

2023-2024 学年安徽省炳辉中学高三第一次调研测试数学试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 过抛物线 C 上两点 A, B 分别作抛物线的两条切线 PA, PB , P 为两切线的交点 O 为坐标原点

若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 则直线 OA 与 OB 的斜率之积为 ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. -3 C. $-\frac{1}{8}$ D. -4

2. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上, $PA = \sqrt{2}$, $PB = \sqrt{14}$, $AB = 4$, $CA = CB = \sqrt{10}$, 面 $PAB \perp$ 面

ABC , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

3. 复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数, 则 $z =$ ()

- A. i B. $-2i$ C. $2i$ D. $-i$

4. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$ 在区间 $(a, a+5)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[-5, 0)$ B. $(-5, 0)$ C. $[-3, 0)$ D. $(-3, 0)$

5. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 120^\circ$, $\triangle SAD$ 是等边三角形, 且

$SA = AB = 2\sqrt{3}$; 若点 P 在四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球面上运动, 记点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 d , 若平面 $SAD \perp$

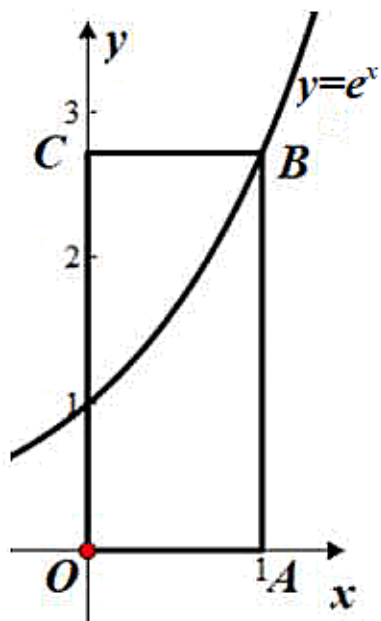
平面 $ABCD$, 则 d 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{13} + 1$ B. $\sqrt{13} + 2$
C. $\sqrt{15} + 1$ D. $\sqrt{15} + 2$

6. 某人用随机模拟的方法估计无理数 e 的值, 做法如下: 首先在平面直角坐标系中, 过点 $A(1, 0)$ 作 x 轴的垂线与曲线

$y = e^x$ 相交于点 B , 过 B 作 y 轴的垂线与 y 轴相交于点 C (如图), 然后向矩形 $OABC$ 内投入 M 粒豆子, 并统计出

这些豆子在曲线 $y = e^x$ 上方的有 N 粒 ($N < M$), 则无理数 e 的估计值是 ()



- A. $\frac{N}{M-N}$ B. $\frac{M}{M-N}$ C. $\frac{M-N}{N}$ D. $\frac{M}{N}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有 4 个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是()

- A. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$
C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

8. 若 x, a, b 均为任意实数, 且 $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 1$, 则 $(x-a)^2 + (\ln x - b)^2$ 的最小值为 ()

- A. $3\sqrt{2}$ B. 18 C. $3\sqrt{2} - 1$ D. $19 - 6\sqrt{2}$

9. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = 3$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. 6 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

10. 为了进一步提升驾驶人交通安全文明意识, 驾考新规要求驾校学员必须到街道路口执勤站岗, 协助交警劝导交通. 现有甲、乙等 5 名驾校学员按要求分配到三个不同的路口站岗, 每个路口至少一人, 且甲、乙在一路口的分配方案共有()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

11. 阿波罗尼斯 (约公元前 262~190 年) 证明过这样的命题: 平面内到两定点距离之比为常数 k ($k > 0, k \neq 1$)

的点的轨迹是圆.后人将这个圆称为阿氏圆.若平面内两定点 A, B 间的距离为 2, 动点 P 与 A, B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 P, A, B 不共线时, $\triangle PAB$ 的面积的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

12. 已知定点 $F_1(-4,0), F_2(4,0)$, N 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的任意一点, 点 F_1 关于点 N 的对称点为 M , 线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P , 则点 P 的轨迹是 ()

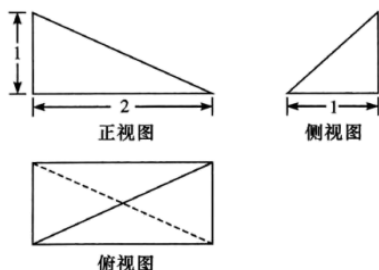
- A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 圆

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ 在 $[0, \frac{m}{2}]$ 和 $[3m, \pi]$ 上均单调递增, 则实数 m 的取值范围为_____.

