

湖北省武汉市钢城第四中学 2023 年高三下学期毕业班第三次模拟考试数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 要得到函数 $y = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$ 的图像，只需把函数 $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的图像（ ）
A. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位
B. 向左平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位
C. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
2. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形，若 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ ，则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$
A. $-\frac{3}{2}$
B. $\frac{15}{2}$
C. $\frac{3}{2}$
D. $-\frac{15}{2}$
3. 已知定点 A, B 都在平面 α 内，定点 $P \notin \alpha, PB \perp \alpha, C$ 是 α 内异于 A, B 的动点，且 $PC \perp AC$ ，那么动点 C 在平面 α 内的轨迹是（ ）
A. 圆，但要去掉两个点
B. 椭圆，但要去掉两个点
C. 双曲线，但要去掉两个点
D. 抛物线，但要去掉两个点
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2c$. 点 A 为双曲线 C 的右顶点，若点 A 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{1}{2}c$ ，则双曲线 C 的离心率是（ ）
A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. 2
D. 3
5. 若 $2^a + 3a = 3^b + 2b$ ，则下列关系式正确的个数是（ ）
① $b < a < 0$ ② $a = b$ ③ $0 < a < b < 1$ ④ $1 < b < a$
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
6. 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位后得到函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象，则 φ 的最小值为（ ）
A. $\frac{\pi}{4}$
B. $\frac{3\pi}{8}$
C. $\frac{\pi}{2}$
D. $\frac{5\pi}{8}$

7. 若集合 $A = \{x | y = \sqrt{2-x}\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-3, 2]$
- B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$
- C. $(2, 3)$
- D. $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$

8. 已知函数 $f(x) = \log_a(|x-2|-a)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则“ $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数”是“ $0 < a < 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线, 与双曲线的左、右两支分别交于点 P, Q , 若 $|QF_2| = |PQ|$, 则双曲线渐近线的斜率为 ()

- A.** ± 1 **B.** $\pm(\sqrt{3}-1)$ **C.** $\pm(\sqrt{3}+1)$ **D.** $\pm\sqrt{5}$

10. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过点 F 且与 x 轴垂直的直线交两渐近线于 M, N 两点，与双曲线的其中一个交点为 P ，若 $\vec{OP} = \lambda \vec{OM} + \mu \vec{ON} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ ，且 $\lambda\mu = \frac{6}{25}$ ，则该双曲线的离心率为()

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{5\sqrt{6}}{12}$

11. 双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, 则 r 等于()

- A. $\sqrt{3}$
B. 2
C. 3
D. 6

12. 已知函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数, $g(x)$ 是 R 的奇函数, 且 $g(x) = f(x-1)$, 则 $f(2019)$ 的值为 ()

- A.** 2 **B.** 0 **C.** -2 **D.** +2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等边三角形 ABC 的边长为 1. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, 点 N 、 T 分别为线段 BC 、 CA 上的动点, 则

$\overline{AB} \cdot \overline{NT} + \overline{BC} \cdot \overline{TM} + \overline{CA} \cdot \overline{MN}$ 取值的集合为_____.

14. 已知集合 $A = \{1, 4\}$, $B = \{a-5, 7\}$. 若 $A \cap B = \{4\}$, 则实数 a 的值是_____.

15. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x-4)$, 当 $x \in [-2, 2)$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + a, & -2 \leq x \leq a \\ 1-x, & a < x < 2 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2020)$

上有 1515 个零点, 则实数 a 的范围为 _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 得三边长成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - 2ax^2 + 3x - a$, $a \in \mathbb{Z}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 判断 $x=1$ 是否是函数 $f(x)$ 的极值点, 并说明理由;

(2) 当 $x > 0$ 时, 不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为:

$\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + a, \\ y = a - t, \end{cases}$ 其中 $t \in \mathbb{R}$, t 为参数, a 为常数.

(1) 写出 C_1 与 C_2 的直角坐标方程;

(2) a 在什么范围内取值时, C_1 与 C_2 有交点.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 并且 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.

(1) 已知 _____, 计算 $\triangle ABC$ 的面积;

请① $a = \sqrt{7}$, ② $b = 2$, ③ $\sin C = 2 \sin B$ 这三个条件中任选两个, 将问题 (1) 补充完整, 并作答. 注意, 只需选择其中的一种情况作答即可, 如果选择多种情况作答, 以第一种情况的解答计分.

