

江西省临川一中等九校协作体中学 2024 年高三高考模拟训练评估卷（1）数学试题

注意事项

- 1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
- 2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
- 3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
- 4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
- 5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 用数学归纳法证明 $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^4 + n^2}{2}$ ，则当 $n = n + 1$ 时，左端应在 $n = n$ 的基础上加上（ ）

- A. $n^2 + 1$
- B. $(n + 1)^2$
- C. $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n + 1)^2$
- D. $\frac{(n+1)^4 + (n+1)^2}{2}$

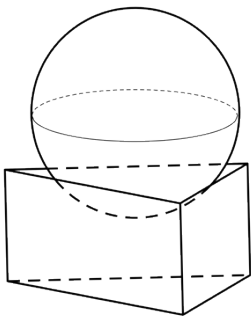
2. 已知函数 $f(x) = x - [x]$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数，则下列结论正确的是（ ）

- A. $f(x)$ 的值域是 $[0, 1]$
- B. $f(x)$ 是奇函数
- C. $f(x)$ 是周期函数
- D. $f(x)$ 是增函数

3. 一场考试需要 2 小时，在这场考试中钟表的时针转过的弧度数为（ ）

- A. $\frac{\pi}{3}$
- B. $-\frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{2\pi}{3}$
- D. $-\frac{2\pi}{3}$

4. 如图所示，直三棱柱的高为 4，底面边长分别是 5，12，13，当球与上底面三条棱都相切时球心到下底面距离为 8，则球的体积为（ ）



- A. $\frac{160\sqrt{3}\pi}{3}$
- B. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$
- C. $\frac{96\sqrt{3}\pi}{3}$
- D. $\frac{256\sqrt{2}\pi}{3}$

5.

我国古代数学巨著《九章算术》中，有如下问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？”这个问题用今天的白话叙述为：有一位善于织布的女子，每天织的布都是前一天的2倍，已知她5天共织布5尺，问这位女子每天分别织布多少？根据上述问题的已知条件，若该女子共织布 $\frac{35}{31}$ 尺，则这位女子织布的天数是（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

6. 用电脑每次可以从区间 $(0,3)$ 内自动生成一个实数，且每次生成每个实数都是等可能性的.若用该电脑连续生成3个实数，则这3个实数都小于1的概率为（ ）

- A. $\frac{4}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{1}{9}$

7. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别

交于 A, B 两点，若 $\overline{AB} \cdot \overline{BF_2} = 0, \frac{|BF_2|}{|AF_2|} = \frac{4}{5}$ ，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{13}$ B. 4 C. 2 D. $\sqrt{3}$

8. $a // \alpha, b // \beta, \alpha // \beta$ ，则 a 与 b 位置关系是（ ）

- A. 平行 B. 异面
C. 相交 D. 平行或异面或相交

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且满足 $f(1+x) = f(1-x)$ ，当 $x \in (0, 1]$ 时， $f(x) = -e^{ax}$ （其中 e 是自然对数的底数），若 $f(2020 - \ln 2) = 8$ ，则实数 a 的值为（ ）

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

10. 设 $a = 0.82^{0.5}$ ， $b = \sin 1$ ， $c = \lg 3$ ，则 a, b, c 三数的大小关系是

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

11. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ （ k 为常数），若目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为9，则 $k =$ （ ）

- A. -16 B. -6 C. $-\frac{27}{4}$ D. $\frac{27}{4}$

12. 已知角 α 的终边经过点 $(3, -4)$ ，则 $\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} =$

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{37}{15}$

C. $\frac{37}{20}$

D. $\frac{13}{15}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 的圆心且与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直的直线方程为_____.

14. 点 P_0 是曲线 $y = 3\ln x + x + k$ ($k \in \mathbf{R}$) 图象上的一个定点, 过点 P_0 的切线方程为 $4x - y - 1 = 0$, 则实数 k 的值为_____.

15. 双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右顶点为 A, B , 以 AB 为直径作圆 O , P 为双曲线右支上不同于顶点 B 的任一点, 连接 PA 交圆 O 于点 Q , 设直线 PB, QB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 = \lambda k_2$, 则 $\lambda =$ _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}, a = 2, b = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2\sin\theta$.

