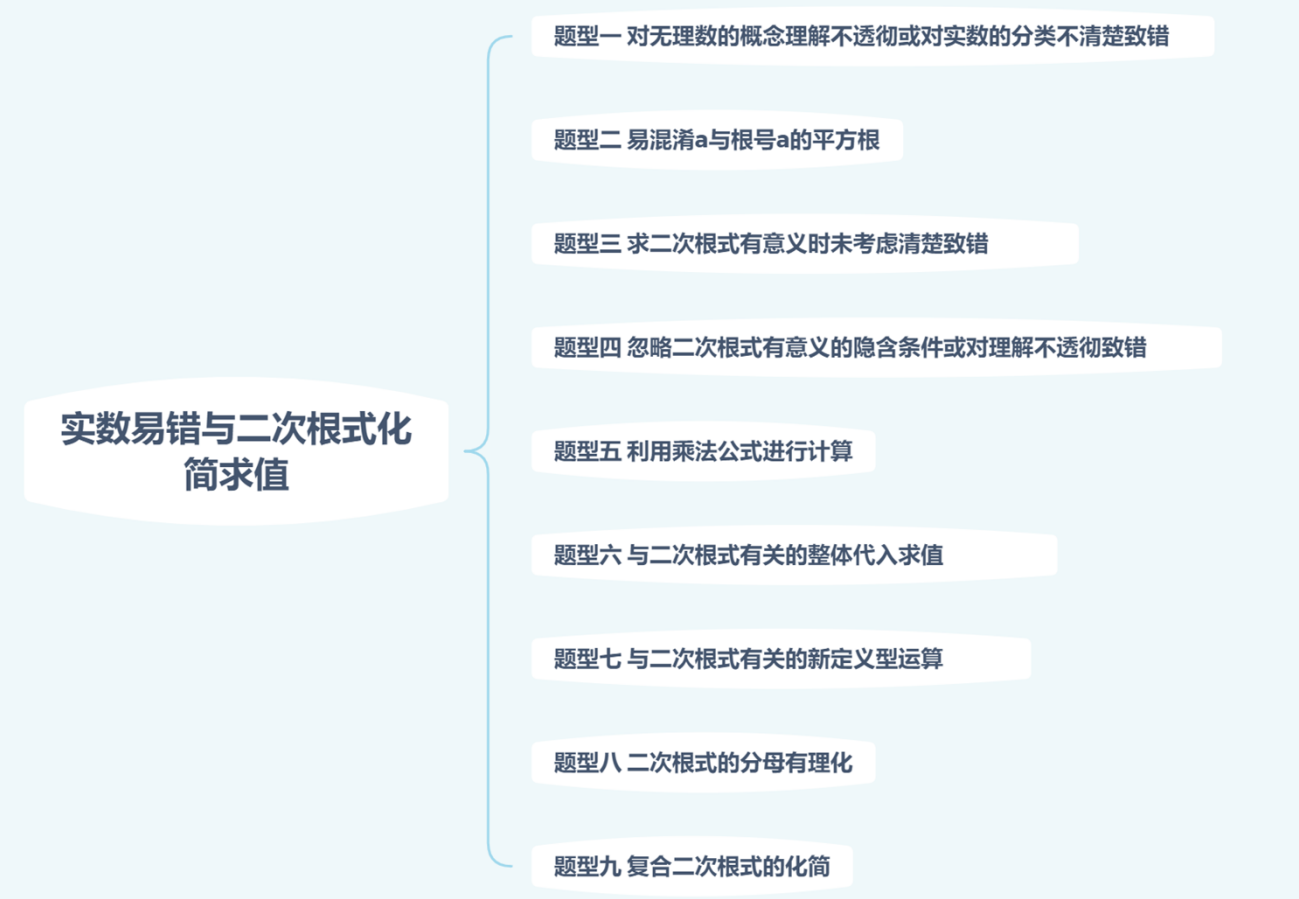
# 第 11 讲 解题技巧专题：实数易错与二次根式化简求值

## 模块一 思维导图串题型




## 模块二 题型归纳举一反三

**【题型一 对无理数的概念理解不透彻或对实数的分类不清楚致错】**

例 1．（2023 春·广西梧州·七年级统考期末）在 $-1.414$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt[3]{-64}$，$\frac{\pi}{3}$，$-\sqrt{2}$，3.14，$\sqrt{9}$，0.1515515551…（两个 1 之间依次多 1 个 5）中，无理数的个数是（　）