(2) 求 $\cos B + \cos C$ 的最大值.

20. (12 分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标

系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(1, 0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|AP| + |PB|$ 的值.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right)$ 的值;

(2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $c - a$ 的取值范围.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = e^x - 2x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 的切线方程为 $y = ax + 1$, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $\varphi(x) = mf(x) + 2mx - x^2 + 3$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

运用辅助角公式将两个函数公式进行变形得 $y = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 以及 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 按四个选项分别对

$y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 变形, 整理后与 $y = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 对比, 从而可选出正确答案.

【详解】

解:

$$y = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{对于 A: 可得 } y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

故选:A.

【点睛】

本题考查了三角函数图像平移变换, 考查了辅助角公式. 本题的易错点有两个, 一个是混淆了已知函数和目标函数; 二是在平移时, 忘记乘了自变量前的系数.

2. A

【解析】

由 $BD = \frac{1}{3}BC$ 可得 $AD = AB + BD = AB + \frac{1}{3}BC$, 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形, 所以

$$AD \cdot BC = \left(AB + \frac{1}{3}BC\right) \cdot BC = AB \cdot BC + \frac{1}{3}BC^2 = 3 \times 3 \cos 120^\circ + \frac{1}{3} \times 3^2 = -\frac{3}{2}, \text{ 故选 A.}$$

3. A

【解析】

根据题意可得 $AC \perp BC$, 即知 C 在以 AB 为直径的圆上.

【详解】

Q $PB \perp \alpha, AC \subset \alpha$,

$\therefore PB \perp AC$,

又 $PC \perp AC$, $PB \cap PC = P$,

$\therefore AC \perp$ 平面 PBC , 又 $BC \subset$ 平面 PBC

$\therefore AC \perp BC$,

故 C 在以 AB 为直径的圆上,

又 C 是 α 内异于 A, B 的动点,

所以 C 的轨迹是圆, 但要去掉两个点 A, B

故选: A

【点睛】

本题主要考查了线面垂直、线线垂直的判定, 圆的性质, 轨迹问题, 属于中档题.

4. A

【解析】

由点到直线距离公式建立 a, b, c 的等式, 变形后可求得离心率.

【详解】

由题意 $A(a, 0)$, 一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 即 $bx - ay = 0$, $\therefore d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}c$,

$\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$, 即 $\frac{a^2(c^2 - a^2)}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$, $e^4 - 4e^2 + 4 = 0$, $e = \sqrt{2}$.

故选: A .

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率, 掌握渐近线方程与点到直线距离公式是解题基础.

5. D

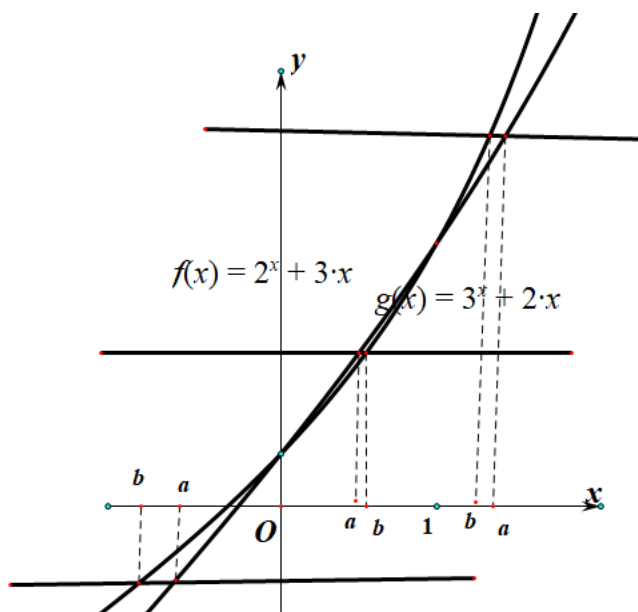
【解析】

a, b 可看成是 $y = t$ 与 $f(x) = 2^x + 3x$ 和 $g(x) = 3^x + 2x$ 交点的横坐标, 画出图象, 数形结合处理.

