第5章　微分运动和速度

学习内容：1 坐标系相对于固定坐标系的微分运动

2 机器人关节相对于固定坐标系的微分运动

3 雅克比矩阵的相关运算及其与速度之间的关系

学习重点：雅克比矩阵的计算

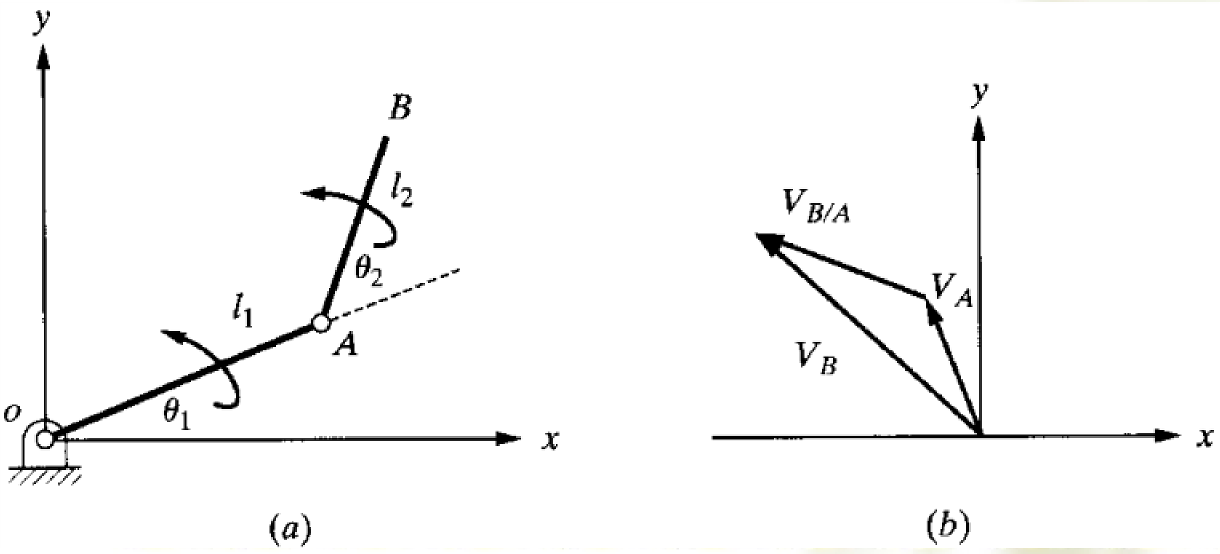
§5.1 微分关系

1 微分关系的概念

微分运动就是指机器人的微小运动，而微分关系是指微分运动与速度之间的关系。

2 微分关系的理论推导

下面这幅图是具有两个自由度的简单机构。其中每个连杆都能独立旋转，θ_1表示第一个连杆相对于参考坐标系的旋转角度，θ_2 表示第二个连杆相对于第一个连杆的旋转角度。



微分关系

让我们计算一下B点的速度

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A}$$

根据物理学中的相关公式，可以得到

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_{B_X} \\ \overline{V}_{B_Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

接下来让我们对B点的位置方程求微分

$$X_B = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$Y_B = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)$$

方程两边对θ_1 和θ_2求微分，可得到

$$\begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

可以看到，微分方程与速度方程极为相似，只不过二者表达的物理含义不同，如果在微分方程的两边同时除以dt,则两方程就完全相同了。

3 微分方程的结构

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix}}_{\text{B点的微分运动方程}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}}_{\text{雅克比矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}}_{\text{关节的微分运动}} \qquad 5.1$$

§3.2　雅克比矩阵

1 研究雅克比矩阵的意义

由式5.1可以看到，雅克比矩阵将单个关节的微分运动或速度转换为感兴趣点的微分运动或速度，也可以将单个关节的运动与整个机构的运动联系起来。

2 雅克比矩阵的计算

由式5.1可以看到，由于角度是时变的，所以雅克比矩阵也是时变的。所以我们可以通过对位置方程中的时间变量求导的方法来计算雅克比矩阵

雅克比矩阵

假设有一组变量为x_j的方程Y_i：

则变量和函数间的微分关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \mathrm{M} \\ \delta Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} \\ \mathrm{M} & & & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \mathrm{M} \\ \delta x_j \end{bmatrix} \text{或} [\delta Y_i] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] [\delta x_j]$$

根据上述关系，我们可以建立机器人的关节微分运动和机器人手坐标系微分运动之间的关系

雅克比矩阵

$$
\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{机器人} \\ \text{雅克比} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix}
$$

