG = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle ANB = \angle NBP = 50^\circ,$$

$$\because \angle ANB : \angle BNG = 2 : 1,$$

$$\therefore \angle BNP = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle ANG = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 105^\circ.$$

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，对顶角的性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

【变式 5-3】（2022·湖北·潜江市高石碑镇第一初级中学七年级期中）如图 1， $AB \parallel CD$ ，直线 AE 分别交 AB 、 CD 于点 A 、 E ，点 F 是直线 AE 上一点，连结 BF ， BP 平分 $\angle ABF$ ， EP 平分 $\angle AEC$ ， BP 与 EP 交于点 P .

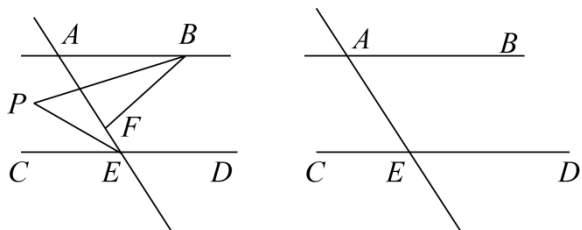


图 1

备用图

(1) 若点 F 是线段 AE 上一点，且 $BF \perp AE$ ，求 $\angle P$ 的度数；

(2) 若点 F 是直线 AE 上一动点(点 F 与点 A 不重合)，请写出 $\angle P$ 与 $\angle AFB$ 之间的数量关系并证明.

【答案】(1) 45°

(2) 当 F 点在 A 点上方时， $\angle BPE = \frac{1}{2}\angle AFB$ ，当 F 点在 A 点下方时， $\angle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AFB$

【分析】(1) 过点 P 作 $PQ \parallel AB$ ，过点 F 作 $FH \parallel AB$ ，由平行线的性质得 $\angle ABP + \angle CEP = \angle BPE$ ， $\angle ABF + \angle CEF = \angle BFE$ ，再由垂直定义和角平分线定义求得结果；

(2) 分三种情况：点 F 在 EA 的延长线上时，点 F 在线段 AE 上时，点 F 在 AE 的延长线上时，分别进行探究便可.

(1)

解：过点 P 作 $PQ \parallel AB$ ，过点 F 作 $FH \parallel AB$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel PQ \parallel FH$ ，

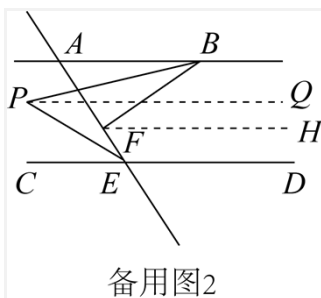
$\therefore \angle ABP = \angle BPQ$ ， $\angle CEP = \angle EPQ$ ， $\angle ABF = \angle BFH$ ， $\angle CEF = \angle EFH$ ，

$\therefore \angle ABP + \angle CEP = \angle BPQ + \angle EPQ = \angle BPE$ ， $\angle ABF + \angle CEF = \angle BFH + \angle EFH = \angle BFE$ ，

$\because BF \perp AE$ ，

$\therefore \angle ABF + \angle CEF = \angle BFE = 90^\circ$ ，

$\because BP$ 平分 $\angle ABF$ ， EP 平分 $\angle AEC$ ，



过点 P 作 $PQ \parallel AB$ ，过点 F 作 $FH \parallel AB$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel PQ \parallel FH$ ，

$\therefore \angle ABP = \angle BPQ$ ， $\angle CEP = \angle EPQ$ ， $\angle ABF = \angle BFH$ ， $\angle CEF = \angle EFH$ ，

$\therefore \angle ABP + \angle CEP = \angle BPQ + \angle EPQ = \angle BPE$ ， $\angle ABF + \angle CEF = \angle BFH + \angle EFH = \angle BFE$ ，

$\because BP$ 平分 $\angle ABF$ ， EP 平分 $\angle AEC$ ，

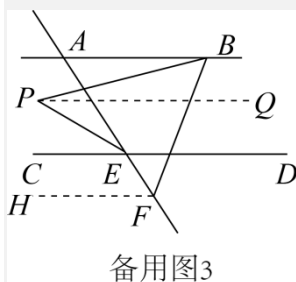
$\therefore \angle ABP + \angle CEP = \frac{1}{2} (\angle ABF + \angle CEF)$ ，

