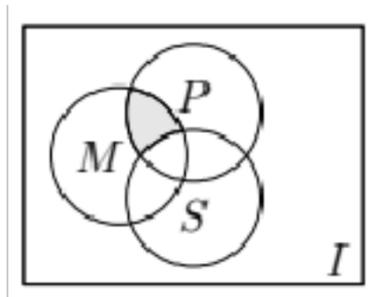


永州一中高三第三次月考数学试卷

一、单选题

1. 如图， I 是全集， M 、 P 、 S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是 ()



- A. $(M \cap P) \cap S$ B. $(M \cap P) \cup S$ C. $(M \cap P) \cap S^c$ D. $(M \cap P) \cup S^c$

【答案】 C

【分析】 根据 Venn 图表示的集合运算作答.

【详解】 阴影部分在集合 M 、 P 的公共部分，但不在集合 S 内，表示为 $(M \cap P) \cap S^c$ ，
故选：C.

2. 若 $\bar{z}(1+i) = 1-i$ ，则 $z =$ ()

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-i$ D. i

【答案】 D

【分析】 先利用除法运算求得 \bar{z} ，再利用共轭复数的概念得到 z 即可.

【详解】 因为 $\bar{z} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$ ，所以 $z = i$.

故选：D

【点睛】 本题主要考查复数的除法运算，涉及到共轭复数的概念，是一道基础题.

3. 若直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的一条对称轴，则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

【答案】 A

【分析】 若直线是圆的对称轴，则直线过圆心，将圆心代入直线计算求解.

【详解】 由题可知圆心为 $(1, 2)$ ，因为直线是圆的对称轴，所以圆心在直线上，即 $2 \times 1 + 2 - 1 = 0$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$.

故选：A.

4. 如图是标准对数远视力表的一部分. 最左边一列“五分记录”为标准对数视力记录，这组数据从上至下为等差数列，公差为 0.1；最右边一列“小数记录”为国际标准视力记录的近似值，这组数据从上至下为等比数列，公比为 $10^{\frac{1}{10}}$. 已知标准对数视力 5.0 对应的国际标准视力准确值为 1.0，则标准对数视力 4.8 对应的国际标准视力精确到小数点后两位约为 ()

(参考数据： $5\sqrt[10]{10} \approx 1.58, 10\sqrt[10]{10} \approx 1.26$)

标准对数视力表		
五分记录 4.0		小数记录 0.1
4.1		0.12
4.2		0.15

A. 0.57

B. 0.59

C. 0.61

D. 0.63

【答案】D

【分析】根据给定条件，确定标准对数视力4.8从下到上的项数，再利用等比数列计算作答.

【详解】依题意，以标准对数视力5.0为左边数据组的等差数列的首项，其公差为-0.1，标准对数视力4.8为该数列第3项，

标准对数视力5.0对应的国际标准视力值1.0为右边数据组的等比数列的首项，其公比为 $\frac{1}{10\sqrt{10}}$ ，

因此，标准对数视力4.8对应的国际标准视力值为该等比数列的第3项，其大小为

$$1 \times \left(\frac{1}{10\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{5\sqrt{10}} \approx 0.63.$$

故选：D

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $\angle C = 90^\circ$. P为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PA = 1$ ，则 PC 的取值范围是（ ）