$[D]$ $[J]$ $[D_\theta]$

机器人手沿x,y,z轴的微分运动 ← dx, dy, dz

机器人手绕x,y,z轴 的微分旋转 ← $\delta x, \delta y, \delta z$

$d\theta_1 \dots d\theta_6$ → 关节的微分运动

- 广义关节变量$\boldsymbol{q}=[q_1\ q_2\ \dots\ q_n]^{\mathrm{T}}$

  转动关节：$q_i=\theta_i$，移动关节：$q_i=d_i$
- $\mathrm{d}\boldsymbol{q}=[\mathrm{d}q_1\ \mathrm{d}q_2\ \dots\ \mathrm{d}q_n]^{\mathrm{T}}$反映了<u>**关节空间**</u>的微小运动。
- 手部在操作空间的运动参数用$\boldsymbol{X}$表示，它是关节变量的函数，即$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{q})$，并且是一个6维列矢量。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=[\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \delta\phi_x\ \delta\phi_y\ \delta\phi_z]^{\mathrm{T}}$$

- $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$反映了<u>**操作空间**</u>的微小运动，它由工业机器人手部微小<u>**线位移**</u>和微小<u>**角位移**</u>(微小转动)组成。

- 参照前式可写出类似的方程式，即：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

- 式中$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$是$6\times n$的偏导数矩阵，称为$n$自由度工业机器人速度雅可比矩阵。它反映了**关节空间**微小运动d$\boldsymbol{q}$与手部**作业空间**微小运动d$\boldsymbol{X}$之间的关系。它的第i行第j列元素为：

$$J_{ij}(q)=\frac{\partial x_i(q)}{\partial q_j}$$

$i=1，2，…，6；j=1，2，…，n$

例5.1　给定某一时刻的机器人雅克比矩阵，给定关节的微分运动，求机器人手坐标系的线位移微分运动和角位移微分运动。

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_\theta=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

解:

$$D=JD_\theta=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ 0 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