*A*．3 个　　*B*．5 个　　*C*．6 个　　*D*．7 个

【答案】*A*

【分析】根据无理数的定义进行判定即可．

【详解】解：在 $-1.414$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt[3]{-64}=-4$，$\frac{\pi}{3}$，$-\sqrt{2}$，3.14，$\sqrt{9}=3$，0.1515515551…（两个 1 之间依次多 1 个 5）中，无理数有 $\frac{\pi}{3}$，$-\sqrt{2}$，0.1515515551…（两个 1 之间依次多 1 个 5）中，共 3 个，

故选：*A*．

【点睛】本题主要考查了无理数的定义，正确理解定义是解题的关键．

【变式 1-1】（2023 春·河南信阳·七年级统考期末）下列各数：$-\sqrt{25}$，$\frac{\pi}{2}$，0，0.56，$\sqrt[3]{9}$，$-0.1010010001\ldots$（每两个1之间依次增加1个0），其中无理数的个数为（　　）

*A*．1　　*B*．2　　*C*．3　　*D*．4

【答案】*C*

【分析】根据无理数就是无限不循环小数，有理数是整数与分数的统称，即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数对每个数字逐一分析判断即可．

【详解】解：$-\sqrt{25}=-5$，$\frac{\pi}{2}$，0，0.56，$\sqrt[3]{9}$，$-0.1010010001\ldots$（每两个1之间依次增加1个0），

其中无理数有：$\frac{\pi}{2}$，$\sqrt[3]{9}$，$-0.1010010001\ldots$（每两个1之间依次增加1个0）共3个，

故选：C．

【点睛】本题主要考查无理数的定义，掌握实数的分类，无理数就是无限不循环小数，有理数是整数与分数的统称，即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数是解答本题的关键．

【变式 1-2】（2023 春·江西赣州·七年级校考期中）把下列各数分别填入相应的集合中．

$\frac{3}{5}$，$\sqrt{9}$，$\pi$，3.14，$-\sqrt[3]{27}$，0，$-5.12345\mathrm{K}$，$-\sqrt{3}$．

（1）有理数集合：{　　}；

（2）无理数集合：{　　}；

（3）正实数集合：{　　}．

【答案】（1）$\frac{3}{5},\sqrt{9},3.14,-\sqrt[3]{27},0$；（2）$\pi,-5.12345\mathrm{K},-\sqrt{3}$；（3）$\frac{3}{5},\sqrt{9},\pi,3.14$

【分析】（1）根据有理数的定义即可得；

（2）根据无理数的定义即可得；

（3）根据正实数的定义即可得．

【详解】解：$\sqrt{9}=3$，$-\sqrt[3]{27}=-3$，

（1）有理数集合：$\left\{\frac{3}{5},\sqrt{9},3.14,-\sqrt[3]{27},0,\mathrm{L}\right\}$

（2）无理数集合：$\left\{\pi,-5.12345\mathrm{K},-\sqrt{3},\mathrm{L}\right\}$

（3）正实数集合：$\left\{\frac{3}{5},\sqrt{9},\pi,3.14,\mathrm{L}\right\}$

故答案为：（1）$\frac{3}{5},\sqrt{9},3.14,-\sqrt[3]{27},0$；（2）$\pi,-5.12345\mathrm{K},-\sqrt{3}$；（3）$\frac{3}{5},\sqrt{9},\pi,3.14$．

【点睛】本题考查了有理数、无理数、正实数的定义，掌握实数的概念与分类是解题关键．

【变式 1-3】（2023 春·云南昭通·七年级校联考期中）把下列各数填在相应的集合里：

$\frac{1}{3},3.14,-\sqrt{3},-\pi,-2^4,\sqrt{0},\sqrt{(-5)^2},\sqrt[3]{8},-1.010010001\cdots$ .

