

专题 17 圆锥曲线常考压轴小题全归类

目 录

 题型	01 阿波罗尼斯圆与圆锥曲线	2
 题型	02 蒙日圆	4
 题型	03 阿基米德三角形	6
 题型	04 仿射变换问题	10
 题型	05 圆锥曲线第二定义	12
 题型	06 焦半径问题	16
 题型	07 圆锥曲线第三定义	19
 题型	08 定比点差法与点差法	21
 题型	09 切线问题	25
 题型	10 焦点三角形问题	28
 题型	11 焦点弦问题	30
 题型	12 圆锥曲线与张角问题	32

题型 13 圆锥曲线与角平分线问题	34
题型 14 圆锥曲线与通径问题	38
题型 15 圆锥曲线的光学性质问题	40
题型 16 圆锥曲线与四心问题	43

题型 01 阿波罗尼斯圆与圆锥曲线

1. (2024·江西赣州·统考模拟预测) 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家, 与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠, 他对圆锥曲线有深刻而系统的研究, 阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一, 指的是: 已知动点 M 与两定点 A, B 的距离之比为 $\lambda (\lambda > 0, \lambda \neq 1)$, 那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆. 已知在平面直角坐标系中, 圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 、点 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 和点 $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$, M 为圆 O 上的动点, 则

2. $|MA| - |MB|$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】 设 $M(x, y)$, 令 $2|MA| = |MC|$, 则 $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{1}{2}$,

由题知圆 $x^2 + y^2 = 1$ 是关于点 A, C 的阿波罗尼斯圆, 且 $\lambda = \frac{1}{2}$,

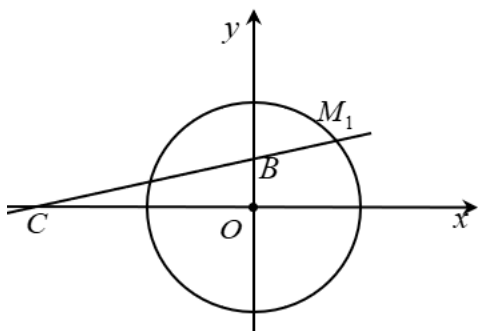
$$\text{设点 } C(m, n), \text{ 则 } \frac{|MA|}{|MC|} = \frac{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{整理得: } x^2 + y^2 + \frac{2m+4}{3}x + \frac{2n}{3}y = \frac{m^2 + n^2 - 1}{3},$$

$$\text{比较两方程可得: } \frac{2m+4}{3} = 0, \frac{2n}{3} = 0, \frac{m^2 + n^2 - 1}{3} = 1, \text{ 即 } m = -2, n = 0, \text{ 点 } C(-2, 0),$$

$$\text{当点 } M \text{ 位于图中 } M_1 \text{ 的位置时, } 2|MA| - |MB| = |MC| - |MB| \text{ 的值最大, 最大为 } |BC| = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

故选: B.



2. (2024·全国·高三专题练习) 已知平面内两个定点 A, B 及动点 P , 若 $\frac{|PB|}{|PA|} = \lambda$ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$), 则点 P 的

轨迹是圆. 后世把这种圆称为阿波罗尼斯圆. 已知 $O(0, 0)$, $Q\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 直线 $l_1: kx - y + 2k + 3 = 0$, 直线

$l_2: x + ky + 3k + 2 = 0$, 若 P 为 l_1, l_2 的交点, 则 $3|PO| + 2|PQ|$ 的最小值为 ()

- A. $3\sqrt{3}$ B. $6 - 3\sqrt{2}$ C. $9 - 3\sqrt{2}$ D. $3 + \sqrt{6}$

【答案】A

【解析】由已知 $l_1: kx - y + 2k + 3 = 0$ 过定点 $C(-2, 3)$,

$l_2: x + ky + 3k + 2 = 0$ 过定点 $D(-2, -3)$,

因为 $k_{l_1} = k$, $k_{l_2} = -\frac{1}{k}$, 所以 $k_{l_1} \cdot k_{l_2} = -1$, 即 $l_1 \perp l_2$,

所以点 P 的轨迹是以 CD 为直径的圆, 除去 D 点, 故圆心为 $(-2, 0)$, 半径为 3,

则 P 的轨迹方程为 $(x+2)^2 + y^2 = 9 (y \neq -3)$, 即 $x^2 + y^2 + 4x = 5 (y \neq -3)$, 易知 O, Q 在该圆内,

$$\text{又 } \frac{3}{2}|PO| = \sqrt{\frac{9}{4}(x^2 + y^2)} = \sqrt{\frac{9}{4}(x^2 + y^2) - \frac{5}{4} \times 9 + \frac{45}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}(x^2 + y^2) - \frac{5}{4}[(x+2)^2 + y^2] + \frac{45}{4}},$$

$$\text{即 } \frac{3}{2}|PO| = \sqrt{x^2 - 5x + y^2 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2} (y \neq -3),$$

$$\text{取 } A\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 则 } \frac{3}{2}|PO| = |PA|, \text{ 又 } |AQ| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } 3|PO| + 2|PQ| = 2\left(\frac{3}{2}|PO| + |PQ|\right) = 2(|PA| + |PQ|) \geq 2|AQ| = 3\sqrt{3},$$

所以 $3|PO| + 2|PQ|$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

故选: A.