(1) 写出 C_1 的极坐标方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 已知点 M_1, M_2 的极坐标分别为 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $(2, 0)$, 直线 M_1M_2 与曲线 C_2 相交于 P, Q 两点, 射线 OP 与曲线 C_1 相交于点 A , 射线 OQ 与曲线 C_1 相交于点 B , 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 P 为椭圆 C 上一动点, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 为椭圆 C 上的两个动点, 当 $x_1x_2 + y_1y_2$ 为多少时, 点 O 到直线 MN 的距离为定值.

19. (12 分) 语音交互是人工智能的方向之一, 现在市场上流行多种可实现语音交互的智能音箱. 主要代表有小米公司的“小爱同学”智能音箱和阿里巴巴的“天猫精灵”智能音箱, 它们可以通过语音交互满足人们的部分需求. 某经销商为了了解不同智能音箱与其购买者性别之间的关联程度, 从某地区随机抽取了 100 名购买“小爱同学”和 100 名购买“天猫精灵”的人, 具体数据如下:

	“小爱同学”智能音箱	“天猫精灵”智能音箱	合计

男	45	60	105
女	55	40	95
合计	100	100	200

(1) 若该地区共有 13000 人购买了“小爱同学”，有 12000 人购买了“天猫精灵”，试估计该地区购买“小爱同学”的女性比购买“天猫精灵”的女性多多少人？

(2) 根据列联表，能否有 95% 的把握认为购买“小爱同学”、“天猫精灵”与性别有关？

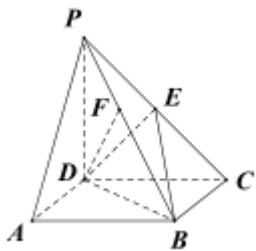
附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + \cos x (a \in R)$

- (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，证明 $f'(x) \geq 0$ ，在 $[0, +\infty)$ 恒成立；
- (2) 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值，求 a 的取值范围.

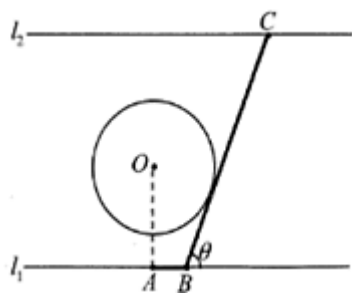
21. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是棱 PC 上的一点，满足 $PA \parallel$ 平面 BDE .



- (I) 证明： $PE = EC$ ；
- (II) 设 $PD = AD = BD = 1$ ， $AB = \sqrt{2}$ ，若 F 为棱 PB 上一点，使得直线 DF 与平面 BDE 所成角的大小为 30° ，求 $PF : FB$ 的值.

22. (10 分) 如图为某大江的一段支流，岸线 l_1 与 l_2 近似满足 $l_1 \parallel l_2$ ，宽度为 $7km$ ．圆 O 为江中的一个半径为 $2km$ 的小岛，小镇 A 位于岸线 l_1 上，且满足岸线 $l_1 \perp OA$ ， $OA = 3km$ ．现计划建造一条自小镇 A 经小岛 O 至对岸 l_2 的水上通道 ABC （图中粗线部分折线段， B 在 A 右侧），为保护小岛， BC 段设计成与圆 O 相切．设

$$\angle ABC = \pi - \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right).$$



- (1) 试将通道 ABC 的长 L 表示成 θ 的函数，并指出定义域；
- (2) 若建造通道的费用是每公里 100 万元，则建造此通道最少需要多少万元？

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

首先分析题目求用数学归纳法证明 $1+1+3+\dots+n^1=\frac{n^2+n^2}{2}$ 时，当 $n=k+1$ 时左端应在 $n=k$ 的基础上加上的式子，可以分别