有理数集合：{　　，…}；

无理数集合：{　　，…}；

正实数集合：{　　，…}；

负实数集合：{　　，…}.

【答案】：$\frac{1}{3},3.14,-2^4,\sqrt{0},\sqrt{(-5)^2},\sqrt[3]{8}$；$-\sqrt{3},-\pi,-1.010010001\cdots$；$\frac{1}{3},3.14,\sqrt{(-5)^2},\sqrt[3]{8}$；

$-\sqrt{3},-\pi,-2^4,-1.010010001\cdots$

【分析】直接利用有理数、无理数，正实数，负实数的定义得出答案.

【详解】有理数集合：$\left\{\frac{1}{3},3.14,-2^4,\sqrt{0},\sqrt{(-5)^2},\sqrt[3]{8}\cdots\right\}$；

无理数集合：$\left\{-\sqrt{3},-\pi,-1.010010001\cdots,\cdots\right\}$；

正实数集合：$\left\{\frac{1}{3},3.14,\sqrt{(-5)^2},\sqrt[3]{8},\cdots\right\}$；

负实数集合：$\left\{-\sqrt{3},-\pi,-2^4,-1.010010001\cdots,\cdots\right\}$.

【点睛】本题主要考查实数的分类，熟练掌握有理数、无理数，正实数，负实数的定义是解决本题的关键.

**【题型二 易混淆 $a$ 与 $\sqrt{a}$ 的平方根】**

例 2.（2023 春·甘肃武威·七年级统考期中）下列各式正确的是（　）

*A*．$\pm\sqrt{81}=\pm9$　　*B*．$\sqrt{16}=\pm4$　　*C*．$\sqrt{(-3)^2}=-3$　　*D*．$\sqrt{-4}=2$

【答案】*A*

【分析】根据平方根、算术平方根的定义逐项判断即可.

【详解】解：*A*，81 的平方根为$\pm9$，$\pm\sqrt{81}=\pm9$，因此该选项正确；

*B*，16 的算术平方根为 4，$\sqrt{16}=4$，因此该选项错误；

*C*，$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$，因此该选项错误；

*D*，被开方数应大于等于 0，因此该选项错误；

故选 *A*.

【点睛】本题考查平方根、算术平方根，注意两者的区别是解题的关键.

**【变式 2-1】**（2023 春·广东东莞·七年级校考期中）下列说法中正确的是（　　）

*A*．$\sqrt{16}$ 的算术平方根是 $\pm4$　　*B*．12 是 144 的平方根

C．$\sqrt{25}$ 的平方根是 $\pm5$　　D．$a^2$ 的算术平方根是 $a$

【答案】$B$

【分析】根据算术平方根和平方根的定义分别分析得出答案．

【详解】$A$、$\sqrt{16}=4$，4 的算术平方根是 2，故该选项错误．

$B$、12 是 144 的平方根，故该选项正确．

$C$、$\sqrt{25}=5$，5 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$，故该选项错误．

$D$、$a^2$ 的算术平方根是 $|a|$，故该选项错误．

故选 $B$．

【点睛】本题考查了算术平方根和平方根的定义，正确把握相关定义是解题关键．

**【变式 2-2】**（2023 春·辽宁鞍山·七年级校考阶段练习）$\sqrt{9}$ 的平方根是_____，1.44 的算术平方根是_____．

【答案】　$\pm\sqrt{3}$　　1.2

【分析】根据平方根的定义以及算术平方根的定义进行计算即可求解．

【详解】解：$\sqrt{9}=3$，3 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$，1.44 的算术平方根是 1.2

故答案为：$\pm\sqrt{3}$，1.2．

【点睛】本题考查了求一个数的平方根、算术平方根，掌握平方根的定义是解题的关键．平方根：如果一个数的平方等于 $a$，那么这个数就叫 $a$ 的平方根，其中属于非负数的平方根称之为算术平方根．