3. (2024·全国·校联考模拟预测) 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家, 与欧几里得、阿基米德被称为亚历山大时期数学三巨匠, 阿波罗尼斯发现: 平面内到两个定点 A, B 的距离之比为定值 $\lambda (\lambda > 0, \text{ 且 } \lambda \neq 1)$

的点的轨迹是圆，此圆被称为“阿波罗尼斯圆”.在平面直角坐标系 xOy 中， $A(-2,0), B(4,0)$ ，点 P 满足

$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为曲线 C ，则下列说法错误的是 ()

- A. C 的方程为 $(x+4)^2 + y^2 = 16$
- B. 当 A, B, P 三点不共线时，则 $\angle APO = \angle BPO$
- C. 在 C 上存在点 M ，使得 $|MO| = 2|MA|$
- D. 若 $D(2,2)$ ，则 $|PB| + 2|PD|$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】设 $P(x, y)$ ，由 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ ，得 $\frac{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}$ ，化简得 $(x+4)^2 + y^2 = 16$ ，故 A 正确；

当 A, B, P 三点不共线时， $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{1}{2} = \frac{|PA|}{|PB|}$ ，所以 PO 是 $\angle APB$ 的角平分线，所以 $\angle APO = \angle BPO$ ，故 B 正确；

设 $M(x, y)$ ，则 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ ，化简得 $(x + \frac{8}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ ，因为 $\sqrt{(-4 + \frac{8}{3})^2 + (0-0)^2} = \frac{4}{3} < 4 - \frac{4}{3}$ ，所以 C 上不存在点 M ，使得 $|MO| = 2|MA|$ ，故 C 错

误；

因为 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ ，所以 $|PB| = 2|PA|$ ，所以 $|PB| + 2|PD| = 2|PA| + 2|PD| \geq 2|AD| = 4\sqrt{5}$ ，当且仅当 P 在线段 AD 上时，等号成立，故 D 正确.

故选：C.

题型 02 蒙日圆

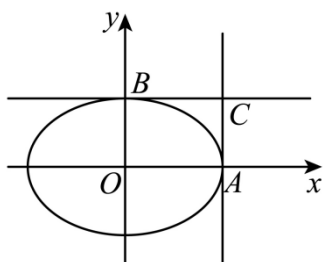
4. (2024·青海西宁·统考) 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”. 他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆被称为该椭圆的蒙日

圆. 若椭圆: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的蒙日圆为 $C: x^2 + y^2 = \frac{4}{3}a^2$ ，则椭圆 Γ 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】D

【解析】



如图， AC, BC 分别与椭圆相切，显然 $AC \perp BC$ 。

所以点 $C(a, b)$ 在蒙日圆 $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}a^2$ 上，

所以 $a^2 + b^2 = \frac{4}{3}a^2$ ，所以 $a^2 = 3b^2$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以椭圆 r 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

故选：D

5. (2024·陕西西安·长安一中校考) “蒙日圆”涉及几何学中的一个著名定理，该定理的内容为：椭圆上两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上，该圆称为椭圆的蒙日圆。若椭圆 C ：

$\frac{x^2}{a+1} + \frac{y^2}{a} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$ ，则椭圆 C 的蒙日圆的方程为 ()

- A. $x^2 + y^2 = 19$ B. $x^2 + y^2 = 17$ C. $x^2 + y^2 = 15$ D. $x^2 + y^2 = 14$

【答案】B

【解析】因为椭圆 C ： $\frac{x^2}{a+1} + \frac{y^2}{a} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$ ，则 $\frac{1}{\sqrt{a+1}} = \frac{1}{3}$ ，解得 $a = 8$ ，即椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

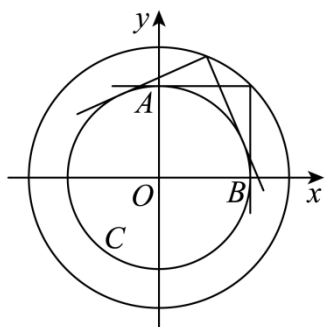
于是椭圆的上顶点 $A(0, 2\sqrt{2})$ ，右顶点 $B(3, 0)$ ，经过 A, B 两点的椭圆切线方程分别为 $y = 2\sqrt{2}$ ， $x = 3$ ，

则两条切线的交点坐标为 $(3, 2\sqrt{2})$ ，显然这两条切线互相垂直，因此点 $(3, 2\sqrt{2})$ 在椭圆 C 的蒙日圆上，

圆心为椭圆 C 的中心 O ，椭圆 C 的蒙日圆半径 $r = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$ ，

所以椭圆 C 的蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = 17$ 。

故选：B



6. (2024·江西·统考模拟预测) 定义: 圆锥曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条相互垂直的切线的交点 Q 的轨迹是以坐标原点为圆心, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆, 这个圆称为蒙日圆. 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, P 是直线 $l: x + 2y - 3 = 0$ 上的一点, 过点 P 作椭圆 C 的两条切线与椭圆相切于 M 、 N 两点, O 是坐标原点, 连接 OP , 当 $\angle MPN$ 为直角时, 则 $k_{OP} =$ ()

- A. $-\frac{3}{4}$ 或 $\frac{4}{3}$ B. $\frac{12}{5}$ 或 0 C. $-\frac{9}{5}$ 或 $\frac{12}{5}$ D. $-\frac{4}{3}$ 或 0

【答案】D

【解析】根据蒙日圆定义, 圆 C 方程为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = 9$,

因为直线 l 与圆 C 交于 A 、 B 两点, 联立 $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{5} \\ y_1 = \frac{12}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$,

即点 $A(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ 、 $B(3, 0)$,

当点 P 与点 A 或 B 重合时, $\angle MPN$ 为直角, 且 $k_{OA} = -\frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = -\frac{4}{3}$, $k_{OB} = 0$,

所以, 直线 OP 的斜率为 $-\frac{4}{3}$ 或 0.

故选: D.