$\therefore \angle BPE = \frac{1}{2} \angle BFE$

$\therefore \angle BFE = 180^\circ - \angle AFB$ ，

$\therefore \angle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AFB$ ；

③当点 F 在 AE 的延长线上时， $\angle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AFB$ ，理由如下：如备用图 3，



过点 P 作 $PQ \parallel AB$ ，过点 F 作 $FH \parallel AB$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel PQ \parallel FH$ ，

$\therefore \angle ABP = \angle BPQ$ ， $\angle CEP = \angle EPQ$ ， $180^\circ - \angle ABF = \angle BFH$ ， $\angle AEC = \angle EFH$ ，

$\therefore \angle CEP + \angle ABP = \angle EPQ + \angle BPQ = \angle BPE$ ， $\angle BFH - \angle EFH = 180^\circ - \angle ABF - \angle AEC = \angle AFB$ ，

$\because BP$ 平分 $\angle ABF$ ， EP 平分 $\angle AEC$ ，

$\therefore \angle CEP + \angle ABP = \frac{1}{2} (\angle AEC + \angle ABF) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AFB)$ ，

$$\therefore \angle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AFB;$$

综上，当 E 点在 A 点上方时， $\angle BPE = \frac{1}{2} \angle AFB$ ，当 E 点在 A 点下方时， $\angle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AFB$ 。

【点睛】此题考查平行线的性质：两直线平行内错角相等，两直线平行同位角相等，两直线平行同旁内角互补，以及角平分线的性质，在相交线问题中通常作平行线利用平行线的性质解答，将角度转化由此求出答案。解题中运用分类思想解决问题。

【题型 6 平行线的判定与性质综合（求定值）】

【例 6】（2022·湖南·株洲二中七年级期末）实验证明，平面镜反射光线的规律是：射到平面镜上的光线和被反射出的光线与平面镜所夹的锐角相等。如图 1，一束光线 m 射到平面镜 a 上，被 a 反射后的光线为 n ，则入射光线 m 、反射光线 n 与平面镜 a 所夹的锐角 $\angle 1 = \angle 2$ 。

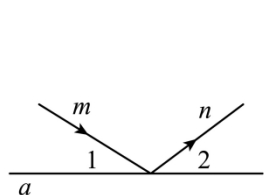


图1

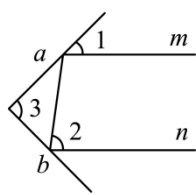


图2

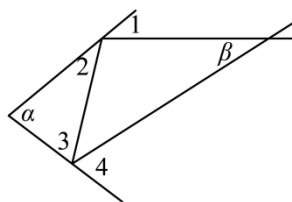


图3

(1)如图 2，一束光线 m 射到平面镜 a 上，被 a 反射到平面镜 b 上，又被 b 反射。若被 b 反射出的光线 n 与光线 m 平行，且 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

(2)请你猜想：当射到平面镜 a 上的光线 m ，经过平面镜 a 、 b 的两次反射后，入射光线 m 与反射光线 n 平行时，两平面镜 a 、 b 间的夹角 $\angle 3$ 的大小是否为定值？若是定值，请求出 $\angle 3$ ，若不是定值，请说明理由。

(3)如图 3，两面镜子的夹角为 α° ($0 < \alpha < 90$)，进入光线与离开光线的夹角为 β° ($0 < \beta < 90$)。试探索 α 与 β 的数量关系，并说明理由。

【答案】(1)100；90；

(2)90°

(3) $2\alpha + \beta = 180^\circ$

【分析】（1）根据平面镜反射光线的规律得 $\angle 1 = \angle 4 = 50^\circ$ ，再利用平角的定义得 $\angle 5 = 80^\circ$ ，然后利用平行线的性质计算出 $\angle 2 = 100^\circ$ ，则 $\angle 6 = 40^\circ$ ，再利用三角形内角和定理计算 $\angle 3$ ；

