甘肃天水一中 2024-2025 学年高三 1 月阶段检测试题数学试题

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0．5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^6$的展开式中$x^6$的系数为 150，则$a^2=$（　　）

A．20　　**B．15**　　**C．10**　　**D．25**

2．已知抛物线$x^2=4y$上一点A的纵坐标为 4，则点A到抛物线焦点的距离为（ ）

A．2　　**B．3**　　**C．4**　　**D．5**

3．已知直线$2mx+ny=2\ (m>0,n>0)$过圆$(x-1)^2+(y-2)^2=5$的圆心，则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值为（　　）

A．1　　**B．2**　　**C．3**　　**D．4**

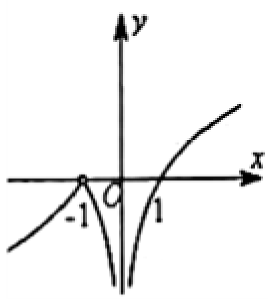
4．若$(1-2x)^n$的二项展开式中x^2的系数是 40，则正整数n的值为（　　）

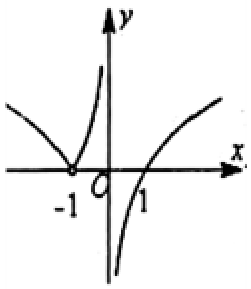
A．4　　**B．5**　　**C．6**　　**D．7**

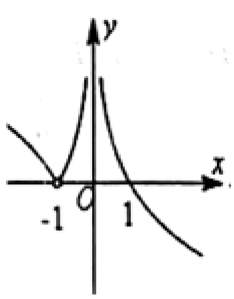
5．$\sin 80^\circ\cos 50^\circ+\cos 140^\circ\sin 10^\circ=$（　　）

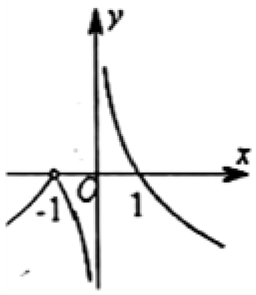
A． $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**B．** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**C．** $-\dfrac{1}{2}$　　**D．** $\dfrac{1}{2}$

6．函数$f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}\log_a|x|$（$0<a<1$）的图象的大致形状是（　　）

A．


B．


C．


D. 

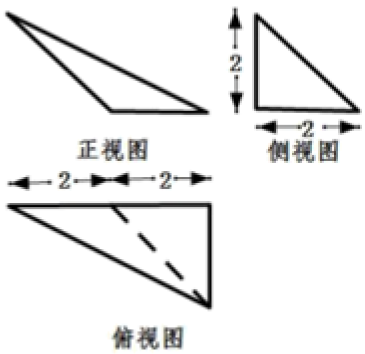
7．某装饰公司制作一种扇形板状装饰品，其圆心角为120°，并在扇形弧上正面等距安装7个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个，导线接头忽略不计)，已知扇形的半径为30厘米，则连接导线最小大致需要的长度为（　　）

A．58厘米　　B．63厘米　　C．69厘米　　D．76厘米

8．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$,则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．-3　　D．2

9．某几何体的三视图如图所示，则该几何体中的最长棱长为（　　）



A．$3\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{6}$　　D．$2\sqrt{7}$

10．已知函数$f(x)=\begin{cases}|\ln x|,0<x\le e^2\\ e^2+2-x,\ x>e^2\end{cases}$，存在实数$x_1<x_2<x_3$，使得$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则$\dfrac{f(x_1)}{x_2}$的最大值为（　　）

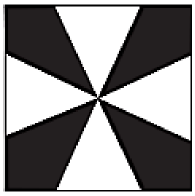
A．$\dfrac{1}{e}$　　B．$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　　C．$\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$　　D．$\dfrac{1}{e^2}$

11．已知$a,b\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}x,x<0\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\ge 0\end{cases}$，若函数$y=f(x)-ax-b$恰有三个零点，则（　）

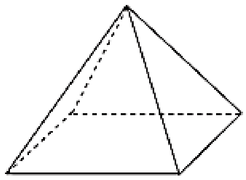
A．$a<-1,b<0$　　B．$a<-1,b>0$

C．$a>-1,b<0$　　D．$a>-1,b>0$

12．将一块边长为$a\text{cm}$的正方形薄铁皮按如图（1）所示的阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器，将该容器按如图（2）放置，若其正视图为等腰直角三角形，且该容器的容积为$72\sqrt{2}\text{cm}^3$，则a的值为（　　）