14. 函数 $f(x) = \frac{2 + \ln 2x}{x^2}$ 的图象在 $x = \frac{e}{2}$ 处的切线方程为_____.

15. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体外接球的表面积是_____.



16. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是互相垂直的单位向量, 若 $\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 的夹角为 60° , 则实数 λ 的值是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某商店举行促销反馈活动, 顾客购物每满 200 元, 有一次抽奖机会 (即满 200 元可以抽奖一次, 满 400 元可以抽奖两次, 依次类推). 抽奖的规则如下: 在一个不透明口袋中装有编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个完全相同的小球, 顾客每次从口袋中摸出一个小球, 共摸三次, 每次摸出的小球均不放回口袋, 若摸得的小球编号一次比一次大 (如 1, 2, 5), 则获得一等奖, 奖金 40 元; 若摸得的小球编号一次比一次小 (如 5, 3, 1), 则获得二等奖, 奖金 20 元; 其余情况获得三等奖, 奖金 10 元.

(1) 某人抽奖一次, 求其获奖金额 X 的概率分布和数学期望;

(2) 赵四购物恰好满 600 元, 假设他不放弃每次抽奖机会, 求他获得的奖金恰好为 60 元的概率.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c(\sin 2A - \cos B \sin C) = \frac{1}{2}b \sin 2C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $C = \frac{\pi}{4}, c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分) 甲、乙、丙三名射击运动员射中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}, a, a$ ($0 < a < 1$), 三人各射击一次, 击中目标的次数记为 ξ .

(1) 求 ξ 的分布列及数学期望;

(2) 在概率 $P(\xi = i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 中, 若 $P(\xi = 1)$ 的值最大, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, P, Q 为抛物线 C 上的两个动点, O 为坐标原点.

(I) 若点 F 在线段 PQ 上, 求 $|PQ|$ 的最小值;

(II) 当 $OP \perp PQ$ 时, 求点 Q 纵坐标的取值范围.

21. (12 分) 已知动圆 E 与圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 外切, 并与直线 $x = -\frac{1}{2}$ 相切, 记动圆圆心 E 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $Q(-2, 0)$ 的直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 若曲线 C 上存在点 P 使得 $\angle APB = 90^\circ$, 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n}$ 且 $a_1 = \frac{1}{2}$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} + 2n \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

设出 A, B 的坐标, 利用导数求出过 A, B 的切线的斜率, 结合 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 可得 $x_1 x_2 = -1$. 再写出 OA, OB

所在直线的斜率，作积得答案.

【详解】

解：设 $A(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, $B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$,

由抛物线 $C: x^2=4y$, 得 $y=\frac{1}{4}x^2$, 则 $y'=\frac{1}{2}x$.

$$\therefore k_{AP} = \frac{1}{2}x_1, \quad k_{PB} = \frac{1}{2}x_2,$$

由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 可得 $\frac{1}{4}x_1x_2 = -1$, 即 $x_1x_2 = -4$.

$$\text{又 } k_{OA} = \frac{x_1}{4}, \quad k_{OB} = \frac{x_2}{4},$$

$$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{x_1x_2}{16} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

故选：A.

点睛：(1) 本题主要考查抛物线的简单几何性质，考查直线和抛物线的位置关系，意在考查学生对这些基础知识的掌握能力和分析推理能力.(2) 解答本题的关键是解题的思路，由于与切线有关，所以一般先设切点，先设 $A(2a, a^2)$, $B(2b, b^2)$, $a \neq b$, 再求切线 PA, PB 方程,

求点 P 坐标，再根据 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 得到 $ab = -1$, 最后求直线 OA 与 OB 的斜率之积. 如果先设点 P 的坐标，计算量就大一些.

2、D

【解析】

由题意画出图形，找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图：设 AB 的中点为 D ；

$$\because PA = \sqrt{2}, \quad PB = \sqrt{14}, \quad AB = 4,$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 为直角三角形，且斜边为 } AB, \text{ 故其外接圆半径为：} r = \frac{1}{2}AB = AD = 2;$$

设外接球球心为 O ；

$$\because CA = CB = \sqrt{10}, \quad \text{面 } PAB \perp \text{面 } ABC,$$

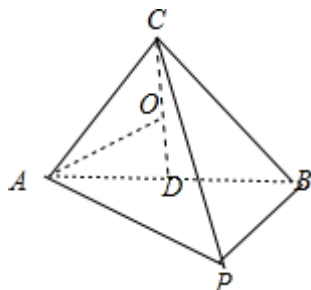
$$\therefore CD \perp AB \text{ 可得 } CD \perp \text{面 } PAB; \text{ 且 } DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}.$$