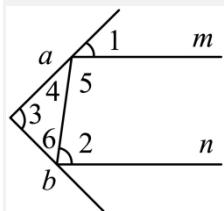
（2）当 $\angle 3 = 90^\circ$ 时，根据三角形内角和定理得 $\angle 4 + \angle 6 = 90^\circ$ ，则 $2\angle 4 + 2\angle 6 = 180^\circ$ ，利用平角的定义得到 $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ ，然后根据平行线的判定得到 $m \parallel n$ ；

（3）由（1）可得， $\angle 5 = 180^\circ - 2\angle 2$ ， $\angle 6 = 180^\circ - 2\angle 3$ ，再根据 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \alpha$ ，即可得出 $\angle \beta = 180^\circ - \angle 5 - \angle 6 = 2$

$$(\angle 2 + \angle 3) - 180^\circ = 2(180^\circ - \angle \alpha) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle \alpha.$$

(1)

解：如图：



$$\because \angle 1 = \angle 4 = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ,$$

$$\because m \parallel n$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle 6 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2) = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 4 - \angle 6 = 90^\circ;$$

故答案为：100，90；

(2)

当 $\angle 3 = 90^\circ$ 时， $m \parallel n$

理由如下：

$$\because \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\therefore 2\angle 4 + 2\angle 6 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ,$$

$$\therefore m \parallel n;$$

(3)

解：如图 3，

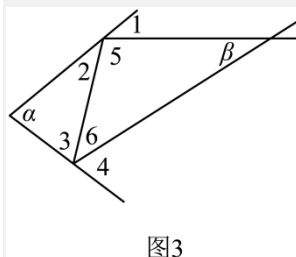


图3

由(1)可得, $\angle 5 = 180^\circ - 2\angle 2$, $\angle 6 = 180^\circ - 2\angle 3$,

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \angle \alpha$,

$\therefore \angle \beta = 180^\circ - \angle 5 - \angle 6 = 2(\angle 2 + \angle 3) - 180^\circ = 2(180^\circ - \angle \alpha) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle \alpha$,

$\therefore \alpha$ 与 β 的数量关系为: $2\alpha + \beta = 180^\circ$,

故答案为: $2\alpha + \beta = 180^\circ$.

【点睛】本题考查了平行线的判定与性质以及三角形内角和定理, 解题时注意: 同旁内角互补, 两直线平行; 两直线平行, 同旁内角互补.

【变式 6-1】(2022·河北保定·七年级阶段练习) 如图, 直线 $AB \parallel CD$, 点 M, N 分别在直线 AB, CD 上, H 为直线 CD 下方一点.

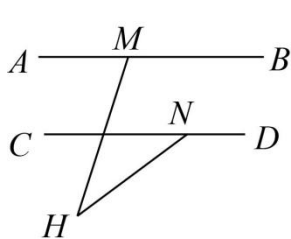


图1

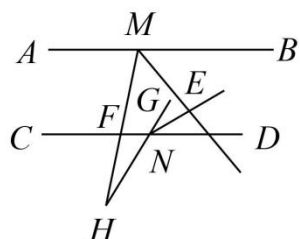


图2

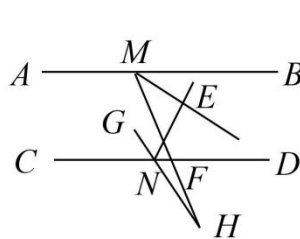


图3

(1) 如图 1, MH 和 NH 相交于点 H , 求证: $\angle MHN = \angle AMH - \angle CNH$. (温馨提示: 可过点 H 作 AB 的平行线)

(2) 延长 HN 至点 G , $\angle BMH$ 的平分线 ME 和 $\angle GND$ 的平分线 NE 相交于点 E , HM 与 CD 相交于点 F .

① 如图 2, 若 $\angle BME = 50^\circ$, $\angle END = 30^\circ$, 求 $\angle MHN$ 的度数;

② 如图 2, 当点 F 在点 N 左侧时, 若 $\angle BME$ 的度数为 x° , $\angle END$ 的度数为 y° , 且 $x + y$ 的值是一个定值, 请问 $\angle MHN$ 的度数是否会随 x 的变化而发生改变? 若不变, 求出 $\angle MHN$ 的度数; 若变化, 请说明理由.