题型 03 阿基米德三角形

7. (2024·陕西铜川·统考) 古希腊哲学家、百科式科学家阿基米德最早采用分割法求得椭圆的面积为椭圆的长半轴长和短半轴长乘积的 π 倍, 这种方法已具有积分计算的雏形. 已知椭圆 C 的面积为 $12\sqrt{5}\pi$, 离心率为 $\frac{2}{3}$, F_1 , F_2 是椭圆 C 的两个焦点, A 为椭圆 C 上的动点, 则下列结论正确的是 ()

①椭圆 C 的标准方程可以为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ ②若 $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则 $S_{\triangle F_1AF_2} = 20\sqrt{3}$

③存在点A, 使得 $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{|AF_1|} + \frac{1}{|AF_2|}$ 的最小值为 $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6}$

A. ①③

B. ②④

C. ②③

D. ①④

【答案】D

【解析】对于①：由 $\begin{cases} ab=12\sqrt{5} \\ \frac{c}{a}=\frac{2}{3} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 解得 $a=6, b=2\sqrt{5}, c=4$,

则椭圆C的标准方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$, 故①正确;

对于②：由定义可知 $|AF_1| + |AF_2| = 12$,

由余弦定理可得: $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|AF_1||AF_2|} = \frac{(|AF_1| + |AF_2|)^2 - 2|AF_1||AF_2| - |F_1F_2|^2}{2|AF_1||AF_2|}$
 $= \frac{12^2 - 2|AF_1||AF_2| - 64}{2|AF_1||AF_2|} = \frac{1}{2}$, 整理得 $|AF_1||AF_2| = \frac{80}{3}$,

则 $S_{\triangle F_1AF_2} = \frac{1}{2}|AF_1||AF_2|\sin \angle F_1AF_2 = \frac{1}{2} \times \frac{80}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, 故②错误;

对于③：设 $A(s, t)$, $\frac{s^2}{36} + \frac{t^2}{20} = 1, s^2 = 36\left(1 - \frac{t^2}{20}\right) = 36 - \frac{9}{5}t^2$,

$F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$, $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = (-4-s, -t) \cdot (4-s, -t) = s^2 - 16 + t^2$

$= 36 - \frac{9}{5}t^2 - 16 + t^2 = 20 - \frac{4}{5}t^2$, 由于 $-2 \leq t \leq 2$,

$0 \leq t^2 \leq 4, 0 \leq \frac{4}{5}t^2 \leq \frac{16}{5}, \frac{84}{5} \leq 20 - \frac{4}{5}t^2 \leq 20$,

则不存在点A, 使得 $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{2}$, 故③错误;

对于④: $\frac{2}{|AF_1|} + \frac{1}{|AF_2|} = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{|AF_1|} + \frac{1}{|AF_2|} \right) (|AF_1| + |AF_2|) = \frac{1}{12} \left(2 + \frac{2|AF_2|}{|AF_1|} + 1 + \frac{|AF_1|}{|AF_2|} \right) \geq \frac{1}{12} (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6}$,

当且仅当 $\frac{2|AF_2|}{|AF_1|} = \frac{|AF_1|}{|AF_2|}$,

即 $|AF_1| = \sqrt{2}|AF_2|$ 时, 等号成立, 故④正确;

故选: D

(2024·河北·校联考) 抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形称为阿基米德三角形, 在数学发展的历史长河中, 它不断地闪烁出真理的光辉, 这个两千多年的古老图形, 蕴藏着很多性质. 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过焦点的弦 AB 的两个端点的切线相交于点 M , 则下列说法正确的是 ()

- A. M 点必在直线 $x = -2$ 上, 且以 AB 为直径的圆过 M 点
- B. M 点必在直线 $x = -1$ 上, 但以 AB 为直径的圆不过 M 点
- C. M 点必在直线 $x = -2$ 上, 但以 AB 为直径的圆不过 M 点
- D. M 点必在直线 $x = -1$ 上, 且以 AB 为直径的圆过 M 点

【答案】D

【解析】设 (x_0, y_0) 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点,

当 $y_0 > 0$ 时, 由 $y = 2\sqrt{x}$ 得: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为: $\therefore y - y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$,

即 $y - y_0 = \frac{2}{y_0} \left(x - \frac{y_0^2}{4} \right)$, $\therefore y_0 y = 2x + \frac{y_0^2}{2} = 2(x + x_0)$;

同理可得: 当 $y_0 < 0$ 时, 在 (x_0, y_0) 处的切线方程切线方程为 $y_0 y = 2(x + x_0)$;

经检验, 当 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ 时, 切线方程为 $x = 0$, 满足 $y_0 y = 2(x + x_0)$,

$\therefore$ 过抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程为: $y_0 y = 2(x + x_0)$;

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_3, y_3)$,

则抛物线在 A, B 处的切线方程为 $y_1 y = 2(x + x_1)$ 和 $y_2 y = 2(x + x_2)$, $\therefore \begin{cases} y_1 y_3 = 2(x_3 + x_1) \\ y_2 y_3 = 2(x_3 + x_2) \end{cases}$,

$\therefore$ 点 A, B 满足直线方程: $yy_3 = 2(x + x_3)$, 又直线 AB 过焦点 $F(1, 0)$,

$\therefore 2(1 + x_3) = 0$, 解得: $x_3 = -1$, $\therefore M$ 点必在直线 $x = -1$ 上; AC 错误;

由题意知: $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$,

Q $k_{MA} = \frac{2}{y_1}$, $k_{MB} = \frac{2}{y_2}$, $\therefore k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{4}{y_1 y_2}$;

设直线 AB 方程为: $x = ty + 1$,

由 $\begin{cases} x = ty + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得: $y^2 - 4ty - 4 = 0$, $\therefore y_1 y_2 = -4$, $\therefore k_{MA} \cdot k_{MB} = -1$, 即 $MA \perp MB$,

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆过 M 点; B 错误, D 正确.

故选: D.

9. (2024·青海西宁·统考) 抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形常被称为阿基米德三角形. 阿基米德三角形有一些有趣的性质, 如: 若抛物线的弦过焦点, 则过弦的端点的两条切线的斜率之积

为定值. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 弦 AB 过焦点, $\triangle ABQ$ 为阿基米德三角形, 则 $\triangle ABQ$ 的面积的最小值为 ()

A. $\frac{p^2}{2}$

B. p^2

C. $2p^2$

D. $4p^2$

【答案】B

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 且 $y_1 \neq y_2$ ，直线 $AB: x = my + \frac{p}{2}$ ，联立 $\begin{cases} x = my + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$ ，

整理得 $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$ ，则 $y_1 + y_2 = 2pm, y_1y_2 = -p^2$ 。

设过点 A 的切线方程为 $(y - y_1) = k(x - x_1)$ ，联立 $\begin{cases} y - y_1 = k(x - x_1) \\ y^2 = 2px \end{cases}$ ，