A. $[2, 3]$

B. $[3, 5]$

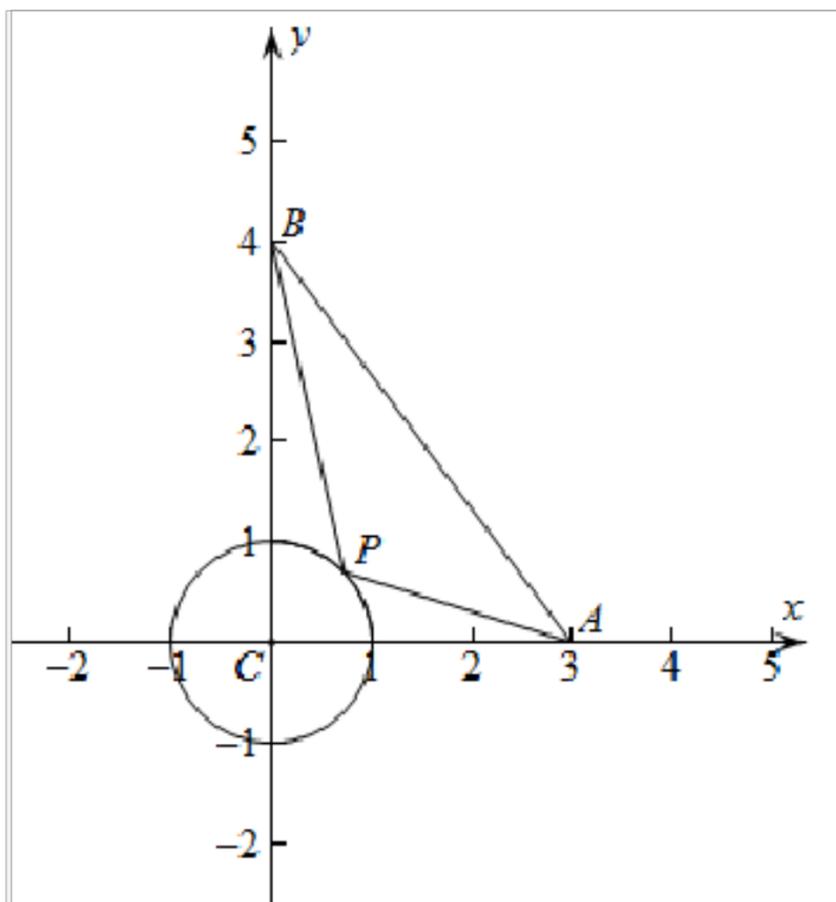
C. $[6, 4]$

D. $[4, 6]$

【答案】D

【分析】依题意建立平面直角坐标系，设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ，表示出 PA ， PC ，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则 $A(0, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(0, 4)$ ，



因为 $r = 1$ ，所以 P 在以 C 为圆心，1 为半径的圆上运动，

设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ， $\theta \in [0, 2\pi]$ ，

所以 $\vec{AP} = (3 - \cos \theta, \sin \theta)$ ， $\vec{BP} = (\cos \theta - 4, \sin \theta)$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\vec{AP}| \cdot |\vec{BP}| &= (3 - \cos \theta) \times (3 - \cos \theta) + (4 - \sin \theta) \times (4 - \sin \theta) \\ &= 3^2 - 6\cos \theta + \cos^2 \theta + 4^2 - 8\sin \theta + \sin^2 \theta \\ &= 17 - 6\cos \theta - 8\sin \theta + 1 \\ &= 18 - 6\cos \theta - 8\sin \theta \end{aligned}$$

$$= 18 - 10\sin(\theta + \alpha), \text{ 其中 } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5},$$

因为 $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ ，所以 $8 \leq 18 - 10\sin(\theta + \alpha) \leq 18$ ，即 $|\vec{AP}| \cdot |\vec{BP}| \in [8, 18]$ ；

故选：D

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) - \sin^2 \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上是增函数，且在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值，则 ω 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{3}{5}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ D. $(0, \frac{5}{2})$

【答案】 B

【分析】 先化简函数 $f(x)$ 的解析式，再依据题意列出关于 ω 的不等式组，即可求得 ω 的取值范围.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } f(x) &= 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) - \sin^2 \omega x = \sin \omega x [2\cos^2(\frac{\omega x - \pi}{4}) - \sin \omega x] \\ &= \sin \omega x [\cos(\frac{\omega x - \pi}{2}) + 1 - \sin \omega x] = \sin \omega x (\sin \omega x + 1 - \sin \omega x) \\ &= \sin^2 \omega x + \sin \omega x \end{aligned}$$

由 $\omega x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 可得 $x = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}$ ， $k \in \mathbb{Z}$

由 (在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上恰好取得一次最大值, 可得 $\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} \leq \pi \\ \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} > \pi \end{cases}$, 解之得 $\frac{1}{2} \leq < \frac{5}{2}$

又 (在区间 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上是增函数, 则 $\begin{cases} \frac{5}{6}\pi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3}\pi \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解之得 $\leq \frac{3}{5}$

综上, 的取值范围是 $\frac{1}{2} \leq \leq \frac{3}{5}$

故选: B

7. 若两曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a \ln x-1$ 存在公切线, 则正实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, 2]$ B. $(0,]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(2]$

【答案】A

【分析】分别求出导数, 设出切点, 得到切线方程, 再由两点的斜率公式, 结合切点满足曲线方程, 运用导数求的单调区间、极值、最值即可得出 a 的取值范围.