**【变式 2-3】**（2023 春·四川泸州·七年级泸县五中校考期中）$\sqrt{81}$ 的算术平方根是_____；$(-2)^2$ 的平方根是_____．

【答案】　3　　$\pm2$

【分析】先求出 $\sqrt{81}=9$，再求 9 的算术平方根即可；求出 $(-2)^2=4$，再求 4 的平方根即可．

【详解】解：$\sqrt{81}=9$，9 的算术平方根为：$\sqrt{9}=3$，

$(-2)^2=4$，4 的平方根为：$\pm\sqrt{4}=\pm2$，

故答案为：3，$\pm2$．

【点睛】本题考查算术平方根，平方根，掌握算术平方根和平方根的求法是解题的关键．

## 【题型三 求二次根式有意义时未考虑清楚致错】

例 3.（2023·河南洛阳·统考模拟预测）函数 $y=\sqrt{x+2}-(x+1)^0$ 中自变量 $x$ 的取值范围是（　）

A．$x\geq-2$　　B．$x>-2$　　C．$x>-2$ 且 $x\neq-1$　　D．$x\geq-2$ 且 $x\neq-1$

【答案】$D$

【分析】根据被开方数是非负数，$a^0$ 有意义的条件是 $a\neq0$，列出不等式求解即可．

【详解】∵函数 $y=\sqrt{x+2}-(x+1)^0$ 有意义，

∴ $x+2\geq 0$ 且 $x+1\neq 0$，

解得 $x\geq -2$ 且 $x\neq -1$，

故选 $D$.

【点睛】本题考查了二次根式的性质，零指数幂有意义的条件，熟练掌握有意义的条件时解题的关键.

**【变式 3-1】**（2023·北京·九年级专题练习）若 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义，则实数 $x$ 的取值范围是_____.

【答案】$x\geq 3$

【分析】根据二次根式有意义的条件：被开方数是非负数，进行求解即可得到答案.

【详解】解：Q $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义，

∴由题意得：$x-3\geq 0$，

∴ $x\geq 3$,

故答案为：$x\geq 3$.

【点睛】本题主要考查二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

**【变式 3-2】**（2023 春·浙江嘉兴·八年级统考期末）二次根式 $\sqrt{2-x}$ 中字母 $x$ 的取值范围是_____.

【答案】$x\leq 2$

【分析】根据二次根式有意义的条件可知 $2-x\geq 0$ 即可.

【详解】解：∵要使二次根式 $\sqrt{2-x}$ 有意义，

则 $2-x\geq 0$,

∴ $x\leq 2$，

故答案为: $x\leq 2$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，理解二次根式有意义的条件是解题的关键.

**【变式 3-3】**（2023 春·安徽六安·八年级校考期中）若代数式 $\sqrt{\dfrac{1}{4-x}}$ 在实数范围内有意义，则 $x$ 的取值范围是_____.

【答案】$x<4$

【分析】根据二次根式有意义和分式有意义的条件得到 $4-x>0$，解不等式即可得到答案.

【详解】解：∵代数式 $\sqrt{\dfrac{1}{4-x}}$ 在实数范围内有意义，

∴ $4-x>0$，

解得 $x<4$，

即 $x$ 的取值范围是 $x<4$，

故答案为：$x<4$

【点睛】此题考查了二次根式和分式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

**【题型四 忽略二次根式有意义的隐含条件或对$\sqrt{a^2}=|a|$理解不透彻致错】**

例 4. 化简二次根式$-\sqrt{8a^3}$的结果为（　　）

$A$．$2a\sqrt{2a}$　　$B$．$-2\sqrt{2a^3}$　　$C$．$2a\sqrt{-2a}$　　$D$．$-2a\sqrt{2a}$

【答案】$D$

【解析】

【分析】

先根据二次根式有意义的条件可得$a\geq 0$，再利用二次根式的性质化简即可得.

【详解】

解：$\because 8a^3\geq 0$，

$\therefore a\geq 0$，

则$-\sqrt{8a^3}=-\sqrt{4a^2\cdot 2a}=-2a\sqrt{2a}$，

故选：$D$.