整理得 $y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2py_1}{k} - y_1^2 = 0$ ，由 $\Delta = \left(-\frac{2p}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{2py_1}{k} - y_1^2\right) = 0$ ，可得 $k = \frac{p}{y_1}$ ，

则过 A 的切线为： $(y - y_1) = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ ，即 $y_1y - y_1^2 = p(x - x_1)$ ，即 $y_1y - 2px_1 = p(x - x_1)$ ，即

$$y_1y = p(x + x_1),$$

同理可得过点 B 的切线斜率为 $\frac{p}{y_2}$ ，过点 B 的切线方程为： $y_2y = p(x + x_2)$ ，

联立两切线 $\frac{p}{y_1}(x + x_1) = \frac{p}{y_2}(x + x_2)$ ，则 $x = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1} = \frac{\frac{p}{2}(y_1 - y_2)}{y_2 - y_1} = -\frac{p}{2}$ ，

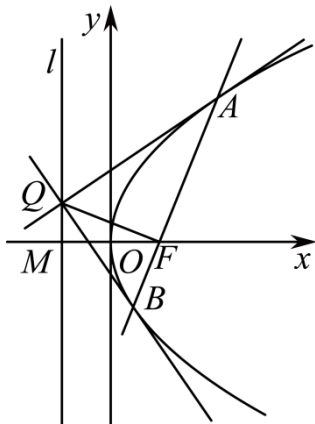
所以两条切线的交点 Q 在准线上，则 $y_1y = p\left(-\frac{p}{2} + x_1\right), y_2y = p\left(-\frac{p}{2} + x_2\right)$ ，

两式相减得 $(y_1 - y_2)y = p(x_1 - x_2) = p\left(\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}\right) = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2}$ ，

$\therefore y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ，可得 $Q\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ， $k_{QF} = -\frac{y_1 + y_2}{2p} = -m$ ，

又因为直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{m} (m \neq 0)$ ， $\therefore AB \perp QF$ ($m = 0$ 也成立)，

如图，设准线与 x 轴的交点为 M ，



$$VABQ \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |QF|,$$

当 $AB \perp x$ 轴时, $|AB|$ 最短 (最短为 $2p$), $|QF|$ 也最短 (最短为 $|MF| = p$),

此时 $VABQ$ 的面积取最小值 p^2 .

故选: B

题型 04 仿射变换问题

10. (2024·全国·高三专题练习) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1, F_2 分别为椭圆左右焦点, 过 F_1, F_2 作两条互相平行的弦, 分别与椭圆交于 M, N, P, Q 四点, 若当两条弦垂直于 x 轴时, 点 M, N, P, Q 所形成的平行四边形面积最大, 则椭圆离心率的取值范围为_____.

【答案】 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】作仿射变换, 令 $x' = x, y' = \frac{a}{b}y$, 可得仿射坐标系 $x'O'y'$, 在此坐标系中, 上述椭圆变换为圆 $x'^2 + y'^2 = a^2$, 点 F_1, F_2 坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$, 过 F_1, F_2 作两条平行的弦分别与圆交于 M', N', P', Q' 四点.

由平行四边形性质易知, 三角形 $OP'Q'$ 的面积为 M', N', P', Q' 四点所形成的平行四边形面积的 $\frac{1}{4}$, 故只需

令三角形 $OP'Q'$ 面积的最大值在弦 $P'Q'$ 与 x 轴垂直时取到即可. 当 $c \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$ 时, 三角形 $OP'Q'$ 面积的最大

值在弦 $P'Q'$ 与 x 轴垂直时取到.

故此题离心率的取值范围为 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

故答案为: $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

11. (2024·江苏·高二专题练习) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 左顶点为 A , P, Q 为椭圆 C 上两动点, 直线 PO 交

AQ 于 E , 直线 QO 交 AP 于 D , 直线 OP, OQ 的斜率分别为 k_1, k_2 且 $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$, $\vec{AD} = \lambda \vec{DF}, \vec{AE} = \mu \vec{EQ}$

(λ, μ 是非零实数), 求 $\lambda^2 + \mu^2 =$ _____.

【答案】 1

【解析】解法 1: 可得点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, 设 $P(x_1, y_1), D(x_0, y_0)$, 则 $y_1 = k_1 x_1, y_0 = k_2 x_0$,

由 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{DP}$ 可得 $x_0 + \sqrt{2} = \lambda(x_1 - x_0), y_0 = \lambda(y_1 - y_0)$, 即有 $x_0 = \frac{\lambda x_1 - \sqrt{2}}{1 + \lambda}, y_0 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} y_1$,

由 $k_1 x_1 = y_1$, $\therefore \frac{1 + \lambda}{\lambda} y_0 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} k_2 x_0 = k_2 \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \right)$, 两边同乘以 k_1 , 可得 $k_1^2 x_1 = k_1 k_2 \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \right)$,

解得 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{\lambda(1 + 2k_1^2)}, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{\lambda(1 + 2k_1^2)} k_1$, 将 $P(x_1, y_1)$ 代入椭圆方程可得 $\lambda^2 = \frac{1}{1 + 2k_1^2}$, 由 $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{EQ}$ 可得

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 2k_2^2} = \frac{2k}{1 + 2k_1^2}, \text{ 可得 } \lambda^2 + \mu^2 = 1;$$

故答案为: 1.