【详解】设 $(x_1, x_1^2 - 1)$, $(x_2, \ln x_2 - 1)$, $x_1' = 2x_1$, $x_2' = \frac{1}{x_2}$, $x_1 = 2x_1$, $x_2 = \frac{1}{x_2}$

切线: $(x_1^2 - 1) = 2x_1(x - x_1)$, 即 $x = 2x_1 - x_1^2 + 1$

切线: $(\ln x_2 - 1) = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$, 即 $x = \frac{1}{x_2} + \ln x_2 - 1$, \therefore

$$\begin{cases} 2x_1 = \frac{1}{x_2} \\ x_1^2 - 1 = \frac{1}{x_2} + \ln x_2 - 1 \end{cases}, \therefore x_1 = \frac{1}{2x_2}, \therefore x_1^2 = \frac{1}{4x_2^2} = \frac{1}{4} + \ln x_2$$

令 $f(x) = \frac{1}{4} + \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = \frac{2x + 1}{2x^2} = 0, x = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \ln 2$, $\therefore a \in (0, 2]$.

故选: A.

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, 若过点 $(2, 2)$ 能作该双曲线的两条切线, 则该双曲线离心率取值范围为 ()

- A. $(\frac{\sqrt{21}}{3}, +\infty)$ B. $(1, \frac{\sqrt{21}}{3})$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. 以上选项均不正确

【答案】D

【分析】设切线方程为 $y = k(x - 2) + 2$, 代入双曲线方程后, 方程应为一元二次方程, 二次项系数不能为 0, 然后由 $\Delta > 0$ 判别式得关于 k 的方程, 此方程有两个不等的实根, 由此可得 k 的范围, 从而求得 a 的范围, 注意满足二次项系数不为 0 的条件, 即可得结论.

【详解】设切线方程是 $y = k(x - 2) + 2$,

$$\begin{cases} y = k(x - 2) + 2 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (k^2 - 2)x^2 - 4k(k-2)x + 2(k-2)^2 - 2 = 0,$$

显然 $k^2 - 2 = 0$ 时, 所得直线不是双曲线的切线, 所以 $k \neq \pm \sqrt{2}$,

由 $\Delta = 0$ 得 $16 - 2(1)^2 + 4(2 - 2)[4(1)^2 + 2] = 0$, 整理为 $3x^2 - 8x + 4 = 0$,

由题意此方程有两不等实根,

所以 $\Delta_1 = 64 - 12(4 + 2) > 0$, $2 < \frac{4}{3}$, 则 $2 = 1 + 2 < \frac{7}{3}$ (为双曲线的半焦距), $1 = \frac{1}{1} =$

$< \frac{\sqrt{21}}{3}$, 即 $1 < 2 < \frac{\sqrt{21}}{3}$,

$= \pm 1$ 代入方程 $3x^2 - 8x + 4 = 0$, 得 $x = \pm 1$, 此时 $e = \sqrt{2}$,

综上, e 的范围是 $(1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{21}}{3})$.

故选: D.

二、多选题

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sin \theta)$, $\vec{b} = (\cos \theta, \sqrt{2})$, 则下列命题正确的是 ()

A. 存在 θ , 使得 $\vec{a} // \vec{b}$

B. 当 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, \vec{a} 与 \vec{b} 垂直

C. 对任意 θ , 都有 $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$

D. 当 $\theta = \sqrt{3}$ 时, $\tan \theta = \sqrt{2}$

【答案】 BD

【分析】 A 选项, 利用向量平行及三角函数恒等变换得到方程, $\sin 2\theta = 2\sqrt{2} > 1$, 故 A 错误; B 选项, 利用垂直得到方程, 求出正切值; C 选项, 计算出两向量的模长, 得到 $|\vec{a}| = \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2 + \cos^2 \theta}$, $\pi, \in \mathbb{R}$, C 错误; 利用向量的数量积列出 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{3}$, 平方后得到 $\tan^2 \theta + 2\sqrt{2} \tan \theta + 2 = 0$, 求出正切值.