由例题可知：

刚体或坐标系的微分运动包含微分移动矢量和微分转动矢量。前者由沿三个坐标轴的微分移动组成；后者由绕三轴的微分转动组成。

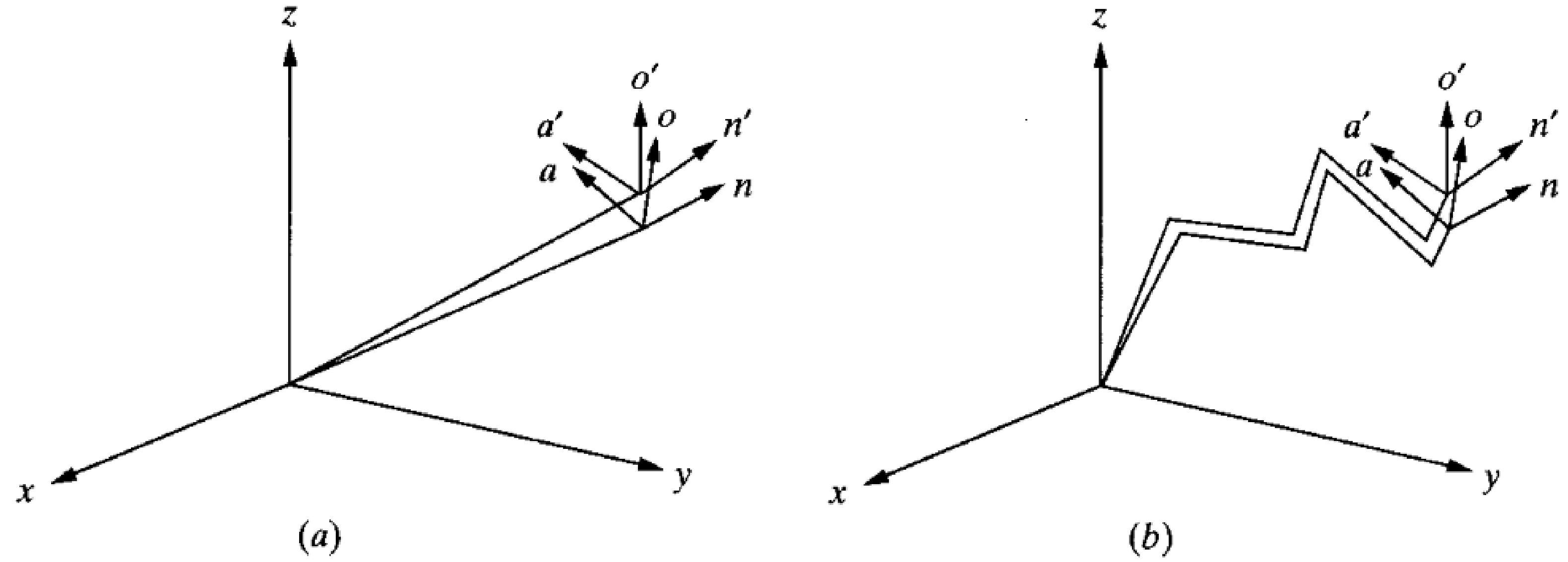
雅克比矩阵的构造：

一、矢量方程微分法；

二、位姿方程微分法。

§5.3 坐标系的微分运动

假设坐标系相对于参考坐标系做微量运动。一种情况是可以不考虑产生微分运动的原因来观察坐标系的微分运动，另一种情况是通过引起微分运动的机构来考察该微分运动。前一种情况只研究坐标系的运动以及坐标系表示的变化(如图a所示)。后一种情况则将研究产生该运动的机构的微分运动以及它与坐标系运动的联系(如图b所示）。此时，机器人关节的微量运动会使得手坐标系也产生微量运动。



假设有一个机器人要将两片工件焊接在一起，为了获得最好的焊接质量，要求机器人以恒速运动，也就是说要求指定的手坐标系的微分运动能保持按特定姿态的恒速运动。这就涉及到坐标系的微分运动，而该运动是由机器人产生的。

因此，应计算每一时刻各关节的速度，以使得由机器人产生的总运动就等于坐标系的期望速度。

坐标系微分运动可以分为如下三个运动：

●微分平移　●微分旋转　●微分变换(平移与旋转)

我们首先研究坐标系的微分运动，然后研究机器人机构的微分运动，最后建立两者之间的联系。

1 微分平移

微分平移就是坐标系平移一个为分量，因此它可以用Trans(dx,dy,dz)来表示，其含义是坐标系沿3条坐标轴做了微小量的运动。

2 微分旋转

微分旋转是坐标系的小量旋转，它通常用 $Rot(k,d\theta)$ 来描述，即坐标系 $\hat{k}$ 轴转动 $d\theta$ 角度。

绕三轴的转动分别定义为因为转动很小，所以

$$\sin\delta x = \delta x$$

$$\cos\delta x = 1$$

因此，表示绕x、y、z轴的微分旋转矩阵为：

$$Rot(x,\delta x)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot(y,\delta y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(z,\delta z)=\begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意：上述矩阵违反了每个向量长度为1的规定。例如 $\sqrt{1^2+(\delta y)^2}>1$。然而由于微分值很小，在计算时高阶微分可以忽略不计。并且这样的近似并不影响计算结果。所以我们采用这样的向量长度。

另外我们再来看看矩阵乘法的顺序，不同的顺序是否会产生不同的结果。

$$Rot(x,\delta x)Rot(y,\delta y)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-\delta x&0\\0&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\0&1&0&0\\-\delta y&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\\delta x\delta y&1&-\delta x&0\\-\delta y&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\delta y)Rot(x,\delta x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \delta y & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\delta y & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\delta x & 0\\ 0 & \delta x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \delta x\delta y & \delta y & 0\\ 0 & 1 & -\delta x & 0\\ -\delta y & \delta x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

比较两式，如果忽略掉所有的高阶微分变换，上述两式的结果是相同的。因此乘法的顺序并不影响最终计算结果。也就是说在微分运动分析中满足交换律。

绕三条坐标轴的三个微分运动可以表示为

$$Rot(k,d\theta)=Rot(x,\delta x)Rot(y,\delta y)Rot(z,\delta z)$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z+\delta x\delta y & 1-\delta x\delta y\delta z & -\delta x & 0 \\ -\delta y+\delta x\delta z & \delta x+\delta y\delta z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例5.2 求绕三个坐标轴作微分旋转所产生的总微分变换 $\delta x = 0.1, \delta y = 0.05, \delta z = 0.02$

解：

$$Rot(k,\delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.02 & 0.05 & 0 \\ 0.02 & 1 & -0.1 & 0 \\ -0.05 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 坐标系的微分变换

坐标系的微分变换是微分平移和微分旋转运动的合成。如果用T表示原始坐标系，并假定由于微分变换所引起的坐标系T的变化量用dT表示，则有：

$$[T+dT]=[Trans(dx,dy,dz)Rot(k,d\theta)][T]$$

$$或[dT]=[Trans(dx,dy,dz)Rot(k,d\theta)-I][T]$$

可令：

$$[dT]=[\Delta][T]$$

$$[\Delta]=[Trans(dx,dy,dz)\times Rot(k,d\theta)-I]$$

我们称 Δ为微分算子，用它乘以一个坐标系将导致坐标系的变化

进一步求得

$$\Delta = Trans(dx,dy,dz)\times Rot(k,d\theta)-I$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&dx\\0&1&0&dy\\0&0&1&dz\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\delta z&\delta y&0\\\delta z&1&-\delta x&0\\-\delta y&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\delta z&\delta y&dx\\\delta z&0&-\delta x&dy\\-\delta y&\delta x&0&dz\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