【点睛】

本题考查了二次根式有意义的条件、二次根式的化简，熟练掌握二次根式的性质是解题关键.

**【变式 4-1】**化简二次根式$\sqrt{-\frac{1}{b}}$的结果是（　　）

$A$．$-b\sqrt{-b}$　　$B$．$b\sqrt{-b}$　　$C$．$-\frac{\sqrt{-b}}{b}$　　$D$．$\sqrt{\frac{-b}{b}}$

【答案】$C$

【解析】

【分析】

根据二次根式的性质化简即可.

【详解】

解：$\because -\frac{1}{b}\geq 0$，$b\neq 0$，

$\therefore b<0$，

$\therefore \sqrt{-\frac{1}{b}}=\sqrt{-\frac{b}{b^2}}=\frac{\sqrt{-b}}{|b|}=-\frac{\sqrt{-b}}{b}$，

故选：$C$.

【点睛】

此题考查了二次根式的化简，正确掌握二次根式有意义的条件及化简方法是解题的关键.

【变式 4-2】若 $\sqrt{(m-2)^2}=2-m$ 成立，则 $m$ 的取值范围是（　　）

$A$．$m>2$　　$B$．$m\geq 2$　　$C$．$m\leq 2$　　$D$．$m<2$

【答案】$C$

【解析】

【分析】

根据二次根式的性质可进行求解.

【详解】

解：$\because\sqrt{(m-2)^2}=2-m$，

$\therefore m-2\leq 0$，

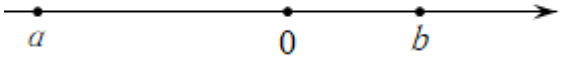
$\therefore m\leq 2$；

故选 $C$.

【点睛】

本题主要考查二次根式的性质，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

【变式 4-3】实数 $a$、$b$ 在数轴上的对应点如图所示，化简 $\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt[3]{(b-1)^3}$ 的结果是（　　）




$A$．$a-1$　　$B$．$a-2b+1$　　$C$．$2b-a-1$　　$D$．$1-a$

【答案】$D$

【解析】

【分析】

首先根据数轴上的点的位置判断出 $\boldsymbol{a-b}$ 的正负，然后把原式利用二次根式及立方根性质化简，最后去括号合并同类项即可得到结果.

【详解】

$\because$由数轴上点的位置得：$a<0<b$

$\therefore a-b<0$

$\therefore$原式$=|a-b|-(b-1)$

$=b-a-b+1$

$=1-a$.

故选：$D$

【点睛】

本题考查了实数的运算，熟练掌握实数与数轴，以及绝对值的概念及其各自的性质是解本题的关键.

## 【题型五 利用乘法公式进行计算】

例 5.（2023 春·宁夏吴忠·八年级统考期末）计算：$\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

【答案】$2\sqrt{3}-3$

【分析】先计算平方差和完全平方差，再计算减法，化简即可.

【详解】解：原式$=7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(3-2\sqrt{3}+1\right)$

$=49-48-3+2\sqrt{3}-1$

$=2\sqrt{3}-3$.

【点睛】本题考查了二次根式的运算，涉及到了平方差公式和完全平方差公式，解题关键是牢记公式.

**【变式 5-1】**（2023 春·青海果洛·八年级统考期末）计算：$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$.

【答案】$4\sqrt{6}$

【分析】先根据完全平方公式展开，再根据二次根式的加减运算即可.

【详解】解：$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

$=3+2+2\sqrt{6}-\left(3+2-2\sqrt{6}\right)$

$=4\sqrt{6}$.

【点睛】本题考查二次根式的混合运算，正确计算是解题的关键.

**【变式 5-2】**（2023 春·安徽滁州·八年级校考期中）计算：$\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\times\left(5-\sqrt{20}\right)\div\sqrt{5}$.

【答案】2

【分析】根据二次根式的混合运算法则计算即可.

【详解】原式$=5-2\sqrt{5}+1+2\times\left(5\div\sqrt{5}-\sqrt{20}\div\sqrt{5}\right)$

$=6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4$

$=2$.