解法 2: 作变换 $\begin{cases} x' = x \\ y' = \sqrt{2}y \end{cases}$ 之后椭圆变为圆, 方程为 $x'^2 + y'^2 = 2$,

$$k_{QP'} \cdot k_{OQ'} = (\sqrt{2}k_{OP}) \cdot (\sqrt{2}k_{OQ}) = 2k_{OP} \cdot k_{OQ} = -1 \Rightarrow OP' \perp OQ',$$

设 $\angle P'A'O = \alpha, \angle Q'A'O = \beta$, 则 $\alpha + \beta = \angle P'A'Q' = \frac{1}{2} \angle P'A'Q' = \frac{\pi}{4}$,

$$D'P' = \frac{R}{\cos \alpha}, E'Q' = \frac{R}{\cos \beta}, A'P' = 2R \cos \alpha, A'Q' = 2R \cos \beta,$$

$$\therefore \lambda = \frac{AD}{DP} = \frac{A'D'}{D'P'} = \frac{A'P' - D'P'}{D'P'} = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha,$$

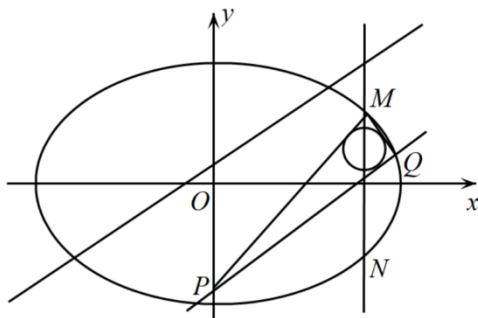
$$\mu = \frac{AE}{EQ} = \frac{A'E'}{E'Q'} = \frac{A'Q' - E'Q'}{E'Q'} = 2 \cos^2 \beta - 1 = \cos 2\beta,$$

$$\therefore \lambda^2 + \mu^2 = \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta = \cos^2 2\alpha + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1.$$

故答案为: 1.

12. (2024·全国·高三专题练习) 如图, 作斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 P, Q 两点, 且

$M\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在直线 l 的上方, 则 $\triangle MPQ$ 内切圆的圆心所在的定直线方程为_____.



【答案】 $x = \sqrt{2}$

【解析】如图，作仿射变换： $\begin{cases} x=2x' \\ y=y' \end{cases}$ ，椭圆变为 $x'^2+y'^2=1$ ，直线 PQ 的斜率 $\frac{1}{2}$ 变为直线 $P'Q'$ 的斜率1，

$$M\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 变为 } M'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

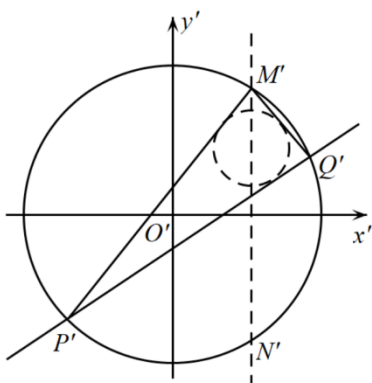
$$\therefore k_{O'N'}k_{P'Q'} = -1, \therefore O'N' \perp P'Q',$$

由垂径定理 $M'N'$ 平分 $\angle P'M'Q'$ ，其方程为 $x'=1$ ，

$\therefore MN$ 平分 $\angle PMQ$ ，

$\therefore \triangle MPQ$ 内切圆的圆心所在的定直线方程为 $x=\sqrt{2}$ 。

故答案为： $x=\sqrt{2}$



题型 05 圆锥曲线第二定义

13. (2024·四川眉山·校考模拟预测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A 、 B 两点，若 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$ ，则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{5}{8}$

B. $\frac{6}{5}$

C. $\frac{7}{5}$

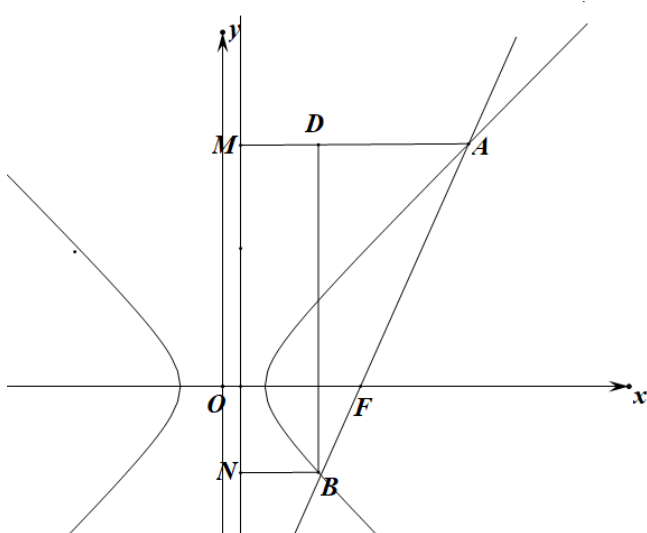
D. $\frac{9}{5}$

【答案】B

【解析】设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右准线为 l ，

过 A 、 B 分别作 $AM \perp l$ 于 M ， $BN \perp l$ 于 N ， $BD \perp AM$ 于 D ，

如图所示：



因为直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$,

所以直线 AB 的倾斜角为 60° ,

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ, |AD| = \frac{1}{2}|AB|,$$

$$\text{由双曲线的第二定义得: } |AM| - |BN| = |AD| = \frac{1}{e}(|AF| - |FB|) = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(|AF| + |FB|),$$

$$\text{又} \because \overline{AF} = 4\overline{FB},$$

$$\therefore \frac{3}{e}|\overline{FB}| = \frac{5}{2}|\overline{FB}|,$$

$$\therefore e = \frac{6}{5}$$

故选: B

14. (2024·江苏南京·高三南京市第一中学校考开学考试) 已知以 F 为焦点的抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上的两点 A, B , 满足 $\overline{AF} = \lambda \overline{FB} \left(\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 3 \right)$, 则弦 AB 的中点到 C 的准线的距离的最大值是 ()

- A. 2 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. 4

【答案】B

【解析】解法 1: 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\because |AF| = \lambda |BF|$, 由抛物线定义可知 $x_1 + 1 = \lambda(x_2 + 1)$ ①, $\therefore x_1 = \lambda x_2 + \lambda - 1$, 又

因为 $\overline{AF} = \lambda \overline{FB}$, 所以 $(1 - x_1, -y_1) = \lambda(x_2 - 1, y_2)$, 即 $1 - x_1 = \lambda(x_2 - 1)$ ②, 由①②可得: $x_1 = \lambda, x_2 = \frac{1}{\lambda}$

所以 $|AB| = AF + BF = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$. $\because \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 3$,