注意：微分算子不是变换矩阵或坐标系，它不遵循所要求的标准格式，仅仅是一个算子在坐标系中产生变化。

例5.3 写出以下微分变换的微分算子矩阵

$$dx = 0.5,\quad dy = 0.3,\quad dz = 0.1,\quad \delta x = 0.02,\quad \delta y = 0.04,\quad \delta z = 0.06$$

提示:$[dB] = [\Delta][B]$

解：

将所给值代入，得：

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.04 & 0.5 \\ 0。06 & 0 & -0.02 & 0.3 \\ -0.04 & 0.02 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例3.4 对如下的坐标系B,绕y轴做0.1弧度的微分转动，然后微分平移[0.1，0，0.2]，求微分变换的结果

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$dx = 0.1, dy = 0, dz = 0.2, \delta x = 0, \delta y = 0.1, \delta z = 0$$

$$[dB] = [\Delta][B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中，dB矩阵表示坐标系B的变化，该矩阵的每个元素表示坐标系中相应元素的变化。如，本例中 dB意味着该坐标系沿x轴移动了0.4个单位的微小量，沿y轴无运动，沿z轴移动了-0.8个单位的微小量。它也意味着坐标系的旋转使得向量 $\bar{n}$ 没有改变， 而在向量 $\bar{o}$ 的分量 o_x上改变了0.1，在向量 $\bar{a}$ 的分量 a_z 上改变了-0.1。—微分变化的理解

$$dT = \begin{bmatrix} dn_x & dn_y & dn_z & dp_x \\ do_x & do_y & do_z & dp_y \\ da_x & da_y & da_z & dp_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

微分运动所引起坐标系变化

由此，我们可求上例中坐标系B运动后的位姿，如下

$$B_{new} = B_{original} + dB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 1 & 10.4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -0.1 & 2.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6 坐标系之间的微分变化

前面介绍的微分算子Δ是相对于固定参考坐标系来说的，同样的，我们可以定义另外一个微分算子，是相对于当前坐标系的，这样可以在当前坐标系中计算同样的变换。

由于是相对于当前坐标系的，必须用右乘该坐标系的。如下式所示：

$$[dT] = [\Delta][T] = [T][{}^{T}\Delta] \rightarrow$$

$$[T]^{-1}[\Delta][T] = [T]^{-1}[T][{}^{T}\Delta]$$

$$[{}^{T}\Delta] = [T]^{-1}[\Delta][T]$$

因此，上式可以用来计算相对于本身坐标系的微分算子。将上式矩阵相乘并加以简化，得到的结果如下：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -pn \\ o_x & o_y & o_z & -po \\ a_x & a_y & a_z & -pa \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T^{-1}][\Delta][T] = {}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^T\delta z & {}^T\delta y & {}^T dx \\ {}^T\delta z & 0 & -{}^T\delta x & {}^T dy \\ -{}^T\delta y & {}^T\delta x & 0 & {}^T dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

应注意，${}^T\Delta$ 看上去如同 Δ 矩阵，但所有元素都是相对于当前坐标系的，这些元素可从以上矩阵相乘的结果求得，结果归纳如下：

$$ {}^T\delta x = \overline{\delta} \cdot \overline{n} $$

$$ {}^T\delta y = \overline{\delta} \cdot \overline{o} $$

$$ {}^T\delta z = \overline{\delta} \cdot \overline{a} $$

$$ {}^T dx = \overline{n} \cdot \left[\left(\overline{\delta} \times \overline{p} \right) + \overline{d} \right] $$

$$ {}^T dy = \overline{o} \cdot \left[\left(\overline{\delta} \times \overline{p} \right) + \overline{d} \right] $$

$$ {}^T dz = \overline{a} \cdot \left[\left(\overline{\delta} \times \overline{p} \right) + \overline{d} \right] $$

举例说明如何求得相对于本身坐标系的微分算子，回忆下面的例题：

例　对如下的坐标系B，绕y轴做0.1弧度的微分转动，然后微分平移[0.1，0，0.2]，求微分变换的结果。

$$B=\begin{bmatrix}0&0&1&10\\1&0&0&5\\0&1&0&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