（1）



（2）

A．6　　　　**B．8**　　　　**C．10**　　　　**D．12**

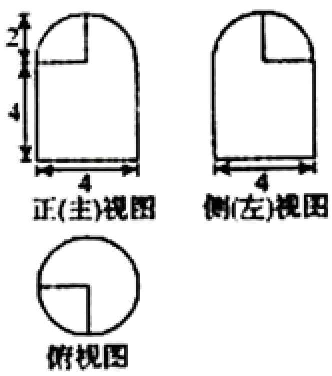
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设点 ***P*** 在函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$的图象上，点 ***Q*** 在函数$g\left(x\right)=\ln\left(2x\right)$的图象上，则线段 ***PQ*** 长度的最小值为________

14．若$a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\cos x)dx$，则$(x-\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}})^5$的展开式中含$x$的项的系数为_______.

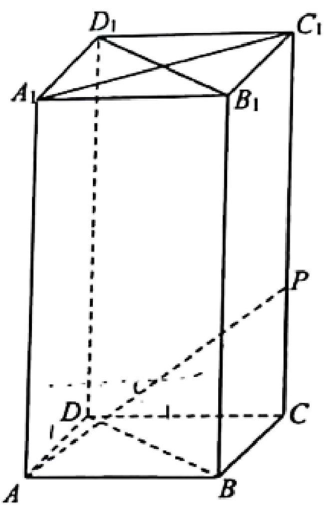
15．《九章算术》卷 5《商功》记载一个问题“今有圆堡瑽，周四丈八尺，高一丈一尺.问积几何？答曰：二千一百一十二尺，术曰：周自相乘，以高乘之，十二而一”，这里所说的圆堡瑽就是圆柱体，它的体积为“周自相乘，以高乘之，十二而一”，就是说：圆堡瑽（圆柱体）的体积为$V=\dfrac{1}{12}\times$（底面圆的周长的平方$\times$高），则由此可推得圆周率π的取值为________.

16．如图是某几何体的三视图，俯视图中圆的两条半径长为 2 且互相垂直，则该几何体的体积为________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，在底面边长为 1，侧棱长为 2 的正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，***P*** 是侧棱CC_1上的一点，$CP=m$.



（1）若$m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求直线 ***AP*** 与平面BDD_1B_1所成角；

（2）在线段A_1C_1上是否存在一个定点 ***Q***，使得对任意的实数 ***m***，都有$D_1Q\perp AP$，并证明你的结论.

18.（12 分）已知$a>0$，函数$f\left(x\right)=\left|x-a\right|$.

（1）若$a=2$，解不等式$f\left(x\right)+f\left(x+3\right)\le 5$；

（2）若函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(x+2a\right)$，且存在$x_0\in R$使得$g\left(x_0\right)\ge a^2-2a$成立，求实数$a$的取值范围.

19.（12 分）已知函数$f(x)=x^2-bx+a\ln x(a>0，b\in R)$.

（1）设$b=a+2$，若$f(x)$存在两个极值点x_1，x_2，且$\left|x_1-x_2\right|>1$，求证：$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|>3-4\ln 2$；

（2）设$g(x)=xf(x)$，$g(x)$在$[1,e]$不单调，且$2b+\dfrac{1}{a}\le 4e$恒成立，求a的取值范围.（e为自然对数的底数）.

20.（12 分）**选修 4-5：不等式选讲**

已知函数$f\left(x\right)=\left|x-2\right|$

（Ⅰ）解不等式$f\left(x\right)+f\left(2x+1\right)\ge 6$；

（Ⅱ）对$a+b=1\left(a,b>0\right)$及$\forall x\in R$，不等式$f\left(x-m\right)-f\left(-x\right)\le\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$恒成立，求实数$m$的取值范围.

21.（12 分）已知函数$f(x)=(x-a)^2-2x\ln x$，其导函数为$f'(x)$，

（1）若$a=0$，求不等式$f(x)>1$的解集；

（2）证明：对任意的$0<s<t<2$，恒有$\dfrac{f'(s)-f'(t)}{s-t}<1$.

22.（10 分）若不等式$1+2^x+4^x\cdot a>0$在$x\in\left(0,1\right]$时恒成立，则a的取值范围是__________.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．C

【解析】

通过二项式展开式的通项分析得到$C_6^2a^2x^6=150x^6$，即得解.

【详解】

由已知得$T_{r+1}=C_6^r\left(x^2\right)^{6-r}\left(\dfrac{a}{x}\right)^r=C_6^r(a)^rx^{12-3r}$，

故当$r=2$时，$12-3r=6$，

于是有$T_3=C_6^2a^2x^6=150x^6$，

则$a^2=10$.