【详解】 对于选项 A: 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\sqrt{2} = \sin \theta \cos \theta$, 即 $\sin 2\theta = 2\sqrt{2} > 1$,

所以不存在这样的 θ , 故 A 错误;

对于选项 B: 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = 0$, 即 $\cos \theta = -\sqrt{2} \sin \theta$, 得 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 B 正确;

对于选项 C: $|\vec{a}| = \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2 + \cos^2 \theta}$, 当 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 时, $\cos 2\theta = 1$,

此时 $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 C 错误;

对于选项 D: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{3}$, 两边同时平方得 $\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta = 3$

$\sin^2 \theta = 3\cos^2 \theta + 3\sin^2 \theta$, 化简得 $2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta = 0$, 等式两边同除以 $\cos^2 \theta$ 得 $\tan^2 \theta + 2\sqrt{2} \tan \theta + 2 = 0$,

即 $(\tan \theta + \sqrt{2})^2 = 0$, 所以 $\tan \theta = -\sqrt{2}$, 故 D 正确.

故选: BD.

10. 一个质地均匀的正四面体表面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 抛掷该正四面体两次, 记事件 A 为“第一次向下的数字为偶数”, 事件 B 为“两次向下的数字之和为奇数”, 则下列说法正确的是 ()

A. $P(A) = \frac{1}{2}$

B. 事件 A 和事件 B 互为对立事件

C. $P(A|B) = \frac{1}{2}$

D. 事件 A 和事件 B 相互独立

【答案】 ACD

【分析】 求得 $P(A)$ 的值判断选项 A；举反例否定选项 B；求得 $P(A|B)$ 的值判断选项 C；利用公式 $P(A)P(B) = P(AB)$ 是否成立判断选项 D.

【详解】 选项 A： $P(A) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. 判断正确；

选项 B：事件 B：第一次向下的数字为偶数，第二次向下的数字为奇数，则两次向下的数字之和为奇数. 则事件 A 和事件 B 不是对立事件. 判断错误；

选项 C： $P(A|B) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ，则 $P(A|B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} P(A)$. 判断正确；

选项 D： $P(AB) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_2^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ，又 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，

则有 $P(AB) \neq P(A)P(B)$ 成立，则事件 A 和事件 B 相互独立. 判断正确.

故选：ACD

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 满足 $\vec{AE} = \lambda \vec{AC} + \mu \vec{AD}$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$ ， $\mu \in [0, 1]$ ，则 ()

A. 当 $\lambda = 0$ 时， $AE \parallel$ 平面 AB_1C_1

B. 当 $\lambda = 1$ 时，三棱锥 $E-ABC$ 的体积为定值

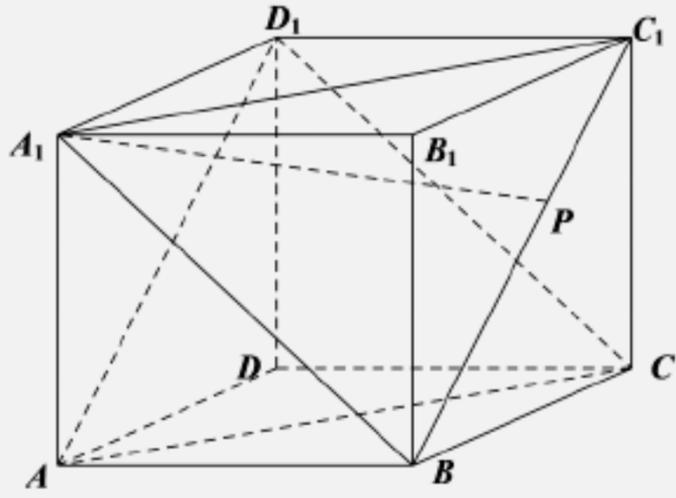
C. 当 $\lambda = 1$ 时， $\triangle AEC$ 的面积为定值

D. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时，直线 AE 与 BC_1 所成角的范围为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