【详解】

令 $f(x) = 2^x + 3x$, $g(x) = 3^x + 2x$,

作出图象如图，



由 $f(x) = 2^x + 3x$, $g(x) = 3^x + 2x$ 的图象可知,

$f(0) = g(0) = 1$, $f(1) = g(1) = 5$, ②正确;

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < g(x)$, 有 $b < a < 0$, ①正确;

$x \in (0, 1)$, $f(x) > g(x)$, 有 $0 < a < b < 1$, ③正确;

$x \in (1, +\infty)$, $f(x) < g(x)$, 有 $1 < b < a$, ④正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用函数图象比较大小, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

6. A

【解析】

首先求得平移后的函数 $g(x) = \sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, 再根据 $\sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 求 φ 的最小值.

【详解】

根据题意, $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位后, 所得图象对应的函数

$$g(x) = \sin\left[2(x + \varphi) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $2\varphi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 又 $\varphi > 0$, 所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$.

故选: A

【点睛】

本题考查三角函数的图象变换，诱导公式，意在考查平移变换，属于基础题型.

7. A

【解析】

先确定集合 A 中的元素，然后由交集定义求解.

【详解】

$$Q A = \{x | y = \sqrt{2-x}\} = \{x | x \leq 2\}, B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}, \therefore A \cap B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查求集合的交集运算，掌握交集定义是解题关键.

8. C

【解析】

先求出复合函数 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数的充要条件，再看其和 $0 < a < 1$ 的包含关系，利用集合间包含关系与充要条件之间的关系，判断正确答案.

【详解】

$$f(x) = \log_a(|x-2|-a) (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1),$$

$$\text{由 } |x-2|-a > 0 \text{ 得 } x < 2-a \text{ 或 } x > 2+a,$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 的定义域为 } \{x | x < 2-a \text{ 或 } x > 2+a\}, (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$\text{令 } t = |x-2|-a, \text{ 其在 } (-\infty, 2-a) \text{ 单调递减, } (2+a, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$f(x) \text{ 在 } (3, +\infty) \text{ 上是单调函数, 其充要条件为 } \begin{cases} 2+a \leq 3 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } 0 < a < 1.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了复合函数的单调性的判断问题，充要条件的判断，属于基础题.

9. C

【解析】

如图所示：切点为 M ，连接 OM ，作 $PN \perp x$ 轴于 N ，计算 $|PF_1| = 2a$ ， $|PF_2| = 4a$ ， $|PN| = \frac{2a^2}{c}$ ， $|F_1N| = \frac{2ab}{c}$ ，

根据勾股定理计算得到答案.

【详解】

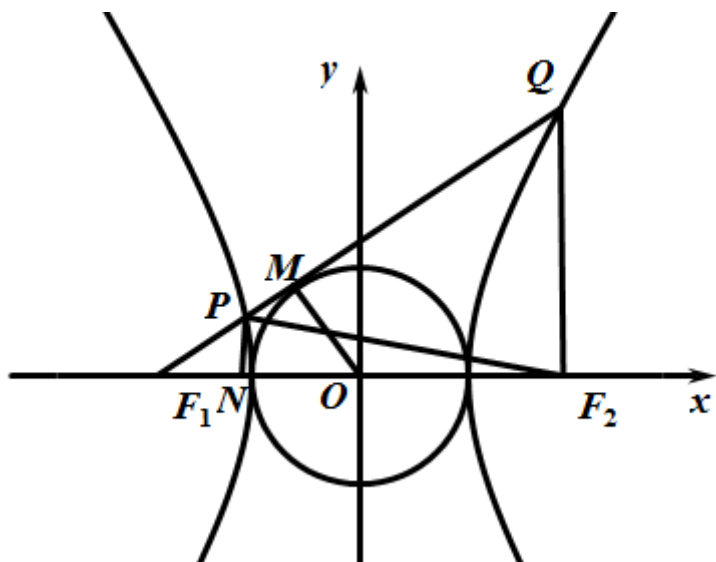
如图所示：切点为 M ，连接 OM ，作 $PN \perp x$ 轴于 N ，

$$|QF_1| - |QF_2| = |QP| + |PF_1| - |QF_2| = |PF_1| = 2a, \text{ 故 } |PF_2| = 4a,$$

在 $Rt\triangle MOF_1$ 中， $\sin \angle MF_1O = \frac{a}{c}$ ，故 $\cos \angle MF_1O = \frac{b}{c}$ ，故 $|PN| = \frac{2a^2}{c}$ ， $|F_1N| = \frac{2ab}{c}$ ，

根据勾股定理： $16a^2 = \frac{4a^4}{c^2} + \left(2c - \frac{2ab}{c}\right)^2$ ，解得 $\frac{b}{a} = \sqrt{3} + 1$.