故选：C

本题主要考查二项式展开式的通项和系数问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

2．D

【解析】

试题分析：抛物线$x^2=4y$焦点在y轴上，开口向上，所以焦点坐标为$(0,1)$，准线方程为$y=-1$，因为点 A 的纵坐标为 4，所以点 A 到抛物线准线的距离为$4+1=5$，因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，所以点 A 与抛物线焦点的距离为 5.

考点：本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离，考查学生的运算求解能力.

点评：抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，这条性质在解题时经常用到，可以简化运算.

3．D

【解析】

圆心坐标为$(1,2)$，代入直线方程，再由乘 1 法和基本不等式，展开计算即可得到所求最小值.

【详解】

圆$(x-1)^2+(y-2)^2=5$的圆心为$(1,2)$，

由题意可得$2m+2n=2$，即$m+n=1$，m，$n>0$，

则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n})(m+n)=2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\geqslant 4$，当且仅当$\dfrac{n}{m}=\dfrac{m}{n}$且$m+n=1$即$m=n=\dfrac{1}{2}$时取等号，

故选：D.

本题考查最值的求法，注意运用乘 1 法和基本不等式，注意满足的条件：一正二定三等，同时考查直线与圆的关系，考查运算能力，属于基础题.

4．B

【解析】

先化简$\left(1-2x\right)^{n}$的二项展开式中第$r+1$项$T_{r+1}=C_{n}^{r}\cdot 1^{n-r}\cdot\left(-2x\right)^{r}$，然后直接求解即可

【详解】

$\left(1-2x\right)^{n}$的二项展开式中第$r+1$项$T_{r+1}=C_{n}^{r}\cdot 1^{n-r}\cdot\left(-2x\right)^{r}$.令$r=2$，则$T_{3}=C_{n}^{2}\cdot\left(-2x\right)^{2}$，$\therefore 4C_{n}^{2}=40$，$\therefore n=-4$（舍）或$n=5$.

本题考查二项展开式问题，属于基础题

5．D

【解析】

利用$10^{\circ}=90^{\circ}-80^{\circ},140^{\circ}=90^{\circ}+50^{\circ}$，根据诱导公式进行化简，可得$\sin 80^{\circ}\cos 50^{\circ}-\cos 80^{\circ}\sin 50^{\circ}$，然后利用两角差的正弦定理，可得结果.

【详解】

由$80^{\circ}=90^{\circ}-10^{\circ},140^{\circ}=90^{\circ}+50^{\circ}$

所以$\sin 10^{\circ}=\sin\left(90^{\circ}-80^{\circ}\right)=\cos 10^{\circ}$

$\cos 140^{\circ}=\cos\left(90^{\circ}+50^{\circ}\right)=-\sin 50^{\circ}$,

所以原式$=\sin 80^{\circ}\cos 50^{\circ}-\cos 80^{\circ}\sin 50^{\circ}=\sin\left(80^{\circ}-50^{\circ}\right)$

所以原式$=\sin 30^{\circ}=\dfrac{1}{2}$

故$\sin 80^{\circ}\cos 50^{\circ}+\cos 140^{\circ}\sin 10^{\circ}=\dfrac{1}{2}$

故选：D

本题考查诱导公式以及两角差的正弦公式，关键在于掌握公式，属基础题.

6．C

【解析】

对 x 分类讨论，去掉绝对值，即可作出图象.

【详解】

$$f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}\log_a|x|=\begin{cases}-\log_a(-x)，x<-1，\\ \log_a(-x)，-1<x<0，\\ \log_a x，x>0.\end{cases}$$

故选 C．

识图常用的方法

(1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

(2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

(3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

7．B

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小，可将导线的长视为扇形弧长，利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 6 等分，

所以每部分的弦长和弧长相差很小，可以用弧长近似代替弦长，

故导线长度约为$\frac{2\pi}{3}\times 30=20\pi\approx 63$(厘米).

故选：B.

本题主要考查了扇形弧长的计算，属于容易题.

8．A

【解析】

根据向量投影的定义，即可求解.

【详解】

$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为$|\vec{a}|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-6}{3}=-2$.

故选:A

本题考查向量的投影，属于基础题.