【答案】 ABD

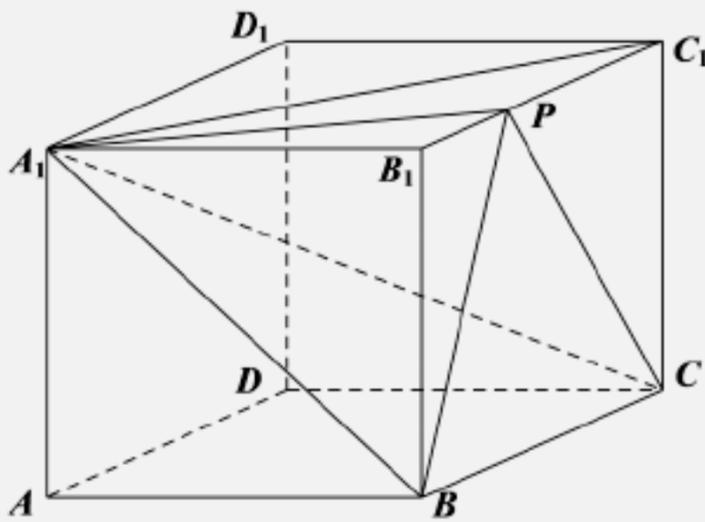
【分析】 对于 A 选项，确定点 E 在面对角线 AC_1 上，通过证明面面平行，得线面平行；对于 B 选项，确定点 E 在棱 AC_1 上，由等体积法，说明三棱锥 $E-ABC$ 的体积为定值；对于 C 选项，确定点 E 在棱 AC_1 上， $\triangle AEC$ 的底 AC 不变，高 AE 随点 E 的变化而变化；对于 D 选项，通过平移直线 BC_1 ，找到异面直线 AE 与 BC_1 所成的角，在正 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，确定其范围.

【详解】 对于 A 选项，如下图，当 $\lambda = 0$ 时，点 E 在面对角线 AC_1 上运动，又 $AE \subset$ 平面 AB_1C_1 ，所以 $AE \parallel$ 平面 AB_1C_1 ，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\because AE \parallel AC_1$ 且 $AE = AC_1$ ，则四边形 $AEAC_1$ 为平行四边形，所以， $AE \parallel AC_1$ ， $\because AC_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 ， $AE \not\subset$ 平面 AB_1C_1 ， $\therefore AE \parallel$ 平面 AB_1C_1 ，同理可证 $AE \parallel$ 平面 AB_1C_1 ， $\because AE \cap AC_1 = E$ ，所以，平面 $AEAC_1 \parallel$ 平面 AB_1C_1 ， $\because AE \subset$ 平面 $AEAC_1$ ，所以， $AE \parallel$ 平面 AB_1C_1 ，A 正确；



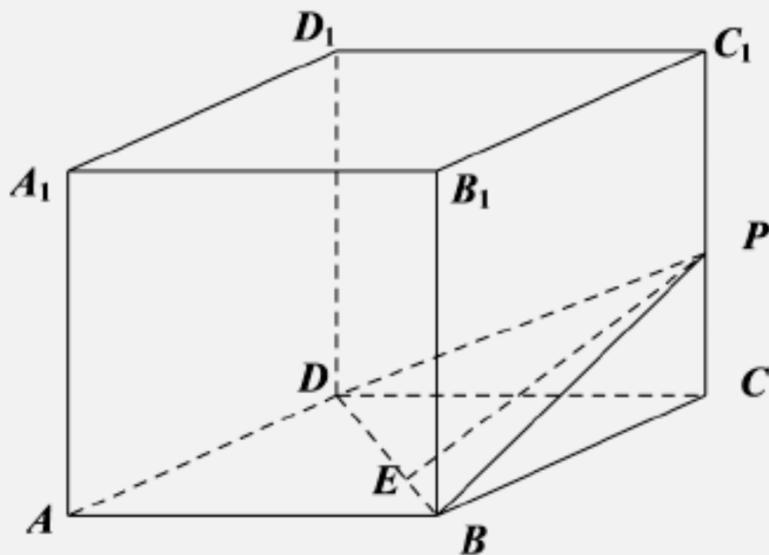
对于B选项, 当 $\lambda = 1$ 时, 如下图, 点 P 在棱 B_1C_1 上运动,

三棱锥 A_1-ABP 的体积 $V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABP} \times h$ 为定值, B 正确;



对于C选项, 当 $\lambda = 1$ 时, 如图, 点 P 在棱 B_1C_1 上运动, 过 P 作 $PE \perp AB$ 于点 E ,

则 $\angle A_1PE = \frac{1}{2}$, 其大小随着 λ 的变化而变化, C 错误;