【点睛】本题考查二次根式的混合运算法则，正确计算是解题的关键.

**【变式 5-3】**（2023 春·辽宁葫芦岛·八年级统考期末）计算：$\left(\sqrt{3}+2\right)^2-\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

【答案】$4\sqrt{3}+1$

【分析】原式根据完全平方公式和平方差公式进行计算即可.

【详解】解：$\left(\sqrt{3}+2\right)^2-\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

$=7+4\sqrt{3}-\left(18-12\right)$

$=4\sqrt{3}+1$.

【点睛】本题主要考查了二次根式的除法，熟练掌握除法法则是解答本题的关键.

## 【题型六 与二次根式有关的整体代入求值】

例 6. （2023 春·山东临沂·八年级校考阶段练习）已知 $a+\frac{1}{a}=3$，求 $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=$_____.

【答案】$\pm\sqrt{5}$

【分析】将 $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ 进行平方，再将 $a+\frac{1}{a}=3$ 整体代入求值即可.

【详解】解：$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=a+\frac{1}{a}+2$

将 $a+\frac{1}{a}=3$ 代入得：$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=3+2=5$

$\therefore\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\pm\sqrt{5}$

故答案为：$\pm\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了二次根式的化简求值，解决本题的关键是整体代入法求值.

**【变式 6-1】**（2023 春·吉林松原·八年级校联考期中）如果 $x+y=5$，$xy=1$，那么 $x^2\sqrt{\frac{y}{x}}+y^2\sqrt{\frac{x}{y}}=$_____.

【答案】5

【分析】根据二次根式的性质化简，再合并同类二次根式，最后将式子的值代入即可求解.

【详解】解：$\because x+y=5$，$xy=1$，

$\therefore x^2\sqrt{\frac{y}{x}}+y^2\sqrt{\frac{x}{y}}$

$=x^2\frac{\sqrt{xy}}{x}+y^2\frac{\sqrt{xy}}{y}$

$=(x+y)\sqrt{xy}$

$=5\times\sqrt{1}$

$=5$，

故答案为：5.

【点睛】本题考查了二次根式的化简求值，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

**【变式 6-2】**（2023 春·江苏·八年级专题练习）已知 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$，那么 $\sqrt{\frac{x}{x^2+3x+1}}-\sqrt{\frac{x}{x^2+9x+1}}$ 的值等于____.

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{11}}{11}$

【分析】通过完全平方公式求出$x+\frac{1}{x}=2$，把待求式的被开方数都用$x+\frac{1}{x}$的代数式表示，然后再进行计算.

【详解】解：$\because \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$，

$\therefore \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=4$，

$\therefore x+\frac{1}{x}+2=4$

$\therefore x+\frac{1}{x}=2$，

$\therefore \sqrt{\frac{x}{x^2+3x+1}}-\sqrt{\frac{x}{x^2+9x+1}}$

$=\sqrt{\frac{1}{x+3+\frac{1}{x}}}-\sqrt{\frac{1}{x+9+\frac{1}{x}}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2+3}}-\sqrt{\frac{1}{2+9}}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{11}}{11}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{11}}{11}$.

【点睛】本题考查了二次根式的化简求值，难度不大，关键是把已知条件和待求式的被开方数都用$x+\frac{1}{x}$的代数式表示.

**【变式 6-3】**（2023 春·北京海淀·八年级校考期中）已知$x=\sqrt{3}+2$，求代数式$x^2-4x+3$的值.

【答案】2

【分析】根据完全平方公式把原式变形，把$x$的值代入计算即可.

【详解】解：Q $x=\sqrt{3}+2$，

$\therefore x^2-4x+3$

$=x^2-4x+4-1$

$=(x-2)^2-1$

$=(\sqrt{3}+2-2)^2-1$

$=3-1$

$=2$.

【点睛】本题考查的是二次根式的化简求值，解题的关键是掌握完全平方公式.

**【题型七 与二次根式有关的新定义型运算】**

例 7.（2023 春·江苏泰州·八年级统考期末）对于任意的正数 $m$，$n$，定义一种新的运算“*”：

$m*n=\begin{cases}\sqrt{m}+\sqrt{n}\,(m\geq n)\\ \sqrt{m}-\sqrt{n}\,(m<n)\end{cases}$，则计算 $3*8+27*2$ 的结果为_____.