$\therefore O$ 在 CD 上；

故有： $AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}}$ ；

$\therefore$ 球 O 的表面积为： $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}$ 。

故选： D 。



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题。

3、 B

【解析】

复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数，则实部为 0 ，虚部不为 0 ，求出 a ，即得 z 。

【详解】

$\because z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数，

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -1.$$

$$\therefore z = -2i.$$

故选： B 。

【点睛】

本题考查复数的分类，属于基础题。

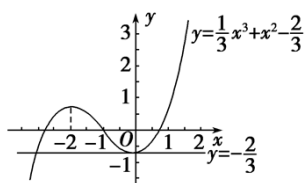
4、 C

【解析】

求函数导数，分析函数单调性得到函数的简图，得到 a 满足的不等式组，从而得解。

【详解】

由题意， $f'(x) = x^2 + 2x = x(x + 2)$ ，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ ， $(0, +\infty)$ 上是增函数，在 $(-2, 0)$ 上是减函数，作出其图象如图所示。



令 $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$, 得 $x=0$ 或 $x=-3$,

则结合图象可知, $\begin{cases} -3 \leq a < 0 \\ a+5 > 0 \end{cases}$ 解得 $a \in [-3, 0)$,

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了利用函数导数研究函数的单调性, 进而研究函数的最值, 属于常考题型.

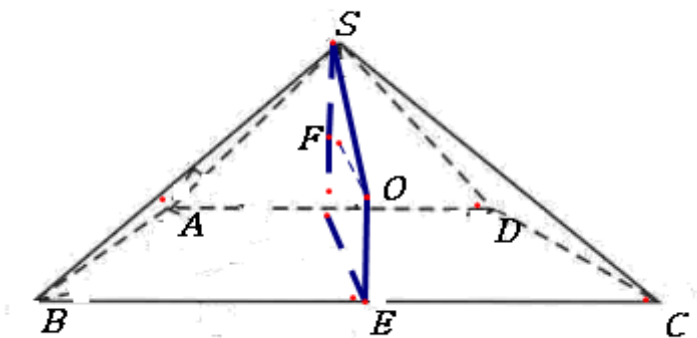
5、A

【解析】

根据平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, 则球心在过 BC 的中点 E 的面的垂线上, 又 $\triangle SAD$ 是等边三角形, 所以球心也在过 $\triangle SAD$ 的外心 F 面的垂线上, 从而找到球心, 再根据已知量求解即可.

【详解】

依题意如图所示:



取 BC 的中点 E , 则 E 是等腰梯形 $ABCD$ 外接圆的圆心,

取 F 是 $\triangle SAD$ 的外心, 作 $OE \perp$ 平面 $ABCD$, $OF \perp$ 平面 SAB ,

则 O 是四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球球心, 且 $OF=3$, $SF=2$,

设四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球半径为 R , 则 $R^2 = SF^2 + OF^2 = 13$, 而 $OE=1$,

所以 $d_{\max} = R + OE = \sqrt{13} + 1$,

故选: A.

【点睛】

本题考查组合体、球，还考查空间想象能力以及数形结合的思想，属于难题.

6、D

【解析】

利用定积分计算出矩形 $OABC$ 中位于曲线 $y = e^x$ 上方区域的面积，进而利用几何概型的概率公式得出关于 e 的等式，解出 e 的表达式即可.

【详解】

在函数 $y = e^x$ 的解析式中，令 $x = 1$ ，可得 $y = e$ ，则点 $B(1, e)$ ，直线 BC 的方程为 $y = e$ ，

矩形 $OABC$ 中位于曲线 $y = e^x$ 上方区域的面积为 $S = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x) \Big|_0^1 = 1$ ，

矩形 $OABC$ 的面积为 $1 \times e = e$ ，

由几何概型的概率公式得 $\frac{N}{M} = \frac{1}{e}$ ，所以， $e = \frac{M}{N}$ 。

故选：D.

【点睛】

本题考查利用随机模拟的思想估算 e 的值，考查了几何概型概率公式的应用，同时也考查了利用定积分计算平面区域的面积，考查计算能力，属于中等题.

