

2023-2024 学年安徽省北大附属宿州实验学校高考数学考前最后一卷预测卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$ ($\omega > 0$)，若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点，则 ω 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right)$ B. $\left(\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right]$ C. $\left(\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right)$ D. $\left[\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right]$

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_4 = 5, S_9 = 81$ ，则 $a_{10} =$ ()

- A. 23 B. 25 C. 28 D. 29

3. 体育教师指导 4 个学生训练转身动作，预备时，4 个学生全部面朝正南方向站成一排。训练时，每次都让 3 个学生“向后转”，若 4 个学生全部转到面朝正北方向，则至少需要“向后转”的次数是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 已知定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \frac{1}{2}f(x+2)$ ，且当 $x \in [0, 2)$ 时， $f(x) = -x^2 + 2x$ 。设 $f(x)$ 在 $[2n-2, 2n)$ 上的最大值为 a_n ($n \in \mathbb{N}^*$)，且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n 。若对于任意正整数 n 不等式

$k(S_n + 1) \geq 2n - 9$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $[0, +\infty)$ B. $\left[\frac{1}{32}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{3}{64}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{7}{64}, +\infty\right)$

5. 设复数 z 满足 $|z - 2i| = |z + 1|$ ， z 在复平面内对应的点为 (x, y) ，则 ()

- A. $2x - 4y - 3 = 0$ B. $2x + 4y - 3 = 0$ C. $4x + 2y - 3 = 0$ D. $2x - 4y + 3 = 0$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F ，过右顶点 A 且与 x 轴垂直的直线交双曲线的一条渐近线于 M 点， MF 的中点恰好在双曲线 C 上，则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距是虚轴长的 2 倍，则双曲线的渐近线方程为 ()

A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

8. 已知函数 $f(x) = -a \sin 3x + a + b (a > 0, x \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[-5, 3]$ ，函数 $g(x) = b - \cos ax$ ，则 $g(x)$ 的图象的对称中心为 ()

A. $\left(\frac{k\pi}{4}, -5\right) (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, -5\right) (k \in \mathbf{Z})$
C. $\left(\frac{k\pi}{5}, -4\right) (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left(\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, -4\right) (k \in \mathbf{Z})$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，虚轴的两个端点分别为 B_1, B_2 ，若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π ，则双曲线焦距的最小值为 ()

A. 8 B. 16 C. $6\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

10. 已知函数 $f(x) = A \cos(2x + \varphi) (\varphi > 0)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到的图像关于 y 轴对称， $f(0) = 1$ ，当 φ 取得最小值时，函数 $f(x)$ 的解析式为 ()

A. $f(x) = \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ B. $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$
C. $f(x) = \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ D. $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

11. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{\pi}{3})$ ，则 $f(x)$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = e^x + b$ 的一条切线为 $y = a(x+1)$ ，则 ab 的最小值为 ()

A. $-\frac{1}{2e}$ B. $-\frac{1}{4e}$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-\frac{2}{e}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$ 在区间 $[\pi, 2\pi)$ 上的值小于 0 恒成立，则 ω 的取值范围是_____。

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 3^x, & x \leq 1 \end{cases}$ ，若 $f(a) \leq 1$ ，则 a 的取值范围是_____

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上， $PA = PB = PC$ ， $AB = 2$ ， $BC = \sqrt{5}$ ， $AC = 3$ ， E, F

分别为 AC , PB 的中点, $EF = \frac{3}{2}$, 则球 O 的体积为_____.