【答案】$4\sqrt{3}-\sqrt{2}$ / $-\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

【分析】根据新定义把所求的式子化为二次根式运算，再进行二次根式的运算即可.

【详解】解：∵$3<8$，$27>2$

∴$3*8+27*2$

$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)+\left(\sqrt{27}+\sqrt{2}\right)$

$=\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$=4\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

故答案为：$4\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了二次根式的计算，理解新定义，将式子转化为二次根式的计算，并正确进行二次根式计算是解题关键.

【变式 7-1】（2023 春·广西南宁·七年级校联考期中）对于两个不相等的实数 $a$、$b$，定义一种新的运算如下，$a*b=\dfrac{\sqrt{a+b}}{a-b}(a+b>0)$，如：$3*2=\dfrac{\sqrt{3+2}}{3-2}=\sqrt{5}$，那么 $5*4=$_____.

【答案】3

【分析】根据定义的新运输，将 $a=5$，$b=4$ 代入化简即可得出答案.

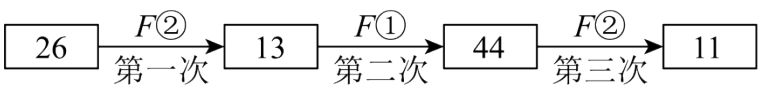
【详解】解：Q $a*b=\dfrac{\sqrt{a+b}}{a-b}(a+b>0)$，

∴ $5*4=\dfrac{\sqrt{5+4}}{5-4}=3$，

故答案为：3.

【点睛】本题主要考查了实数的运算，在解题时要先明确新的运算表示的含义是本题的关键.

【变式 7-2】（2023 秋·河北保定·七年级统考期末）定义一种对正整数 $n$ 的“$F$ 运算”：①当 $n$ 为奇数时，结果为 $3n+5$；②当 $n$ 为偶数时，结果为 $\dfrac{n}{2^k}$（其中 $k$ 是使 $\dfrac{n}{2^k}$ 为奇数的正整数），并且运算重复进行，例如，取 $n=26$，第三次“$F$ 运算”的结果是 11.



⋯ 若 $n=111$，

（1）第一次“$F$ 运算”的结果为_____；第二次“$F$ 运算”的结果为_____；

（2）照这样运算下去，第 2022 次“$F$ 运算”的结果为_____.

【答案】　338　169　1

【分析】（1）若 $n=111$，根据题意进行计算即可得；

（2）由（1）得，若$n=111$，第一次“$F$ 运算”的结果为338；第二次“$F$ 运算”的结果为169，再算出第三次运算结果，第四次运算结果，第五次运算结果，第六次运算结果，根据所得规律进行计算即可得.

【详解】解：（1）若$n=111$，第一次“$F$ 运算”的结果为：$3\times111+5=338$，

第二次“$F$ 运算”的结果为：$338\div2=169$，

故答案为：338，169；

（2）由（1）得，若$n=111$，第一次“$F$ 运算”的结果为338；第二次“$F$ 运算”的结果为169，

第三次运算结果为：$3\times169+5=512$，

第四次运算结果为：$512\div2^9=1$，

第五次运算结果为：$3\times1+5=8$，

第六次运算结果为：$8\div2^3=1$，

$\because(2022-3)\div2=1009$L 1

∴第 2022 次“$F$ 运算”的结果为 1，

故答案为：1.

【点睛】本题考查了数字类变化规律，解题的关键是理解题意，发现结果的变化规律.

**【变式 7-3】**（2023 秋·山西长治·九年级统考期末）对于任意的正实数$a$和$b$，我们定义新运算：$a*b=\begin{cases}\sqrt{a}-\sqrt{b}\,(a\geq b)\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\,(a<b)\end{cases}$，如：$27*12=\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{3}$，求：$(5*2)\times(18*45)$的值.

【答案】9

【分析】原式利用题中的新定义计算即可得到结果.