7、D

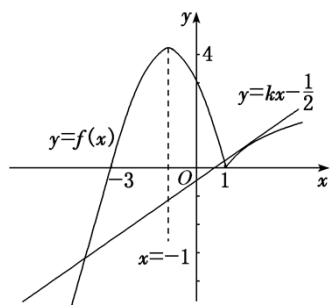
【解析】

由已知可将问题转化为： $y = f(x)$ 的图象和直线 $y = kx - \frac{1}{2}$ 有 4 个交点，作出图象，由图可得：点 $(1, 0)$ 必须在直线 $y = kx - \frac{1}{2}$ 的下方，即可求得： $k > \frac{1}{2}$ ；再求得直线 $y = kx - \frac{1}{2}$ 和 $y = \ln x$ 相切时， $k = \frac{\sqrt{e}}{e}$ ；结合图象即可得解.

【详解】

若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有 4 个不相等的实数根，

则 $y = f(x)$ 的图象和直线 $y = kx - \frac{1}{2}$ 有 4 个交点. 作出函数 $y = f(x)$ 的图象，如图，



故点(1,0)在直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 的下方.

$$\therefore k \times 1 - \frac{1}{2} > 0, \text{ 解得 } k > \frac{1}{2}.$$

当直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 和 $y=\ln x$ 相切时, 设切点横坐标为 m ,

$$\text{则 } k = \frac{\ln m + \frac{1}{2}}{m} = \frac{1}{m}, \therefore m = \sqrt{e}.$$

此时, $k = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{e}}{e}$, $f(x)$ 的图象和直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 有 3 个交点, 不满足条件,

故所求 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$,

故选 D..

【点睛】

本题主要考查了函数与方程思想及转化能力, 还考查了导数的几何意义及计算能力、观察能力, 属于难题.

8、D

【解析】

该题可以看做是圆上的动点到曲线 $y = \ln x$ 上的动点的距离的平方的最小值问题, 可以转化为圆心到曲线 $y = \ln x$ 上的动点的距离减去半径的平方的最值问题, 结合图形, 可以断定那个点应该满足与圆心的连线与曲线在该点的切线垂直的问题来解决, 从而求得切点坐标, 即满足条件的点, 代入求得结果.

【详解】

由题意可得, 其结果应为曲线 $y = \ln x$ 上的点与以 $C(-2, 3)$ 为圆心, 以 1 为半径的圆上的点的距离的平方的最小值, 可

以求曲线 $y = \ln x$ 上的点与圆心 $C(-2, 3)$ 的距离的最小值, 在曲线 $y = \ln x$ 上取一点 $M(m, \ln m)$, 曲线有 $y = \ln x$ 在点

M 处的切线的斜率为 $k' = \frac{1}{m}$, 从而有 $k_{CM} \cdot k' = -1$, 即 $\frac{\ln m - 3}{m + 2} \cdot \frac{1}{m} = -1$, 整理得 $\ln m + m^2 + 2m - 3 = 0$, 解得

$m = 1$, 所以点 $(1, 0)$ 满足条件, 其到圆心 $C(-2, 3)$ 的距离为 $d = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$, 故其结果为

$$(3\sqrt{2}-1)^2=19-6\sqrt{2},$$

故选 D.

【点睛】

本题考查函数在一点处切线斜率的应用，考查圆的程，两条直线垂直的斜率关系，属中档题.

9、D

【解析】

利用向量的加法的平行四边形法则，判断四边形的形状，推出结果即可.

【详解】

解：非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，可知两个向量垂直， $|\vec{a}| = 3$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

说明以向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 为邻边， $\vec{a} + \vec{b}$ 为对角线的平行四边形是正方形，所以则 $|\vec{b}| = 3$.

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的几何意义，向量加法的平行四边形法则的应用，考查分析问题解决问题的能力，属于基础题.

10、C

【解析】

先将甲、乙两人看作一个整体，当作一个元素，再将这四个元素分成 3 个部分，每一个部分至少一个，再将这 3 部分分配到 3 个不同的路口，根据分步计数原理可得选项.

【详解】

把甲、乙两名交警看作一个整体，5 个人变成了 4 个元素，再把这 4 个元素分成 3 部分，每部分至少有 1 个人，共有 C_4^2 种方法，再把这 3 部分分到 3 个不同的路口，有 A_3^3 种方法，由分步计数原理，共有 $C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$ 种方案。

故选：C.

【点睛】

本题主要考查排列与组合,常常运用捆绑法，插空法，先分组后分配等一些基本思想和方法解决问题，属于中档题.

11、A

【解析】

根据平面内两定点 A ， B 间的距离为 2，动点 P 与 A ， B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，利用直接法求得轨迹，然后利用数形结合求解.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/915221121340011140>