

senior high school education

第2课时 古典概型的应用



内容索引

01. 新知初探 · 自主学习

02. 课堂探究 · 素养提升

题型1 古典概型的综合应用

题型2 互斥事件的概率

题型3 对立事件的概率

题型4 复杂事件的概率

03. 课时作业(四十三)

01. 新知初探 · 自主学习

01. 新知初探 · 自主学习

教材要点

要点 互斥事件的概率加法公式

在一个试验中，如果事件A和事件B是互斥事件，则有 $P(A \cup B) = \underline{P(A) + P(B)}$.

特别地： $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ，则 $P(\bar{A}) = \underline{1 - P(A)}$.

一般地，如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

状元随笔

(1) 概率的加法公式的应用前提是“事件A与事件B互斥”，否则不可用。

(2) 对立事件的概率公式使用的前提必须是对立事件，否则不能使用。

(3) 当一个事件的概率不易直接求出，但其对立事件的概率易求时，可运用对立事件的概率公式，即可使用间接法求概率。

教材答疑

1.[教材2.2思考交流]

	E	E_5	E_{12}
A与B的关系	互斥	对立	互斥
$P(A)$	1	1	1
$P(B)$	1	5	1
$P(A \cup B)$	2	1	1
$P(A) + P(B)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2.[教材2.2思考交流]

当A，B不是互斥事件，概率加法公式不成立.

例如：一个袋子中有大小和质地相同的4个球，其中有2个红色球(标号为1和2)，2个绿色球(标号为3和4)，从袋中不放回地依次随机摸出2个球. 设事件 R_1 = “第一次摸到红球”， R_2 = “第二次摸到红球”，事件A “两个球中有红球”.

因为 $n(\Omega)=12$, $n(R_1)=n(R_2)=6$, $n(R_1 \cup R_2)=10$,

则 $P(R_1 \cup R_2)=\frac{10}{12} \neq P(R_1) + P(R_2)$,

这是因为 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\} \neq \emptyset$,

即事件 R_1 , R_2 不是互斥的.

基础自测

1.判断正误. (正确的画“√”, 错误的画“×”)

(1)事件A与事件B之和的概率等于事件A与事件B的概率之和. (×)

(2)设A, B是一个随机试验中的两个事件, 则 $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. (√)

(3)事件A与B互斥, 则有 $P(A) = 1 - P(B)$. (×)

(4)若 $P(A) + P(B) = 1$, 则事件A与事件B一定是对立事件. (×)

2. 甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$ ，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$ ，

则甲不输的概率为()

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

答案： A

解析： $P(\text{甲不输}) = P(\text{和棋}) + P(\text{甲获胜}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

3. 在抛掷一枚骰子的试验中，出现各点的概率都是 $\frac{1}{6}$.事件A表示“小于5的偶数点出现”，事件B表示“小于5的点数出现”，则一次试验中，事件 $A \cup C$ (C是事件B的对立事件)发生的概率是()

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

答案： C

解析： 由题意可知事件C表示“大于或等于5的点数出现”，事件A与事件C是互斥事件，由互斥事件的概率加法公式可得 $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$.

4. 中国乒乓球队甲、乙两名队员参加奥运会乒乓球女子单打比赛，甲夺得冠军的概率为 $\frac{3}{7}$ ，乙夺得冠军的概率为 $\frac{1}{4}$ ，那么中国队夺得女子乒乓球单打冠军的概率为_____.

答案： $\frac{19}{28}$

解析： 由于事件“中国队夺得女子乒乓球单打冠军”包括事件“甲夺得冠军”和“乙夺得冠军”，但这两个事件不可能同时发生，即彼此互斥，所以由互斥事件概率的加法公式得，中国队夺得女子乒乓球单打冠军的概率为 $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} = \frac{19}{28}$.