当 $\lambda = 3$ 时, $|AB| = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{16}{3}$, 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, $|AB| = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{16}{3}$,

$\therefore \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \right)_{\max} = \frac{16}{3}$ ，则弦 AB 的中点到 C 的准线的距离 $d = \frac{|AB|}{2}$ ， d 最大值是 $\frac{8}{3}$ 。

$\therefore$ 弦 AB 的中点到 C 的准线的距离的最大值是 $\frac{8}{3}$ ，

故选：B。

解法 2：弦 AB 的中点到 C 的准线的距离 $d = \frac{|AB|}{2} = \frac{\frac{2p}{\sin^2 \theta}}{2} = \frac{p}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta}$ ，根据结论

$$|\cos \theta| = \left| \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right| = \left| 1 - \frac{2}{\lambda + 1} \right| \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \quad \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right], \quad d = \frac{2}{\sin^2 \theta} \in \left[2, \frac{8}{3} \right],$$

故选：B。

15. (2024·全国·高三专题练习) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 内有一点 $P(1, -1)$ ， F 为椭圆的右焦点，在椭圆上

有一点 M ，使 $|MP| + 2|MF|$ 取得最小值，则点 M 坐标为 ()

A. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -1 \right)$

B. $\left(1, \frac{3}{2} \right), \left(1, -\frac{3}{2} \right)$

C. $\left(1, -\frac{3}{2} \right)$

D. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -1 \right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -1 \right)$

【答案】A

【解析】因为椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，所以椭圆得离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，

设点 M 到椭圆右准线的距离为 d ，根据椭圆第二定义有：

$$\frac{MF}{d} = e = \frac{1}{2}, \quad \text{所以 } d = 2MF, \quad \text{所以 } |MP| + 2|MF| = |MP| + d$$

表示椭圆上一点 M 到椭圆内定点 P 和到椭圆右准线的距离之和，

当 MP 垂直于右准线时， $|MP| + 2|MF|$ 取得最小值. 此时 M 的纵

坐标为 -1 ，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，求得 M 的横坐标为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 。

所以点 M 坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -1 \right)$ ，故 B, C, D 错误。

故选：A。

16. (2024·山东济宁·统考) 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线与该抛物线及其准线都相交，交点从左到右依次为 A, B, C 。若 $\overline{AB} = \sqrt{2}\overline{BF}$ ，则线段 BC 的中点到准线的距离为 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

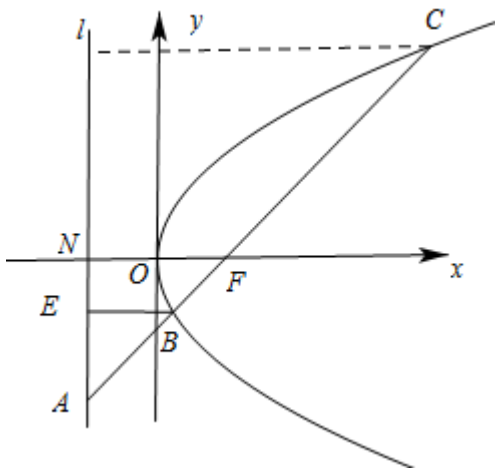
【答案】B

【解析】由抛物线的方程可得焦点 $F(1,0)$ ，渐近线的方程为： $x=-1$ ，

由 $\overline{AB} = \sqrt{2} \overline{BF}$ ，可得 $\frac{|AB|}{|BF|} = \sqrt{2}$

由于抛物线的对称性，不妨假设直线和抛物线位置关系如图示：作 BE 垂直于准线于 E ，

准线交 x 轴与 N ，则 $|BF| = |BE|$ ，



故 $\frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \sqrt{2}$ ，故 $\angle ABE = \frac{\pi}{4}$ ，

而 $BE \parallel x$ 轴，故 $\angle AFN = \frac{\pi}{4}$ ，

所以直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

所以直线 AB 的方程为 $y = x - 1$ ，

设 $B(x_1, y_1)$ ， $C(x_2, y_2)$ ，

联立 $\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，整理可得： $x^2 - 6x + 1 = 0$ ，

可得 $x_1 + x_2 = 6$ ，

所以 BC 的中点的横坐标为 3，

则线段 BC 的中点到准线的距离为 $3 - (-1) = 4$ ，

故选：B.

题型 06 焦半径问题

17. (2024·安徽·高二统考期末) 过抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P 、 Q 两点，若线段

PF 与 FQ 的长分别为 p 、 q ，则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于 ()

- A. $2a$ B. $\frac{1}{2a}$ C. $4a$ D. $\frac{4}{a}$

【答案】C

【解析】抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 转化成标准方程: $x^2=\frac{1}{a}y$,

$\therefore$ 焦点 F 坐标 $(0, \frac{1}{4a})$, 准线方程为 $x=-\frac{1}{4a}$,

设过 $F(0, \frac{1}{4a})$ 的 AB 直线方程为 $y=kx+\frac{1}{4a}$,

$$\therefore \begin{cases} y=kx+\frac{1}{4a} \\ y=ax^2 \end{cases}, \text{ 整理得 } ax^2-kx-\frac{1}{4a}=0.$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

由韦达定理可知: $x_1x_2=\frac{1}{4}$, $x_1+x_2=\frac{k}{a}$,

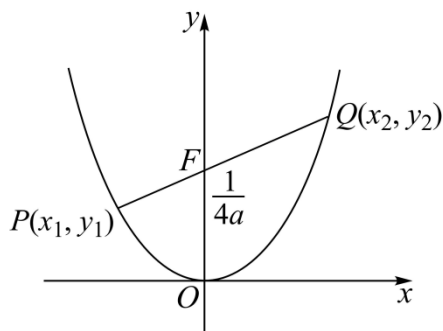
$$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)+\frac{1}{2a}=\frac{k^2}{a},$$

$$y_1y_2=(kx_1+\frac{1}{4a})(kx_2+\frac{1}{4a})=\frac{1}{16a^2},$$

根据抛物线性质可知, $p=y_1+\frac{a}{4}$, $q=y_2+\frac{p}{2}$,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{y_1+y_2+\frac{a}{2}}{(y_1+\frac{p}{4})(y_2+\frac{p}{4})}=\frac{\frac{k^2+1}{a}}{\frac{k^2+1}{4a^2}}=4a,$$

$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 的值为 $4a$,



故选: C.

