第6章　离散信号与系统的z域分析

BACK

6.1　离散信号的z变换

6.1.1　z变换的定义

序列$f(n)$的双边z变换，通常记为

$$F(z)=\mathscr{L}[f(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n} \tag{6-1}$$

这样，已知一个序列便可由式(6-1)确定一个z变换函数$F(z)$。反之，如果给定$F(z)$, 则$F(z)$的逆变换记作, 并$\mathscr{L}^{-1}[F(z)]$线积分给出

$$f(n)=\mathscr{L}^{-1}[F(z)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z \tag{6-2}$$

其中，C是包围$F(z)z^{n-1}$所有极点的逆时针闭合积分路线。

这样，式(6-1)和式(6-2)便构成了一对z变换对。为简便起见，$f(n)$与$F(z)$之间的关系仍简记为

$$f(n)\leftrightarrow F(z) \tag{6-3}$$

与拉氏变换类似，z变换亦有单边与双边之分。序列$f(n)$的单边z变换定义为

$$F(z)=\mathscr{L}[f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{n} \tag{6-4}$$

即求和只对n的非负值进行(不论$n<0$时$f(n)$是否为零)。

而$F(z)$的逆变换仍由式 (6-2)给出，只是将n的范围限定为

$n\geq 0$, 即

$$f(n)=\mathscr{L}^{-1}[F(z)]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{C}F(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z & n\geqslant 0\end{cases} \tag{6-5}$$

或写为

$$f(n)=\mathscr{L}^{-1}[F(z)]=\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z\right]U(n) \tag{6-6}$$

不难看出，式(6-4)等于$f(n)U(n)$的双边z变换，因而$f(n)$的单边z变换也可写为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)U(n)z^{-n} \tag{6-7}$$

由以上定义可见，如果$f(n)$是因果序列，则其单、双边z变换相同，否则二者不等。在拉氏变换中我们主要讨论单边拉氏变换，这是由于在连续系统中，非因果信号的应用较少。对于离散系统，非因果序列也有一定的应用范围，因此，本章以讨论单边z变换为主，适当兼顾双边z变换。讨论中在不致混淆的情况下，将两种变换统称为z变换，$f(n)$与$F(z)$ 的关系统一由式(6-3)表示。

由定义可知，序列的z变换是z的幂级数，只有当该级数收敛时，z变换才存在。

对任意给定的序列$f(n)$, 使z变换定义式幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$ 或 收敛的 $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ 复变量z在z平面上的取值区域，称为z变换$F(z)$的收敛域，也常用ROC表示。