02. 课堂探究 · 素养提升

02. 课堂探究 · 素养提升

题型1 古典概型的综合应用——师生共研

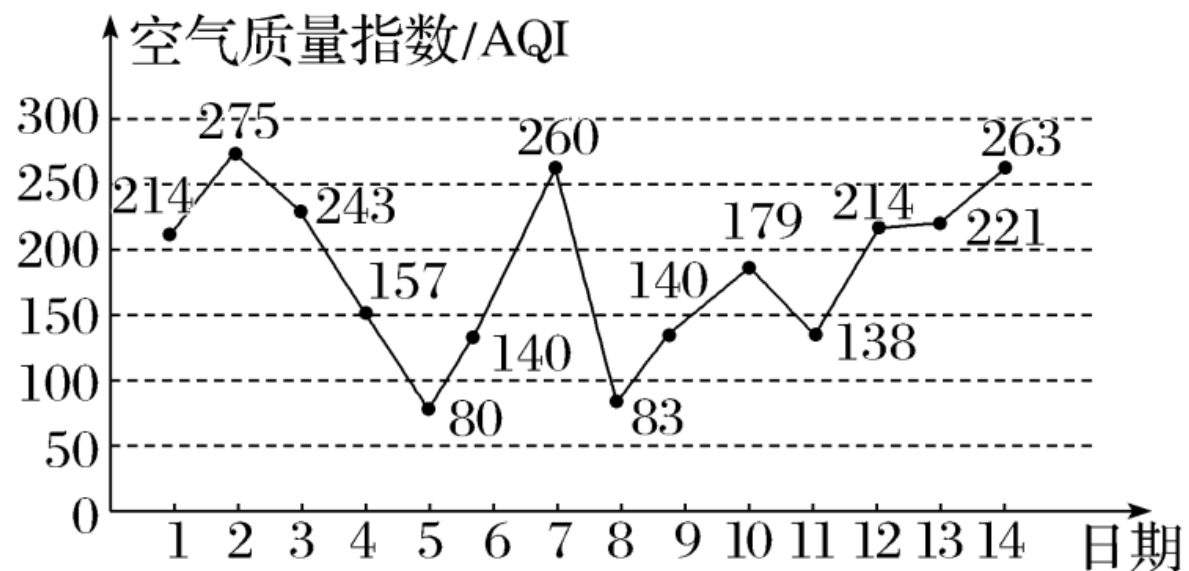
例1 如图所示是某市2024年2月1日至14日的空气质量指数趋势图，空气质量指数(AQI)小于100表示空气质量优良，空气质量指数大于200表示空气重度污染，某人随机选择2月1日至2月12日中的某一天到达该市，并停留3天.

(1)求此人到达当日空气质量优良的概率；

解析：在2月1日至2月12日这12天中，只有5日、8日这两天的空气质量优良，

所以此人到达当日空气质量优良的概率 $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

(2)求此人在该市停留期间至多有1天空气重度污染的概率.



解析：根据题意，事件“此人在该市停留期间至多有1天空气重度污染”，即“此人在该市停留期间有0天空气重度污染或仅有1天空气重度污染”。

“此人在该市停留期间有0天空气重度污染”等价于“此人到达该市的日期是4日或8日或9日”。

“此人在该市停留期间仅有1天空气重度污染”等价于“此人到达该市的日期是3日或5日或6日或7日或10日”。

所以“此人在该市停留期间至多有1天空气重度污染”包含8个样本点，

所以“此人停留期间至多有1天空气重度污染”的概率为 $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

方法归纳

概率问题常常与统计问题结合在一起考查，涉及方程或者函数的有关概率问题，考查的是如何计算要求的事件A所包含的样本点的个数，通常需要将函数与方程的知识应用其中。解决此类问题，只需要利用函数、方程知识找出满足条件的参数的范围，从而确定样本点的个数，最后利用古典概型的概率计算公式进行计算。

跟踪训练1 把一枚骰子抛掷2次，观察出现的点数，并记第一次出现的点数为a，第二次出现的点数为b，试就方程组
$$\begin{cases} ax + by = 3, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
解的情况，解答下列各题：

解析：若第一次出现的点数为 a ，第二次出现的点数为 b 记为有序数值组 (a, b) ，则所有可能出现的结果有：

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2),$
 $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3,$
 $5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1),$
 $(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6,$
 $4), (6, 5), (6, 6),$ 共36种.

$$\text{由方程组} \begin{cases} ax + by = 3, \\ x + 2y = 2 \end{cases} \text{ 可得} \begin{cases} (2a - b)x = 6 - 2b \\ (2a - b)y = 2a - 3 \end{cases}$$

(1)求方程组只有一个解的概率；

解析：若方程组只有一个解，则 $b \neq 2a$ ，满足 $b = 2a$ 的有(1, 2), (2, 4), (3, 6)，故适合 $b \neq 2a$ 的有 $36 - 3 = 33$ (个)。

其概率为 $P_1 = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$ 。

(2)求方程组只有正数解的概率.