使得 $n=k$ ，和 $n=k+1$ 代入等式，然后把 $n=k+1$ 时等式的左端减去 $n=k$ 时等式的左端，即可得到答案。

【详解】

当 $n=k$ 时，等式左端 $=1+1+\dots+k^1$ ，

当 $n=k+1$ 时，等式左端 $=1+1+\dots+k^1+k^1+1+k^1+1+\dots+(k+1)^1$ ，增加了项 $(k^1+1)+(k^1+1)+(k^1+3)+\dots+(k+1)^1$ 。

故选：C。

【点睛】

本题主要考查数学归纳法，属于中档题。

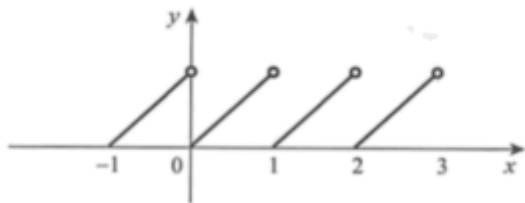
2、C

【解析】

根据 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数，可构建函数图象，即可分别判断值域、奇偶性、周期性、单调性，进而下结论。

【详解】

由 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数，其函数图象为



选项 A，函数 $f(x) \in [0,1)$ ，故错误；

选项 B，函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，故错误；

选项 C，函数 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，故正确；

选项 D，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1), [1,2), [2,3)$ 上是增函数，但在整个定义域范围上不具备单调性，故错误.

故选：C

【点睛】

本题考查对题干 $[x]$ 的理解，属于函数新定义问题，可作出图象分析性质，属于较难题.

3、B

【解析】

因为时针经过 2 小时相当于转了一圈的 $\frac{1}{6}$ ，且按顺时针转所形成的角为负角，综合以上即可得到本题答案.

【详解】

因为时针旋转一周为 12 小时，转过的角度为 2π ，按顺时针转所形成的角为负角，所以经过 2 小时，时针所转过的弧度数为 $-\frac{1}{6} \times 2\pi = -\frac{1}{3}\pi$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查正负角的定义以及弧度制，属于基础题.

4、A

【解析】

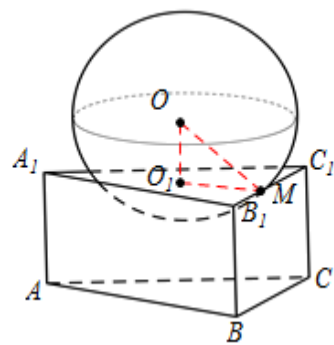
设球心为 O ，三棱柱的上底面 $A_1B_1C_1$ 的内切圆的圆心为 O_1 ，该圆与边 A_1B_1 切于点 D ，根据球的几何性质可得 $OO_1 \perp A_1B_1$ 为直角三角形，然后根据题中数据求出圆 O_1 半径，进而求得球的半径，最后可求出球的体积.

【详解】

如图，设三棱柱为 $ABC-A_1B_1C_1$ ，且 $AB = 12, AC = 5, BC = 13$ ，高 $AA_1 = 4$ 。

所以底面 ABC 为斜边是 BC 的直角三角形，设该三角形的内切圆为圆 O_1 ，圆 O_1 与边 BC 切于点 M ，

则圆 O_1 的半径为 $r = \frac{12+5-13}{2} = 2$ 。



设球心为 O ，则由球的几何知识得 OO_1M 为直角三角形，且 $OO_1 = 8 - 4 = 4$ ，

所以 $OM = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，

即球 O 的半径为 $2\sqrt{5}$ ，

所以球 O 的体积为 $\frac{4}{3} \times \pi \times (2\sqrt{5})^3 = \frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$ 。

故选 A。

【点睛】

本题考查与球有关的组合体的问题，解答本题的关键有两个：

- (1) 构造以球半径 R 、球心到小圆圆心的距离 d 和小圆半径 r 为三边的直角三角形，并在此三角形内求出球的半径，这是解决与球有关的问题时常用的方法。
- (2) 若直角三角形的两直角边为 a, b ，斜边为 c ，则该直角三角形内切圆的半径 $r = \frac{a+b-c}{2}$ ，合理利用中间结论可提高解题的效率。

高解题的效率。

5、B

【解析】

将问题转化为等比数列问题，最终变为求解等比数列基本量的问题。

【详解】

根据实际问题可以转化为等比数列问题，

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比 $q = 2$, 前 n 项和为 S_n , $S_5 = 5$, $S_m = \frac{35}{31}$, 求 m 的值.