【例6-1】 求以下有限长序列的双边z变换：(1) $\delta(n)$, (2) $f(n)=\{1, 2, 1\}_{-1}$。

解 (1) 由式(6-4)知，单位样值序列的z变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

即 $\delta(n)\leftrightarrow 1$。$F(z)$是与z无关的常数，因而其ROC是z的全平面。

(2) $f(n)$的双边z变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

由上式可知，除z=0和z=∞外，对任意z, $F(z)$有界，因此其ROC为$0<|z|<\infty$。

【例6-2】 求因果序列$f_1(n)=a^nU(n)$的双边z变换(a为常数)。解 $f_1(n)\leftrightarrow F_1(z)$ ，则

$$F_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

利用等比级数求和公式，上式仅当公比az^{-1}满足$|az^{-1}|<1$，即$|z|>|a|$时收敛，此时

$$F_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

故其收敛域为$|z|>|a|$, 这个收敛域在z平面上是半径为$|a|$的圆外区域，如图6-1所示。显然它也是单边z变换的收敛域。

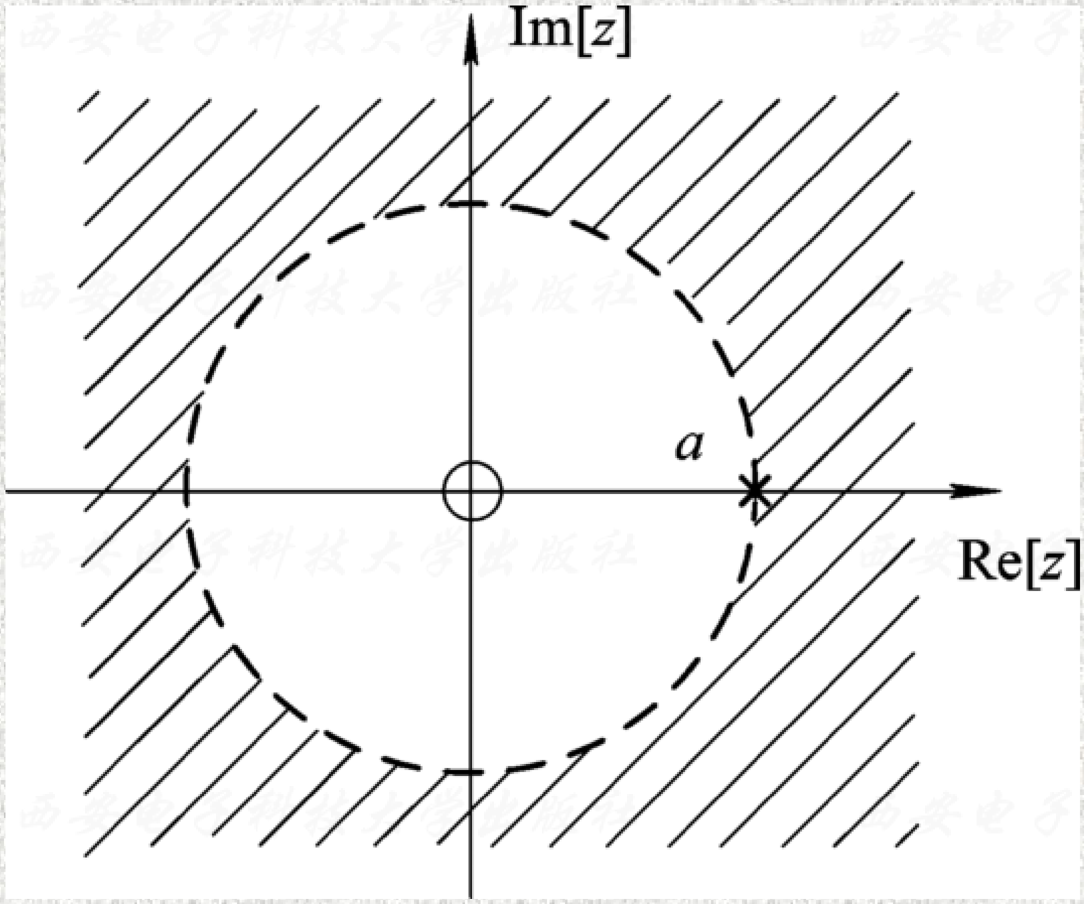

图 6-1　【例6-2】的收敛域

6.1.2 常用离散信号的单边z变换

1. 单位样值信号δ(n)

由【例6-1】已知

$$\delta(n) \leftrightarrow 1 \tag{6-8}$$

2. 单位阶跃序列U(n)

将$U(n)$代入式(6-4), 得

$$\mathscr{L}[U(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} U(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^{n}$$

若$|z^{-1}|<1$, 即$|z|>1$, 该级数收敛，此时有

$$\mathscr{L}[U(n)]=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

故

$$U(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-1} \tag{6-9}$$

3. 单边指数序列$a^nU(n)$(a为任意常数)

在【例6-2】中已求得

$$\mathscr{L}[a^nU(n)] = \frac{z}{z-a}$$

所以

$$a^nU(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \tag{6-10}$$

表6-1列出了典型序列的单边z变换，以供查阅。

表6-1　典型序列的单边z变换

序号	序列	单边 z 变换	收敛域
	$f(n)$	$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$	$\|z\|>R$
1	$\delta(n)$	1	$\|z\|\geqslant 0$
2	$\delta(n-m)(m>0)$	z^{-m}	$\|z\|>0$
3	$U(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
4	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
5	e^{bn}	$\frac{z}{z-e^b}$	$\|z\|>\|e^b\|$
6	$e^{jn\omega_0}$	$\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$	$\|z\|>1$
7	$\sin(n\omega_0)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
8	$\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
9	$\beta^n\sin(n\omega_0)$	$\frac{\beta z\sin\omega_0}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$	$\|z\|>\|\beta\|$
10	$\beta^n\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$	$\|z\|>\|\beta\|$