解析: 方程组只有正数解, 需满足 $b-2a \neq 0$ 且
$$\begin{cases} x = \frac{6-2b}{2a-b} > 0, \\ y = \frac{2a-3}{2a-b} > 0. \end{cases}$$

分两种情况: 当 $2a > b$ 时, 得 $\begin{cases} a > \frac{3}{2}, \\ b < 3, \end{cases}$ 当 $2a < b$ 时, 得 $\begin{cases} a < \frac{3}{2}, \\ b > 3. \end{cases}$

易得包含的样本点有13个: (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), 因此所求的概率 $P_2 =$

$$\frac{13}{36}.$$

题型2 互斥事件的概率——师生共研

例2 黄种人群中各种血型的人所占的比例见下列：

血型	A	B	AB	O
该血型的人所占的比例/%	28	29	8	35

已知同种血型的人可以互相输血，O型血可以给任何一种血型的人输血，任何人的血都可以输给AB型血的人，其他不同血型的人不能互相输血。小明是B型血，若他因病需要输血，**本题表格中所给的某种血型的人所占的比例其实就是该血型的概率。**

(1)任找一个人，其血可以输给小明的概率是多少？

解析：对任何一个人，其血型为A，B，AB，O型血的事件分别记为A'，B'，C'，D'，它们是互斥的．由已知，有 $P(A')=0.28$ ， $P(B')=0.29$ ， $P(C')=0.08$ ， $P(D')=0.35$ ．

因为B，O型血可以输给B型血的人，所以“任找一个人，其血可以输给小明”为事件 $B'+D'$ ，根据互斥事件的概率加法公式，得 $P(B'+D')=P(B')+P(D')=0.29+0.35=0.64$ ．

(2)任找一个人，其血不能输给小明的概率是多少？

解析：由于A，AB型血不能输给B型血的人，故“任找一个人，其血不能输给小明”为事件 $A'+C'$ ，根据互斥事件的概率加法公式，得 $P(A'+C')=P(A')+P(C')=0.28+0.08=0.36$.

方法归纳

运用互斥事件的概率加法公式解题的步骤：

- (1) 确定题中哪些事件彼此互斥；
- (2) 将待求事件拆分为几个互斥事件之和；
- (3) 先求各互斥事件分别发生的概率，再求和。

跟踪训练2 在数学考试中，小明的成绩在90分(及90分)以上的概率是0.18，在80分~89分(包括80分和89分，下同)的概率是0.51，在70分~79分的概率是0.15，在60分~69分的概率是0.09，在60分以下的概率是0.07，求：

(1)小明在数学考试中取得80分及以上的成绩的概率；

解析：分别记小明的成绩在“90分(及90分)以上”“80分~89分”“70分~79分”“60分~69分”为事件A，B，C，D，这四个事件彼此互斥.

小明的成绩在80分及以上的概率是 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.18+0.51=0.69$.

(2)小明数学考试及格的概率.

解析：方法一 小明数学考试及格的概率是

$$P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=0.18+0.51+0.15+0.09=0.93.$$

方法二 小明数学考试不及格的概率是0.07,

所以小明数学考试及格的概率是 $1-0.07=0.93$.

题型3 对立事件的概率——师生共研

例3 一盒中装有4种除颜色外其余均相同的12个小球，从中随机取出1个球，取出红球的概率为 $\frac{5}{12}$ ，取出黑球的概率为 $\frac{1}{3}$ ，取出白球的概率为 $\frac{1}{6}$ ，取出绿球的概率为 $\frac{1}{12}$.求：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/915133101021011320>