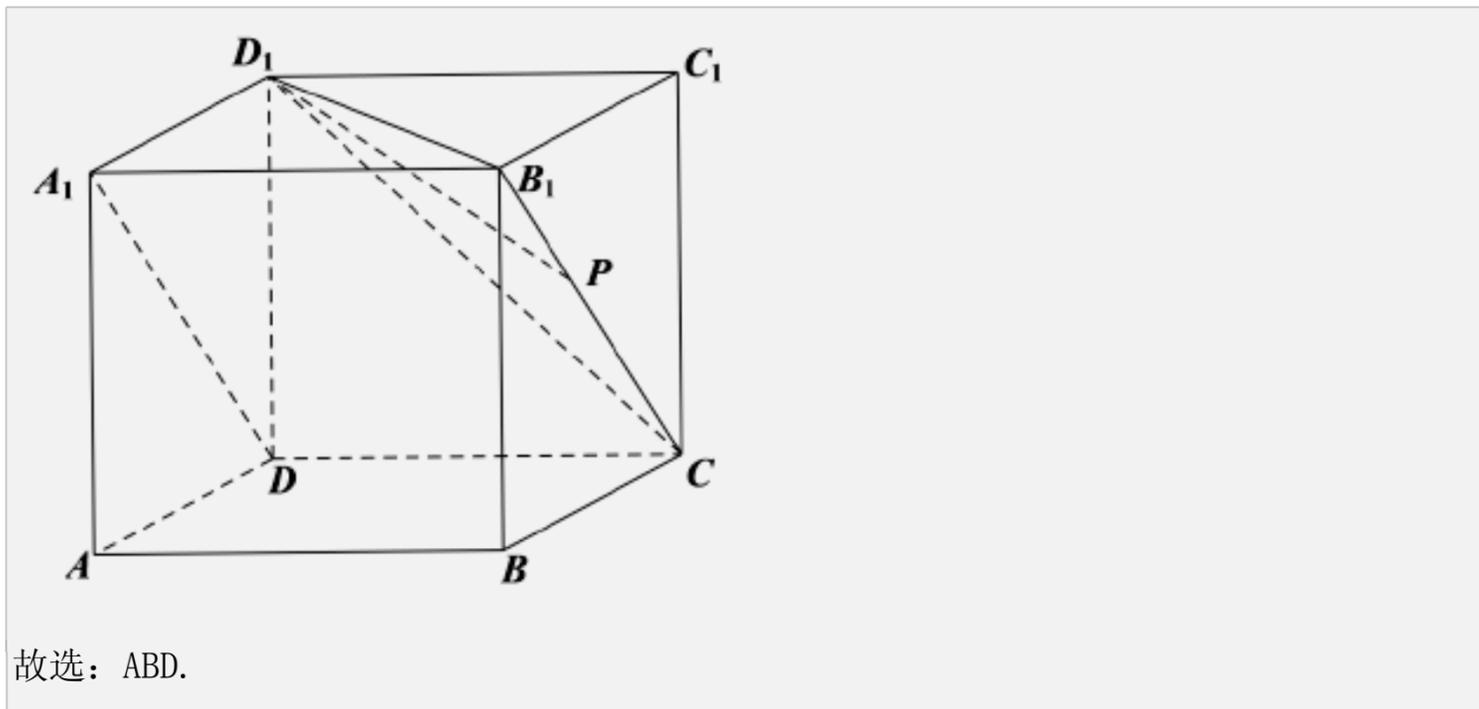


对于D选项, 如图所示, 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, A_1, P, E 三点共线,

因为 $A_1B_1 \parallel AB$ 且 $A_1B_1 = AB$, 所以四边形 A_1B_1BA 为平行四边形, 所以 $A_1B_1 \parallel AB$,

所以 $\angle A_1B_1P$ 或其补角是直线 A_1B_1 与 AB 所成角,

在正 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1B_1C_1$ 的取值范围为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, D 正确.



故选：ABD.

12. 已知函数 $f(x) = (x + \ln x)(\ln x) - 2$ 恰有三个零点 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 则下列结论中正确的是 ()

A. $1 < x_1 \leq 1 + \frac{1}{e^2 - e}$

B. $1 < x_2 < 1 + \frac{1}{e^2 - e}$

C. $x_1 + x_2 > 3$

D. $x_2 + x_3 > 2e$

【答案】BCD

【分析】令 $t = \frac{\ln x}{x}$ 转化为 $t^2 + (x - 1)t + 1 = 0$ (*) 在 $(-\infty, \frac{1}{e}]$ 上有两不等实根 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) 从而得出参数 x 的范围, 设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x = 1$ 处的切线 $l: y = x - 1$, 记切线 l 与 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的交点的横坐标分别为 x_1', x_2' , 又由 $\frac{\ln x}{x} \leq x - 1$ 可得 $x_1 = x_1', x_2 = \frac{\ln x_2}{x_2} < x_1 - 1$, 从而可判断选项 C; 由对数均值不等式可判断选项 D.