③ 如图 3, 当点 N 在点 F 左侧时, ② 中其他条件不变, 请问 $\angle MHN$ 的度数是否会随 x 的变化而发生改变? 若不变, 直接写出 $\angle MHN$ 的度数; 若变化, 请说明理由.

【答案】(1) 见解析

(2) ① 20° ; ② 不变, $180^\circ - 2(x^\circ + y^\circ)$; ③ 不变, $2(x^\circ + y^\circ) - 180^\circ$

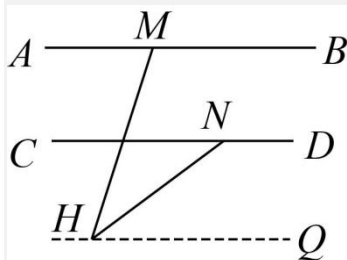
【分析】(1) 过点 H 作 $HQ \parallel AB$. 可得 $HQ \parallel CD$, 从而得到 $\angle AMH = \angle MHQ$, $\angle CNH = \angle NHQ$, 即可求证;

(2) ① 根据 $\angle BME = 50^\circ$, $\angle END = 30^\circ$, 可得 $\angle BMH = 100^\circ$, $\angle GND = 60^\circ$, 从而得到 $\angle AMH = 180^\circ - \angle BMH = 80^\circ$, $\angle CNH = 60^\circ$. 再由 $\angle MHN = \angle AMH - \angle CNH$, 即可求解; ② 根据题意可得 $\angle AMH = 180^\circ - 2x^\circ$, $\angle CNH = 2y^\circ$, 再由 $\angle MHN = \angle AMH - \angle CNH$, 即可求解; ③ 过点 H 作 $OH \parallel AB$, 根据平行线的性质, 可证得 $\angle MHN = \angle OHM - \angle OHN = \angle BMH - \angle DNH$. 从而得到

$\angle MHN = 2x^\circ + 2y^\circ - 180^\circ = 2(x^\circ + y^\circ) - 180^\circ$ ，即可求解.

(1)

证明：如图，过点 H 作 $HQ \parallel AB$.



$\because HQ \parallel AB$ 且 $AB \parallel CD$,

$\therefore HQ \parallel CD$,

$\therefore \angle AMH = \angle MHQ, \angle CNH = \angle NHQ$,

$\therefore \angle MHN = \angle MHQ - \angle NHQ = \angle AMH - \angle CNH$;

(2)

解：① ME 平分 $\angle BMH$, $\angle BME = 50^\circ$,

$\therefore \angle BMH = 100^\circ$,

$\because NE$ 平分 $\angle DNG$, $\angle DNE = 30^\circ$,

$\therefore \angle GND = 60^\circ$,

$\therefore \angle AMH = 180^\circ - \angle BMH = 80^\circ$, $\angle CNH = 60^\circ$.

由 (1) 可知： $\angle MHN = \angle AMH - \angle CNH = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

$\therefore \angle MHN = 20^\circ$;

② $\because ME$ 平分 $\angle BMH$, $\angle BME = x^\circ$,

$\therefore \angle BMH = 2x^\circ$,

$\because NE$ 平分 $\angle DNG$, $\angle DNE = y^\circ$,

$\therefore \angle GND = 2y^\circ$,

$\therefore \angle AMH = 180^\circ - 2x^\circ$, $\angle CNH = 2y^\circ$,

$\therefore \angle MHN = 180^\circ - 2x^\circ - 2y^\circ = 180^\circ - 2(x^\circ + y^\circ)$.

$\because x + y$ 为一个定值,

$\therefore \angle MHN$ 不会随 x 的变化而发生改变, 度数为 $180^\circ - 2(x^\circ + y^\circ)$;

③ 不变, $\angle MHN$ 的度数为 $2(x^\circ + y^\circ) - 180^\circ$. 理由如下:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908111064032006143>