18. (2024·全国·高三专题练习) 长为 11 的线段 AB 的两端点都在双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右支上, 则 AB 中点 M 的横坐标的最小值为 ()

A. $\frac{7}{5}$

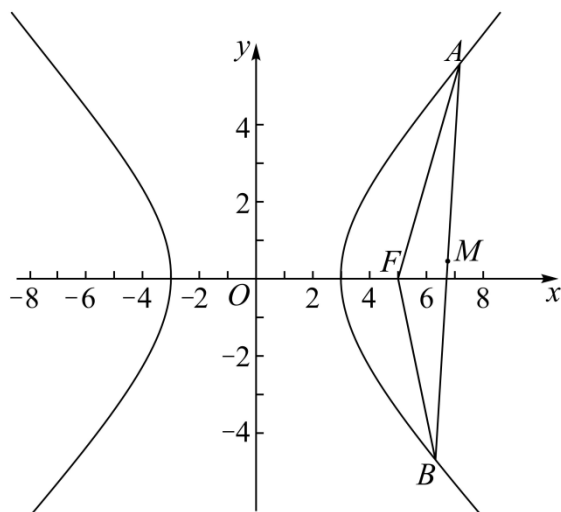
B. $\frac{51}{10}$

C. $\frac{33}{10}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

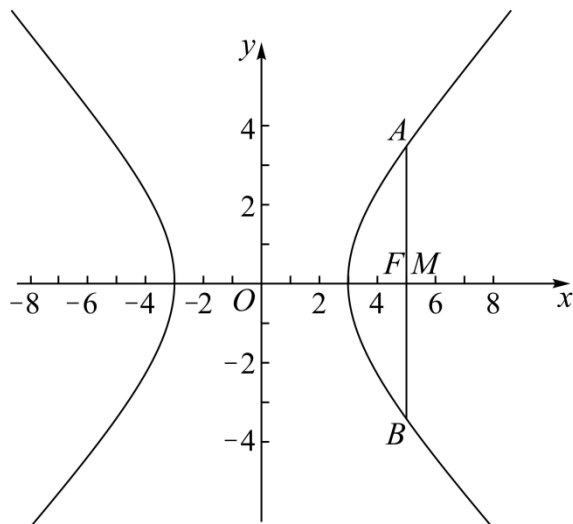


由双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 可知, $a=3$, $b=4$, $c=5$, 设 AB 中点 M 的横坐标为 m , $e=\frac{5}{3}$,

$$\text{则 } |FA| = \frac{5}{3} \left(x_A - \frac{a^2}{c} \right), \quad |FB| = \frac{5}{3} \left(x_B - \frac{a^2}{c} \right),$$

$$m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} |FA| + \frac{a^2}{c} + \frac{3}{5} |FB| + \frac{a^2}{c} \right) = \frac{3}{10} (|FA| + |FB|) + \frac{a^2}{c} \geq \frac{3}{10} |AB| + \frac{9}{5} = \frac{3}{10} \times 11 + \frac{9}{5} = \frac{51}{10}, \text{ 当且仅当 } F、$$

$A、B$ 共线且 AB 不垂直 x 轴时, m 取得最小值, 此时 $m = \frac{51}{10}$.



检验: 如图, 当 $F、A、B$ 共线且 $AB \perp x$ 轴时, $|AB|$ 为双曲线的通径, 则根据通径公式得

$$|AB| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{3} = \frac{32}{3} < 11, \text{ 所以 } AB \perp x \text{ 轴不满足题意.}$$

综上, 当 $F、A、B$ 共线且 AB 不垂直 x 轴时, m 取得最小值, 此时 $m = \frac{51}{10}$.

故选：B.

19. (2024·全国·高三专题练习) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点弦被焦点分成长是 m 和 n 的两部分, 则 m 与 n 的关系是 ()

- A. $m+n=mn$ B. $m+n=4$ C. $mn=4$ D. 无法确定

【答案】A

【解析】抛物线的焦点 $F(1, 0)$, 准线 $x = -1$,

设 $y = k(x-1)$, 把它代入 $y^2 = 4x$ 得 $k^2x^2 - 2(k^2+2)x + k^2 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1x_2 = 1$, 由抛物线定义可得 $|AF| = x_1 + 1$, $|BF| = x_2 + 1$,

$\therefore m+n = (x_1+1) + (x_2+1) = (x_1+x_2) + 2$, $mn = (x_1+1)(x_2+1) = x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 = (x_1+x_2) + 2$,

$\therefore m+n=mn$.

故选:A

20. 已知 F 为抛物线 $y^2 = x$ 的焦点, A, B 是该抛物线上的两点, $|AF| + |BF| = 3$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

【答案】C

【解析】抛物线的准线为 $l: x = -\frac{1}{4}$, 过 A, B 作准线的垂线, 垂足为 E, G , AB 的中点为 M , 过 M 作准线的垂线, 垂足为 MH ,

因为 A, B 是该抛物线上的两点, 故 $|AE| = |AF|$, $|BG| = |BF|$,

所以 $|AE| + |BG| = |AF| + |BF| = 3$,

又 MH 为梯形的中位线, 所以 $|MH| = \frac{3}{2}$, 故 M 到 y 轴的距离为 $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, 故选 C.