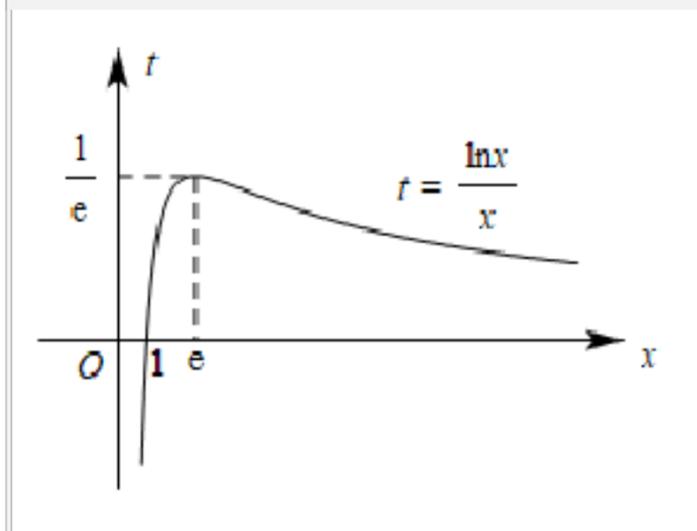
【详解】由 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

可得 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$

所以 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(x) \geq f(1) = 0$

令 $t = \frac{\ln x}{x}$, 则 $t' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时, $t' > 0$; 当 $x > e$ 时, $t' < 0$

则 $t = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $t = \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$



由题意即方程 $(x + \ln x)(\ln x) - 2 = 0$ 有三个实数根, 即 $x + \frac{\ln x}{x} = \frac{2}{\ln x}$ 有三个实数根

所以 $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$ 有两个实数根, 即转化为 $x^2 + (1 - \frac{1}{e})x + 1 = 0$ (*) 必有一个实根

$$x_1, x_2 \quad (x_1 < x_2)$$

判别式 $\Delta = (1 - \frac{1}{e})^2 - 4(1 - \frac{1}{e}) > 0$, 有 $x_1 < 3$ 或 $x_2 > 1$, 两根情况讨论如下:

①当 $x_1 \in (0, \frac{1}{e})$, $x_2 = \frac{1}{e}$ 时, 从而将 $x_2 = \frac{1}{e}$ 代入(*)式, 得 $x_1 = 1 + \frac{1}{e^2 - e}$, 又 $x_1 x_2 = 1 = \frac{1}{e^2 - e}$,

有 $x_1 = \frac{1}{e^2 - e} < 0$ 不符合题意, 故舍去

①当 $x_1 \leq 0$, $x_2 \in (0, \frac{1}{e})$ 时, 令 $(x) = x^2 + (1 - \frac{1}{e})x + 1$

i) 当 $x_1 = 0$ 时, 有 $1 = 0$, 得 $x = 1$, 此时(*)式为 $x^2 = 0$, 不符合题意

ii) 当 $x_1 < 0$ 时, 则有 $\begin{cases} (0) = 1 - \frac{1}{e} < 0 \\ (\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} + (1 - \frac{1}{e})\frac{1}{e} + 1 > 0 \end{cases}$, 解得 $1 < x_2 < \frac{e^2 - e + 1}{e^2 - e}$

综上知 x_2 的取值范围为 $(1, \frac{e^2 - e + 1}{e^2 - e})$, 故 A 错误, B 正确.

$$\text{由上知 } x_1 = \frac{1 - \sqrt{2+2} - 3}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{2+2} - 3}{2}$$

考虑函数 $(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线 $l: y = x - 1$, 易证: $\ln x \leq x - 1$

记切线 l 与 $x = x_1, x = x_2$ 的交点的横坐标分别为 x'_1, x'_2 , 则 $x'_1 = \frac{1 - \sqrt{2+2} - 3}{2} + 1$, $x'_2 = \frac{1 + \sqrt{2+2} - 3}{2} + 1$