【详解】解：$\because a*b=\begin{cases}\sqrt{a}-\sqrt{b}(a\geq b)\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}(a<b)\end{cases}$，

∴根据题中的新定义得：

$(5*2)=\sqrt{5}-\sqrt{2}$，$(18*45)=\sqrt{18}+\sqrt{45}=3\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

即：$(5*2)\times(18*45)$

$=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\times\left(3\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)$

$=3\times\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

$=3\times(5-2)$

$=9$.

【点睛】此题考查了二次根式的混合运算，弄清题中的新定义是解本题的关键.

## 【题型八 二次根式的分母有理化】

例 8.（2023 春·安徽六安·七年级六安市第九中学校考期中）阅读材料，并解决问题.

定义：将分母中的根号化去的过程叫做分母有理化．如：将$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$分母有理化，

解：原式$=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$．运用以上方法解决问题：

(1)将$\frac{1}{\sqrt{3}+2}$分母有理化；

(2)观察上面的解题过程，请直接写出结果：$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$ _____.

(3)计算$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}\right)\left(\sqrt{2023}+1\right)$的值.

【答案】(1)$2-\sqrt{3}$

(2)$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

(3)2022

【分析】（1）根据平方差公式先分子和分母都乘以$2-\sqrt{3}$，即可求出答案；

（2）根据平方差公式先分子和分母都乘以$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，即可求出答案；

（3）先分母有理化，最后合并即可.

【详解】（1）解：$\frac{1}{\sqrt{3}+2}$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$

$=2-\sqrt{3}$；

（2）解：$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}$

$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\left(\sqrt{n}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}$

$=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$；

故答案为：$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$；

（3）解：原式$=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2023}-\sqrt{2022}\right)\times\left(\sqrt{2023}+1\right)$

$=\left(\sqrt{2023}-1\right)\times\left(\sqrt{2023}+1\right)$

$=2022$.

【点睛】本题考查了分母有理化，平方差公式的应用，解此题的关键是能正确进行分母有理化.

**【变式 8-1】**（2023 春·江苏连云港·八年级统考期末）像$\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=1$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a(a\geq 0)$，$\left(\sqrt{b}+1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)=b-1(b\geq 0)$两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式．例如：$\sqrt{5}$与$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}+1$与$\sqrt{2}-1$，$2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$与$2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$等都是互为有理化因式．进行二次根式计算时，利用有理化因式，可以化去分母中的根号．请完成下列问题：

(1)化简：$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$；

(2)计算：$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；

(3)比较$\sqrt{2023}-\sqrt{2022}$与$\sqrt{2022}-\sqrt{2021}$的大小，并说明理由.

【答案】(1)$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

(2)$2-\sqrt{2}$

(3)$\sqrt{2023}-\sqrt{2022}<\sqrt{2022}-\sqrt{2021}$，理由见解析

【分析】（1）利用有理化因式，化去分母中的根号即可；

（2）利用有理化因式，化去分母中的根号，再进行加减运算即可；

（3）利用有理化因式，化去分母中的根号，再进行比较即可.

【详解】（1）解：$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$；

（2）解：$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

$=2+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=2-\sqrt{2}$；

（3）解：$\because\dfrac{1}{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}=\dfrac{\sqrt{2023}+\sqrt{2022}}{\left(\sqrt{2023}-\sqrt{2022}\right)\left(\sqrt{2023}+\sqrt{2022}\right)}=\sqrt{2023}+\sqrt{2022}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{2021}}=\dfrac{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}{\left(\sqrt{2022}-\sqrt{2021}\right)\left(\sqrt{2022}+\sqrt{2021}\right)}=\sqrt{2022}+\sqrt{2021}$

$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}>\dfrac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{2021}}>0$，$\sqrt{2023}-\sqrt{2022}<\sqrt{2022}-\sqrt{2021}$

【点睛】本题考查分母有理化，掌握二次根式的运算是解题的关键.

**【变式 8-2】**（2023 春·山西吕梁·八年级统考阶段练习）阅读下面解题过程.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/916054011024010201