题型 07 圆锥曲线第三定义

21. (2024·贵州贵阳·高三统考期末) 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点的直线与抛物线交于 A, B 两点, 若 AB 的中点的纵坐标为 2, 则 $|AB|$ 等于 ()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

【答案】C

【解析】先根据抛物线的定义将焦点弦长问题转化为中点到准线距离的两倍, 进而用中点横坐标表示, 设直线 AB 的方程为: $x = my + 1$ (m 为常数), 与抛物线方程联立消去 x , 得到关于 y

的一元二次方程，利用中点公式和韦达定理求得 m 的值，进而得到中点的横坐标，从而求得线段 AB 的长度。抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标 $F(1,0)$ ，准线方程 $l: x = -1$ ，

设 AB 的中点为 M ，过 A, B, M 作准线 l 的垂线，垂足分别为 C, D, N ，则 MN 为梯形 $ABDC$ 的中位线，

$$\therefore |AB| = |AF| + |BF| = |AC| + |BD| = 2|MN| = 2(x_0 + 1),$$

$\therefore$ 直线 AB 过抛物线的焦点 F ， $\therefore$ 可设直线 AB 的方程为： $x = my + 1$ (m 为常数)，

代入抛物线的方程消去 x 并整理得： $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，

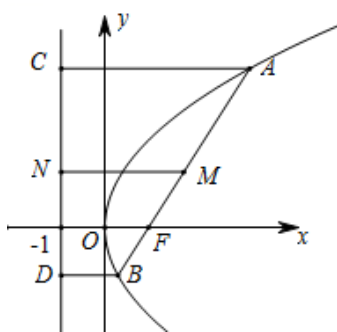
设 A, B 的纵坐标分别为 y_1, y_2 ，线段 AB 中点 $M(x_0, y_0)$ ，

$$\text{则 } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m = 2, \therefore m = 1,$$

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $x = y + 1$ ， $\therefore x_0 = y_0 + 1 = 2 + 1 = 3$ ，

$$\therefore |AB| = 2(3 + 1) = 8,$$

故选：C.



22. (2024·河北石家庄·高三石家庄二中校考开学考试) 过椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = \lambda$ ($\lambda > 1$) 上一点 P 作圆

$C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的切线，且切线的斜率小于 0，切点为 M ，交椭圆另一点 Q ，若 M 是线段 PQ 的中点，则直线 CM 的斜率 ()

- A. 为定值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 为定值 $\sqrt{2}$ C. 为定值 $2\sqrt{2}$ D. 随 λ 变化而变化

【答案】C

【解析】设 $M(x_0, y_0)$ ， $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，则
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = \lambda \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{4} + y_1^2 - y_2^2 = 0, \text{化简可得}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{4(y_1 + y_2)}. \text{因为 } M \text{ 是线段 } PQ \text{ 的中点, 故 } \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 \end{cases}.$$

代入化简可得 PQ 的斜率 $k_{PQ} = -\frac{x_0}{4y_0}$.

又直线 CM 与 PQ 垂直, 故 $-\frac{x_0}{4y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0-1} = -1$, 解得 $x_0 = \frac{4}{3}$, 代入圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 可得 $y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故直线 CM 的

斜率为 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{4}{3}-1} = 2\sqrt{2}$ 为定值.

故选: C

23. (2024·陕西咸阳·统考) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 上存在两点 A, B 关于直线 $y = x - 6$ 对称, 且线段 AB 的中点坐标为 $M(2, -4)$, 则双曲线 C 的离心率为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据线段 AB 的中点坐标为 $M(2, -4)$, 且 A, B 关于直线 $y = x - 6$ 对称,

A, B 在双曲线上, 整理可得 $\frac{b^2}{a^2} = 2$, 进而可得到离心率. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

且线段 AB 的中点坐标为 $M(2, -4)$,

则 $x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = -8$,

又 A, B 关于直线 $y = x - 6$ 对称,

所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \times 1 = -1$,

且 A, B 在双曲线上,

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$,

相减可得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$, 即 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$,

故 $\frac{4}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 0$, 即 $\frac{b^2}{a^2} = 2$,

离心率为 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$,

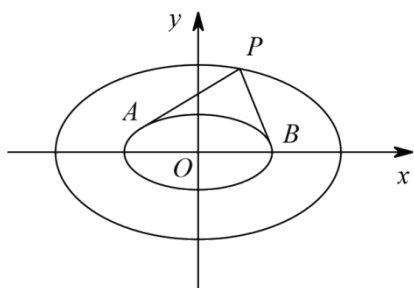
故选: B.

■ 题型 08 定比点差法与点差法

24. (2024·浙江温州·高三温州中学校考阶段练习) 如图, P 为椭圆 $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一动点,

过点 P 作椭圆 $E_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda (0 < \lambda < 1)$ 的两条切线 PA, PB , 斜率分别为 k_1, k_2 . 若 $k_1 \cdot k_2$ 为定值, 则 $\lambda =$

()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】设 $P(x_0, y_0)$

则过 P 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$

将直线方程与椭圆 E_2 联立可得
$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda \end{cases}$$

化简可得 $(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2k(y_0 - kx_0)x + a^2(y_0 - kx_0)^2 - \lambda a^2b^2 = 0$

因为相切,所以判别式

$$\Delta = [2a^2k(y_0 - kx_0)]^2 - 4(b^2 + a^2k^2)[a^2(y_0 - kx_0)^2 - \lambda a^2b^2] = 0$$

展开得 $4a^4k^2(y_0 - kx_0)^2 - 4a^2(b^2 + a^2k^2)[(y_0 - kx_0)^2 - \lambda b^2] = 0$

同时除以 $4a^2$ 可得

$$a^2k^2(y_0 - kx_0)^2 - (b^2 + a^2k^2)(y_0 - kx_0)^2 + \lambda b^2(b^2 + a^2k^2) = 0$$

合并可得 $-b^2(y_0 - kx_0)^2 + \lambda b^2(b^2 + a^2k^2) = 0$

同除以 $-b^2$, 得 $(y_0 - kx_0)^2 - \lambda b^2 - \lambda a^2k^2 = 0$

展开化简成关于 k 的方程可得 $(x_0^2 - \lambda a^2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - \lambda b^2 = 0$

因为有两直线,所以有两个不等的实数根.

因为 $k_1 \cdot k_2$ 为定值,可设 $k_1 \cdot k_2 = t$

由韦达定理, $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - \lambda b^2}{x_0^2 - \lambda a^2} = t$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/915024013003011321>