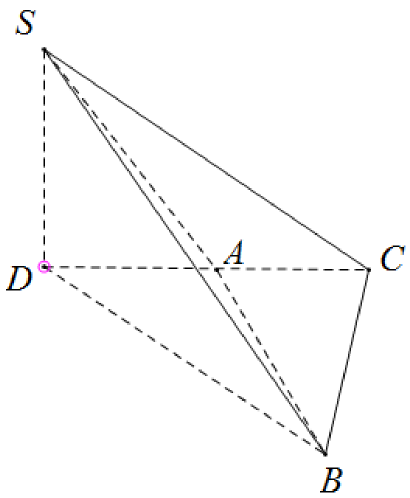
9．C

【解析】

根据三视图，可得该几何体是一个三棱锥$S-ABC$，并且平面$SAC\perp$平面ABC，$AC\perp BC$，过S作$SD\perp AC$，连接BD，$AD=2, AC=2, BC=2, SD=2$，再求得其它的棱长比较下结论.

【详解】

如图所示：



由三视图得：该几何体是一个三棱锥$S-ABC$，且平面$SAC\perp$ 平面ABC，$AC\perp BC$，

过S作$SD\perp AC$，连接BD，则$AD=2, AC=2, BC=2, SD=2$，

所以$BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=\sqrt{20}$，$SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=2\sqrt{6}$，$SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=2\sqrt{2}$，

$SC=\sqrt{SD^2+AC^2}=2\sqrt{5}$，

该几何体中的最长棱长为$2\sqrt{6}$.

故选：C

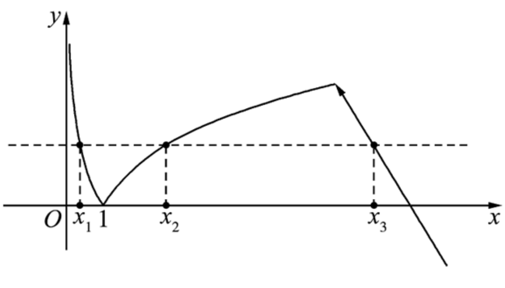
本题主要考查三视图还原几何体，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题.

10．A

【解析】

画出分段函数图像，可得$x_1x_2=1$，由于$\frac{f\left(x_1\right)}{x_2}=\frac{f\left(x_2\right)}{x_2}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，构造函数$g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，利用导数研究单调性，分析最值，即得解.

【详解】



由于$0<x_1<1<x_2<e^2<x_3<e^2+2$，

$-\ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 x_2 = 1$,

由于 $\dfrac{f\left(x_1\right)}{x_2} = \dfrac{f\left(x_2\right)}{x_2} = \dfrac{\ln x_2}{x_2}$，

令 $g\left(x\right) = \dfrac{\ln x}{x}$， $x \in \left(1，\ e^2\right)$，

$g'\left(x\right) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow g\left(x\right)$ 在 $\left(1，\ e\right)\nearrow$，$\left(e，\ e^2\right)\searrow$

故 $g(x)_{max} = g\left(e\right) = \dfrac{1}{e}$.

故选：A

本题考查了导数在函数性质探究中的应用，考查了学生数形结合，转化划归，综合分析，数学运算的能力，属于较难题.

11．C

【解析】

当 $x<0$ 时， $y=f(x)-ax-b=x-ax-b=(1-a)x-b$ 最多一个零点；当 $x \geqslant 0$ 时，

$y=f(x)-ax-b=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax-ax-b=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2-b$，利用导数研究函数的单调性，根据单调性画函数草图，根据草图可得.

【详解】

当 $x<0$ 时， $y=f(x)-ax-b=x-ax-b=(1-a)x-b=0$，得 $x=\dfrac{b}{1-a}$； $y=f(x)-ax-b$ 最多一个零点；

当 $x \geqslant 0$ 时， $y=f(x)-ax-b=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax-ax-b=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2-b$，

$y'=x^2-(a+1)x$，

当 $a+1 \leqslant 0$，即 $a \leqslant -1$ 时， $y' \geqslant 0$， $y=f(x)-ax-b$ 在 $[0，+\infty)$ 上递增， $y=f(x)-ax-b$ 最多一个零点．不合题意；

当 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，令 $y'>0$ 得 $x\in[a+1，+\infty)$，函数递增，令 $y'<0$ 得 $x\in[0，a+1)$，函数递减；函数最多有 2 个零点；

根据题意函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)-ax-b$ 在 $(-\infty,0)$ 上有一个零点，在 $[0，+\infty)$ 上有 2 个零点，

如图：

$\therefore \dfrac{b}{1-a}<0$ 且 $\begin{cases}-b>0\\ \dfrac{1}{3}(a+1)^3-\dfrac{1}{2}(a+1)(a+1)^2-b<0\end{cases}$，