解： $dx=0.1, dy=0, dz=0.2, \delta x=0, \delta y=0.1, \delta z=0$

$$[dB]=[\Delta][B]=\begin{bmatrix}0&0&0.1&0.1\\0&0&0&0\\-0.1&0&0&0.2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&10\\1&0&0&5\\0&1&0&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0.1&0&0.4\\0&0&0&0\\0&0&-0.1&-0.8\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

现在求出相对于本身坐标系的微分算子：${}^{B}\Delta$

由给定的信息中可以得到以下向量，用来计算向量 ${}^{B}d$ ${}^{B}\delta$

$$\overline{n} = [0,1,0], \quad \overline{o} = [0,0,1], \quad \overline{a} = [1,0,0], \quad \overline{p} = [10,5,3]$$

$$\overline{\delta} = [0,0.1,0], \qquad \overline{d} = [0.1,0,0.2]$$

$$\overline{\delta} \times \overline{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix} = [0.3,0,-1]$$

$$\overline{\delta} \times \overline{p} + \overline{d} = [0.3,0,-1] + [0.1,0,0.2] = [0.4,0,-0.8]$$

$$\rightarrow {}^{B}dx = \bar{n} \cdot [\bar{\delta} \times \bar{p} + \bar{d}] = 0$$

$$\rightarrow {}^{B}dy = \bar{o} \cdot \left[\bar{\delta} \times \bar{p} + \bar{d}\right] = -0.8$$

$$\rightarrow {}^{B}dz = \bar{a} \cdot \left[\bar{\delta} \times \bar{p} + \bar{d}\right] = 0.4$$

$${}^{B}\delta x = \bar{\delta} \cdot \bar{n} = 0.1$$

$${}^{B}\delta y = \bar{\delta} \cdot \bar{o} = 0$$

$${}^{B}\delta z = \bar{\delta} \cdot \bar{a} = 0$$

公式

$${}^{T}\delta x = \bar{\delta} \cdot \bar{n}$$

$${}^{T}\delta y = \bar{\delta} \cdot \bar{o}$$

$${}^{T}\delta z = \bar{\delta} \cdot \bar{a}$$

$${}^{T}dx = \bar{n} \cdot \left[\left(\bar{\delta} \times \bar{p}\right) + \bar{d}\right]$$

$${}^{T}dy = \bar{o} \cdot \left[\left(\bar{\delta} \times \bar{p}\right) + \bar{d}\right]$$

$${}^{T}dz = \bar{a} \cdot \left[\left(\bar{\delta} \times \bar{p}\right) + \bar{d}\right]$$

代入可得：

$$\left[T^{-1}\right]\Delta\left[T\right] = {}^{T}\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{T}\delta z & {}^{T}\delta y & {}^{T}dx \\ {}^{T}\delta z & 0 & -{}^{T}\delta x & {}^{T}dy \\ -{}^{T}\delta y & {}^{T}\delta x & 0 & {}^{T}dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{B}d=[0,-0.8,0.4]$$

$$^{B}\delta=[0.1,0,0]$$

$$^{B}\Delta=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.1 & -0.8\\ 0 & 0.1 & 0 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可以看出, $^{B}\Delta$的值与Δ的值并不同，但是用$^{B}\Delta$右乘B矩阵后，得到的结果dB与前面相同。

例: 直接根据微分算子计算上例中的$^{B}\Delta$

解:

$$[^{B}\Delta]=[B^{-1}][\Delta][B]=$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.1 & 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 10\\ 1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.1 & -0.8\\ 0 & 0.1 & 0 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3.7 机器人及机器人手坐标系的微分运动

前面介绍的都是坐标系的变换结果，而不涉及变换是如何实现的。现在我们就研究一下机器人手坐标系的变化是如何由机器人的运动转换来的。

我们要做的就是找出机器人关节的微分运动是如何与手坐标系的微分运动关联的，尤其是与dT的关系。

这种关系取决于：

机器人的构型和设计的函数；

机器人即时位姿的函数。

举例说明：

简单的旋转机器人和斯坦福机械手臂

区别：构型不同

结果：要产生类似（相同）的机械手速度，所要求的关节速度会有所不同。

由此可知：

对于上述的任何一种机器人，手臂是否能够完全地伸展以及能否指向任意方位，都需要将其转化为不同的关节速度从而产生相同的手的速度。

我们可以通过雅克比矩阵建立关节运动与手运动之间的联系，如下所示：

雅克比矩阵

机器人手沿x,y,z轴的微分运动

机器人手绕x,y,z轴的微分旋转

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}}_{[D]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{机器人} \\ \text{雅克比} \end{bmatrix}}_{[J]} \underbrace{\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix}}_{[D_\theta]}$$

关节的微分运动