因为 $S_5 = \frac{a_1(1-2^5)}{1-2} = 5$, 解得 $a_1 = \frac{5}{31}$, $S_m = \frac{\frac{5}{31}(1-2^m)}{1-2} = \frac{35}{31}$, 解得 $m = 3$. 故选 B.

【点睛】

本题考查等比数列的实际应用, 难度较易. 熟悉等比数列中基本量的计算, 对于解决实际问题很有帮助.

6、C

【解析】

由几何概型的概率计算, 知每次生成一个实数小于 1 的概率为 $\frac{1}{3}$, 结合独立事件发生的概率计算即可.

【详解】

$\therefore$ 每次生成一个实数小于 1 的概率为 $\frac{1}{3}$. $\therefore$ 这 3 个实数都小于 1 的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查独立事件同时发生的概率, 考查学生基本的计算能力, 是一道容易题.

7、A

【解析】

由已知得 $AB \perp BF_2$, $|BF_2| = 4x$, 由已知比值得 $|AF_2| = 5x$, $|AB| = 3x$, 再利用双曲线的定义可用 a 表示出 $|AF_1|$, $|AF_2|$, 用勾股定理得出 a, c 的等式, 从而得离心率.

【详解】

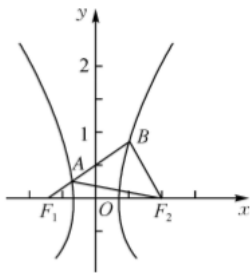
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, $\overrightarrow{AB} \neq 0$, $\overrightarrow{BF_2} \neq 0$, $\therefore \angle ABF_2 = 90^\circ$. 又 $\frac{|BF_2|}{|AF_2|} = \frac{4}{5}$, $\therefore$ 可令 $|BF_2| = 4x$, 则 $|AF_2| = 5x$, $|AB| = 3x$. 设

$|AF_1| = t$, 得 $|AF_2| - |AF_1| = |BF_1| - |BF_2| = 2a$, 即 $5x - t = (3x + t) - 4x = 2a$, 解得 $t = 3a$, $x = a$, $\therefore |BF_2| = 4a$,

$|BF_1| = |AB| + |AF_1| = 6a$,

由 $|BF_1|^2 + |BF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ 得 $(6a)^2 + (4a)^2 = (2c)^2$, $c^2 = 13a^2$, $c = \sqrt{13}a$, $\therefore$ 该双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{13}$.

故选: A.



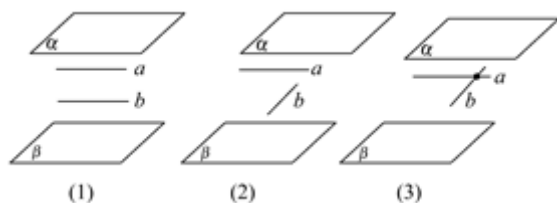
【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，解题关键是由向量数量积为 0 得出垂直关系，利用双曲线的定义把双曲线上的点 A, B 到焦点的距离都用 a 表示出来，从而再由勾股定理建立 a, c 的关系。

8、D

【解析】

结合图(1)，(2)，(3)所示的情况，可得 a 与 b 的关系分别是平行、异面或相交。



选 D.

9、B

【解析】

根据题意，求得函数周期，利用周期性和函数值，即可求得 a 。

【详解】

由已知可知， $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 是一个以 4 为周期的周期函数，

所以 $f(2020-\ln 2)=f(-\ln 2)=-f(\ln 2)=e^{a \ln 2}=2^a=8$ ，

解得 $a=3$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查函数周期的求解，涉及对数运算，属综合基础题。

10、C

【解析】

利用对数函数，指数函数以及正弦函数的性质和计算公式，将 a, b, c 与 $\sqrt{\frac{4}{5}}$ ， $\frac{1}{2}$ 比较即可。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/915114120321012000>