又 $x_1 = x'_1 - 1 = \frac{\ln x_1}{x_1} < x_1 - 1$, 则 $x'_1 < x'_2$

同理 $x'_2 < x_2$, 故 $x_1 + x_2 > x'_1 + x'_2 = 3$, 故选项 C 正确

对于选项 D, $\begin{cases} \ln x_2 = \frac{2}{2} \\ \ln x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$, 则有 $\frac{2 - 3}{\ln x_2 \ln x_3} = \frac{1}{2} < \frac{2 + 3}{2}$, 即 $x_2 + x_3 > \frac{2}{2} > 2e$, 故选项 D 正确

故选: BCD

【点睛】 关键点睛: 本题考查利用导数研究函数零点问题, 考查复合方程的根的问题. 解得本题的关键是先令 $x = \frac{1}{x}$, 先研究出其性质大致图像, 然后将问题转化为 $x^2 + (1 - \frac{1}{e})x + 1 = 0$ (*) 在 $(-\infty, 0]$ 和 $(0, \frac{1}{e}]$ 上各有一个实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 从而使得问题得以解决, 属于难题.

三、填空题

13. $(2 + \sqrt{2})^6$ 的展开式中常数项是 _____ (用数字作答).

【答案】 240

【分析】 写出 $(2 + \sqrt{2})^6$ 二项式展开通项, 即可求得常数项.

【详解】 $\because (2 + \sqrt{2})^6$

其二项式展开通项:

$$\begin{aligned} &+1 = {}_6 C_2 (-2)^6 \binom{2}{-} \\ &= {}_6 C_2 2^6 (2) \\ &= {}_6 C_2 (2)^{12} 3 \end{aligned}$$

当 $12 - 3 = 0$ ，解得 $= 4$

$\therefore (2 + \frac{2}{6})^6$ 的展开式中常数项是： $\frac{4}{6} 2^4 = \frac{2}{6} 16 = 15 \times 16 = 240$.

故答案为：240.

【点睛】 本题考查二项式定理，利用通项公式求二项展开式中的指定项，解题关键是掌握 $(+)$ 的展开通项公式 ${}_{+1} =$ ，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

14. 某大学一寝室 4 人参加疫情防控讲座，4 人就坐在一排有 13 个空位的座位上，根据防疫要求，任意两人之间需间隔 1 米以上（两个空位），则不同的就坐方法有_____种.

【答案】 840

【分析】 先假设每人坐一个位置相当于去掉 4 个位置，再将 4 人中间任意两人之间放进 2 个空位，

此时空位一共还剩 3 个，再将这三个分成一组、两组、三组讨论，利用分类计数原理计算可得答案.

【详解】 先假设每人坐一个位置相当于去掉 4 个位置，再将 4 人中间任意两人之间放进 2 个空位，

此时空位一共还剩 3 个，若将这三个连在一起插入 4 人之间和两侧的空位上，有 5 种放法；

若将这三个分成两组，一组两个，一组一个，插入 4 人之间和两侧的空位上，有 A_5^2 种放法；

若将这三个分成三组插入 4 人之间和两侧的空位上，有 C_5^3 种放法，

故不同的就坐方法为 $A_4^4 \times (5 + A_5^2 + C_5^3) = 840$ 种.

故答案为：840.

15. 已知 $5^{-2} + 2 + a = 1$ ($a \in \mathbb{R}$)，则 $2 + a^2$ 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{4}{5}$

【分析】 根据题设条件可得 $2 = \frac{1 - a^4}{5^{-2}}$ ，可得 $2 + a^2 = \frac{1 - a^4}{5^{-2}} + a^2 = \frac{1}{5^{-2}} + \frac{4 - a^2}{5}$ ，利用基本不等式即可求解.

【详解】 ① $5^{-2} + 2 + a = 1$

① $a \neq 0$ 且 $2 = \frac{1 - a^4}{5^{-2}}$

① $2 + a^2 = \frac{1 - a^4}{5^{-2}} + a^2 = \frac{1}{5^{-2}} + \frac{4 - a^2}{5} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{5^{-2}} \cdot \frac{4 - a^2}{5}} = \frac{4}{5}$ ，当且仅当 $\frac{1}{5^{-2}} = \frac{4 - a^2}{5}$ ，即 $2 = \frac{3}{10}$ ， $a^2 = \frac{1}{2}$ 时

取等号.

① $2 + a^2$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.

故答案为： $\frac{4}{5}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/916055000131011001>