6.2　z变换的基本性质

6.2.1　线性

设 $f_1(n)\leftrightarrow F_1(z)$ $R_1<|z|<R_2$, R_1可为零，R_2可以为∞, 下同, 即

$$f_2(n)\leftrightarrow F_2(z)\text{，}R_3<|z|<R_4$$

则

$$a_1f_1(n)+a_2f_2(n)\leftrightarrow a_1F_1(z)+a_2F_2(z) \quad (6\text{-}11)$$

其中，a_1、a_2为任意常数。相加后的收敛域至少是两个函数$F_1(z)$、$F_2(z)$收敛域的重叠部分，有些情况下收敛域可能会扩大。

【例6-3】 求序列$\cos(\omega_0 n)U(n)$和$\sin(\omega_0 n)U(n)$的z变换。

解 因为

$$\cos(\omega_0 n)U(n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})U(n)$$

而

$$e^{j\omega_0 n}U(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}, \quad |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n}U(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}, \quad |z| > 1$$

由线性性质，即得

$$\cos(\omega_0 n)U(n) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}\right)=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \quad |z|>1$$

(6-12)

类似地，可得

$$\sin(\omega_0 n)U(n) \leftrightarrow \frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \quad |z|>1$$

(6-13)

6.2.2　移位特性

单边变换与双边变换的移位特性差别很大，下面分别进行讨论。

1. 双边*z*变换

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$， $R_1<|z|<R_2$，则

$$f(n-m) \leftrightarrow z^{-m}F(z)，\quad R_1<|z|<R_2 \qquad (6\text{-}14)$$

式中m为任意整数。

2. 单边z变换

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$ ， 则

$$f(n-m) \leftrightarrow z^{-m}\left[F(z)+\sum_{k=-m}^{-1} f(k) z^{-k}\right] \tag{6-15}$$

$$f(n+m) \leftrightarrow z^{m}\left[F(z)-\sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k}\right] \tag{6-16}$$

【例6-4】 求矩形序列$G_N(n)$的z变换。

解 因为

$$G_n(n)=U(n)-U(n-N),\quad U(n)\leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

由z线性及移位特性，得

$$G_N(n)\leftrightarrow \frac{z}{z-1}-z^{-N}\frac{z}{z-1}=\frac{z}{z-1}(1-z^{-N}),\quad |z|>1$$

【例6-5】 求序列 $f(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-mN)$ 的z变换。

解 因为 $\delta(n)\leftrightarrow 1$ ，由移位特性 $\delta(n-mN)\leftrightarrow z^{-mN}$ ，再由线性性质，得

$$f(n)\leftrightarrow 1+z^{-N}+z^{-2N}+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}(z^{-N})^{m}=\frac{1}{1-z^{-N}}$$

6.2.3　尺度变换特性

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$，$R_1 < |z| < R_2$，则

$$a^n f(n) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right), \quad R_1 < \left|\frac{z}{a}\right| < R_2 \tag{6-17}$$

式中a为任意常数。

【例6-6】　用尺度变换特性求$a^n U(n)$的z变换。

解　因为

$$U(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

由尺度变换特性

$$a^n U(n) \leftrightarrow \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

6.2.4 时间翻转特性

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$，$R_1 < |z| < R_2$ ， 则

$$f(-n) \leftrightarrow F(z^{-1}),\ R_1 < |z^{-1}| < R_2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1} \tag{6-18}$$

6.2.5　z域微分(时域线性加权)

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$，$R_1<|z|<R_2$，则

$$nf(n) \leftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z), \quad R_1<|z|<R_2 \tag{6-19}$$