故选：C.



【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线斜率，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

10. D

【解析】

根据已知得本题首先求出直线与双曲线渐近线的交点，再利用 $\vec{OP} = \lambda \vec{OM} + \mu \vec{ON}$ ，求出点

$P\left((\lambda + \mu)c, (\lambda - \mu)\frac{bc}{a}\right)$ ，因为点 P 在双曲线上，及 $e = \frac{c}{a}$ ，代入整理及得 $4e^2\lambda\mu = 1$ ，又已知 $\lambda\mu = \frac{6}{25}$ ，即可求出

离心率.

【详解】

由题意可知 $M\left(c, \frac{bc}{a}\right)$, $N\left(c, -\frac{bc}{a}\right)$, 代入 $\vec{OP} = \lambda \vec{OM} + \mu \vec{ON}$ 得: $P\left((\lambda + \mu)c, (\lambda - \mu)\frac{bc}{a}\right)$,

代入双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 整理得: $4e^2\lambda\mu = 1$, 又因为 $\lambda\mu = \frac{6}{25}$, 即可得到 $e = \frac{5\sqrt{6}}{12}$,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查的是双曲线的简单几何性质和向量的坐标运算, 离心率问题关键寻求关于 a , b , c 的方程或不等式, 由此计算双曲线的离心率或范围, 属于中档题.

11. A

【解析】

由圆心到渐近线的距离等于半径列方程求解即可.

【详解】

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 圆心坐标为 $(3, 0)$. 由题意知, 圆心到渐近线的距离等于圆的半径 r , 即 $r =$

$$\frac{\left| \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 - 0 \right|}{\sqrt{\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 1}} = \sqrt{3}$$

答案: A

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线方程及直线与圆的位置关系, 属于基础题.

12. B

【解析】

根据函数的奇偶性及题设中关于 $g(x)$ 与 $f(x-1)$ 关系, 转换成关于 $f(x)$ 的关系式, 通过变形求解出 $f(x)$ 的周期, 进而算出 $f(2019)$.

【详解】

Q $g(x)$ 为 R 上的奇函数, $\therefore g(0) = f(-1) = 0, g(-x) = -g(x)$

$\therefore f(-1) = 0, f(-x-1) = -f(x-1), \therefore f(-x) = -f(x-2)$

而函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数, $\therefore f(x) = f(-x), \therefore f(x) = -f(x-2)$

$\therefore f(x-2) = -f(x-4), \therefore f(x) = f(x-4)$

故 $f(x)$ 为周期函数, 且周期为 4

$$\therefore f(2019) = f(-1) = 0$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了函数的奇偶性, 函数的周期性的应用, 属于基础题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\{-6\}$

【解析】

根据题意建立平面直角坐标系, 设三角形各点的坐标, 依题意求出 $\overrightarrow{NT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{MN}$ 的表达式, 再进行数量积的运算, 最后求和即可得出结果.

【详解】

解: 以 BC 的中点 O 为坐标原点, BC 所在直线为 x 轴, 线段 BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系, 如图所示,

$$\text{则 } A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0), M\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = (-1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (2, 0), \overrightarrow{CA} = (-1, \sqrt{3}),$$

$$\text{设 } N(t, 0), \overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AC} = (0, \sqrt{3}) + \lambda(1, -\sqrt{3}) = (\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda)),$$

$$\text{即点 } T \text{ 的坐标为 } (\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda)),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{NT} = (\lambda - t, \sqrt{3}(1-\lambda)), \overrightarrow{TM} = \left(-\frac{2}{3} - \lambda, \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}(1-\lambda)\right), \overrightarrow{MN} = \left(t + \frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MN}$$

$$= -1 \times (\lambda - t) + (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3}(1-\lambda) + 2 \times \left(-\frac{2}{3} - \lambda\right) + 0 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}(1-\lambda)\right] +$$

$$(-1) \times \left(t + \frac{2}{3}\right) + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -6$$

故答案为: $\{-6\}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908121107051006137>