【例6-7】　求$uU(n)$的z变换。

解　因为

$$U(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

由z域微分性质，可得

$$nU(n) \leftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \tag{6-20}$$

6.2.6　卷积定理

1. 时域卷积定理

若

$$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z),\quad R_1 < |z| < R_2$$

$$f_2(n) \leftrightarrow F_2(z),\quad R_3 < |z| < R_4$$

则

$$f_1(n) * f_2(n) \leftrightarrow F_1(z) F_2(z) \tag{6-21}$$

收敛域至少为两函数收敛域的重叠部分，有可能会扩大

。

【例6-8】 计算卷积$U(n)*U(n+1)$。

解 因为

$$U(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

由移位特性

$$U(n+1) \leftrightarrow \frac{z^2}{z-1}$$

(注意，本例中$U(n+1)$为非因果信号，故不能用单边变换求解)。

则由卷积定理可得

$$U(n) * U(n+1) \leftrightarrow \frac{z^3}{(z-1)^2} = z\left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

从而

$$U(n) * U(n+1) = \mathscr{L}^{-1}\left[z\frac{z}{z-1} + z\frac{z}{(z-1)^2}\right] = (n+2)U(n+1)$$

2. z域卷积定理(序列相乘)

若

$$f_1(n) \leftrightarrow F_1(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$
$$f_2(n) \leftrightarrow F_2(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$

则

$$f_1(n) f_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{F_1(\lambda) F_2(z/\lambda)}{\lambda} \mathrm{d}\lambda \tag{6-22}$$

式中, C是$F_1(\lambda)$与 $F_2\left(\frac{z}{\lambda}\right)$ 收敛域公共部分内逆时针方向的围线。这里对收敛域及积分围线的选取限制较严，从而限制了它的应用，不再赘述。

6.3 逆z变换

与拉氏变换类似，用z变换分析离散系统时，往往需要从变换函数F(z)确定对应的时间序列，即求$F(z)$的逆z变换。求逆z变换的方法有留数法、幂级数展开法(长除法)和部分分式展开法。下面我们只讨论用部分分式展开法求有理函数的逆变换。

设$F(z)$可以表示为

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_M z^M+b_{M-1}z^{M-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^N+a_{N-1}z^{N-1}+\cdots+a_1 z+a_0} \tag{6-23}$$

因为z变换的基本形式是 $\frac{z}{z-z_k}$，在利用部分分式展开的时候，通常先将 $\frac{F(z)}{z}$ 展开，然后每个分式乘以z，这样，对于一阶极点，$F(z)$便可以展开为 $\frac{z}{z-z_k}$ 形式。

另外，对于单边变换(或因果序列)，它的收敛域为 $|z|>R$, 为保证在 $z=\infty$ 处收敛，其分母多项式的阶次不低于分子多项式的阶次，即满足 $N\geq M$。只有双边变换才可能出现 $M>N$。

下面以 $N\geq M$ 为例说明部分分式展开法，此时 $\frac{F(z)}{z}$ 为真分式。

如果 $\dfrac{F(z)}{z}$ 只含一阶极点，则 $\dfrac{F(z)}{z}$ 可以展开为

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{k=0}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \qquad （其中\ z_0 = 0）$$

即

$$F(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A_k z}{z - z_k} \tag{6-24}$$

其中A_k可用下式计算

$$A_k = \left[(z - z_k) \frac{F(z)}{z} \right] \Bigg|_{z = z_k} \tag{6-25}$$

展开式中的每一项 $\dfrac{A_k z}{z - z_k}$ 的逆变换是以下两种情形之一：

$$A_k (z_k)^n U(n) \leftrightarrow \frac{A_k z}{z - z_k}, \quad |z| > |z_k| \tag{6-26}$$

或

$$-A_k (z_k)^n U(-n-1) \leftrightarrow \frac{A_k z}{z - z_k}, \quad |z| < |z_k| \tag{6-27}$$

根据$F(z)$收敛域与各极点位置的关系选择采用式(6-26)还是式(6-27)。如果$F(z)$的收敛域落在特定极点的外侧，则关于该极点的展开项的逆变换为因果序列，由式(6-26)得到；如果$F(z)$的收敛域落在特定极点的内侧，则关于该极点的展开项的逆变换是反因果序列，由式(6-27)得到。这样逐个考察各极点，就可得到完整的逆z变换。

如果 $\dfrac{F(z)}{z}$ 中含有高阶极点，比如$F(z)$除含有K个一阶极点外，在$z=z_i$处还含有一个r阶极点，此时$F(z)$应展开为

$$F(z)=\sum_{k=0}^{K}\frac{A_k z}{z-z_k}+\sum_{j=1}^{r}\frac{B_j z}{(z-z_i)^j} \qquad (6\text{-}28)$$

式中A_k仍按式(6-25)计算，而B_j由下式计算：

$$B_j=\frac{1}{(r-j)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r-j}}{\mathrm{d}z^{r-j}}(z-z_i)^r\frac{F(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=z_i} \qquad (6\text{-}29)$$

【例6-9】 已知$F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$，求$F(z)$可能的收敛域及相应的序列$f(n)$。

解 $F(z)$的两个极点是$z_1=1$和$z_2=0.5$, 故其可能的收敛域为$|z|<0.5$, $0.5<|z|<1$或$|z|>1$。先将$F(z)$展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-0.5}$$

其中

$$A_1=(z-1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=\frac{z}{z-0.5}\bigg|_{z=1}=2$$

$$A_2=(z-0.5)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0.5}=\frac{z}{z-1}\bigg|_{z=0.5}=-1$$

所以

$$F(z)=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-0.5}$$

(1) 若收敛域为$|z|<0.5$, 则两个极点均在收敛域的外侧，因此这两项的逆变换是反因果序列，由式(6-27)得

$$f(n)=\mathscr{Z}^{-1}[F(z)]=-2U(-n-1)+(0.5)^nU(-n-1)$$

(2) 若收敛域为$0.5<|z|<1$, 则收敛域在极点$z_2=0.5$的外侧，相应的逆变换是因果序列，由式(6-26)得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-z}{z-0.5}\right]=-(0.5)^n U(n)$$

而极点$z_1=1$在收敛域外侧，因此相应的逆变换是反因果序列。于是

$$f(n)=2U(n)-(0.5)^n U(n)=[2-(0.5)^n]U(n)$$

(3) 若收敛域为$|z|>1$, 则收敛域在所有极点的外侧，

因此各展开项的逆变换均为因果序列，所以

$$f(n)=2U(n)-(0.5)^nU(n)=[2-(0.5)^n]U(n)$$

【例6-10】 已知$F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}$，$|z|>1$， 求$f(n)$。

解 因为 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}$$

由式(6-25)和式(6-26)可得展开式

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{6}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{8}{z-1}+\frac{-13}{z-0.5}$$

所以 $$F(z)=6+\frac{2}{z}+\frac{8z}{z-1}-\frac{13z}{z-0.5}$$

因为$|z|>1$, 所以

$$f(n)=6\delta(n)+2\delta(n-1)+8U(n)-13(0.5)^nU(n)$$

6.4　利用MATLAB计算*z*变换和逆*z*变换

MATLAB中可以利用函数ztrans和iztrans分别计算符号函数的*z*变换和逆z变换，所得结果也是符号函数，而非数值结果。其一般调用形式为

F=ztrans(f)

f=iztrans(F)

其中，*f*和*F*分别是时间序列和*z*变换的数学表示式。

【例6-11】 (1) 用MATLAB求函数 $a^n\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)U(n)$ 的z变换；(2) 用MATLAB求 $F(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 的z逆变换。

解 程序代码如下：

```
%program ch6-11
clear;
format rat;                    % 近似有理数的表示
syms a n z pi;                 % syms定义符号变量
f=a.^n.*cos(pi*n/3);
Fz=ztrans(f,n,z);
```

Fz=simple(Fz),　　　　% 约分，该命令试图找出符号表达式Fz的代数上的简单形式，

```
F=z./(z+1)/(z+2);
fn=iztrans(F),
```

程序运行结果为

Fz=

−1/2 * z * (−2 * z+a)/(z^2−z * a+a^2)　　　即 $\dfrac{z(z-0.5a)}{z^2-az+a^2}$

fn=

−(−2)^n+(−1)^n　　　即 $-(2)^n+(-1)^n \quad n \geqslant 0$