16. 已知双曲线的一条渐近线为 $y = 2x$, 且经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 则双曲线的标准方程为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

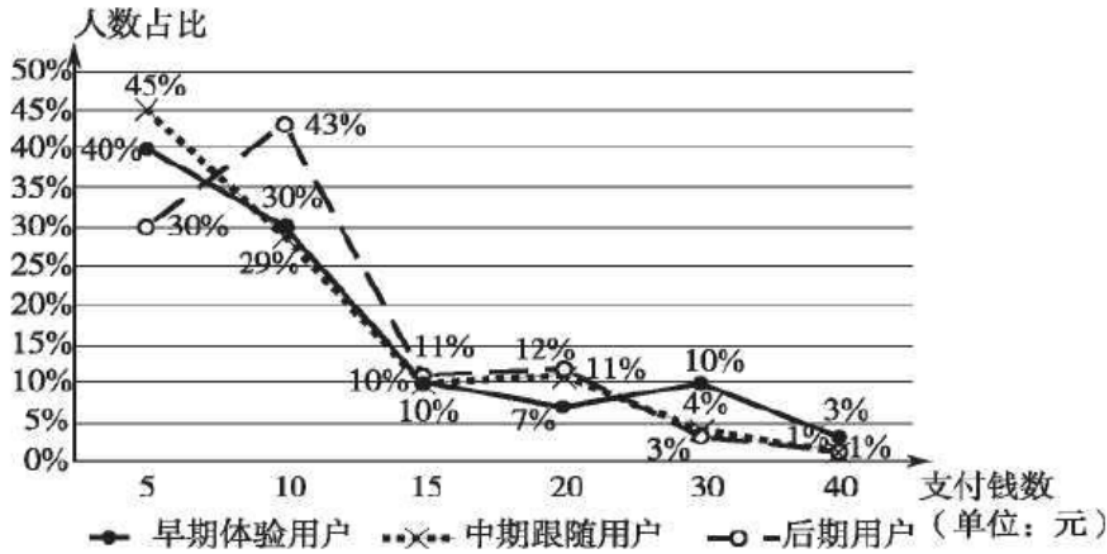
17. (12 分) 已知 $P(0,-2)$, 点 A,B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右顶点, 直线 BP 交 E 于另一点 Q , $\triangle ABP$ 为等腰直角三角形, 且 $|PQ|:|QB| = 3:2$.

- (I) 求椭圆 E 的方程;
- (II) 设过点 P 的直线 l 与椭圆 E 交于 M,N 两点, 总使得 $\angle MON$ 为锐角, 求直线 l 斜率的取值范围.

18. (12 分) 2019 年 6 月, 国内的 5G 运营牌照开始发放.从 2G 到 5G , 我们国家的移动通信业务用了不到 20 年的时间, 完成了技术上的飞跃, 跻身世界先进水平.为了了解高校学生对 5G 的消费意愿, 2019 年 8 月, 从某地在校大学生中随机抽取了 1000 人进行调查, 样本中各类用户分布情况如下:

用户分类	预计升级到 5G 的时段	人数
早期体验用户	2019 年 8 月至 2019 年 12 月	270 人
中期跟随用户	2020 年 1 月至 2021 年 12 月	530 人
后期用户	2022 年 1 月及以后	200 人

我们将大学生升级 5G 时间的早晚与大学生愿意为 5G 套餐支付更多的费用作比较, 可得出下图的关系 (例如早期体验用户中愿意为 5G 套餐多支付 5 元的人数占有所有早期体验用户的 40%) .



- (1) 从该地高校大学生中随机抽取 1 人, 估计该学生愿意在 2021 年或 2021 年之前升级到 5G 的概率;
- (2) 从样本的早期体验用户和中期跟随用户中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中愿意为升级 5G

多支付 10 元或 10 元以上的人数，求 X 的分布列和数学期望；

(3) 2019 年底，从这 1000 人的样本中随机抽取 3 人，这三位学生都已签约 5G 套餐，能否认为样本中早期体验用户的人数有变化？说明理由.

19. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，右顶点为 A ，已知椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$ ，过点 F 且与 x

轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 3.

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 设过点 A 的直线 l 与椭圆 C 交于点 B (B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M ，与 y 轴交于点 H ，若 $BF \perp HF$ ，且 $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线 l 斜率的取值范围.

20. (12 分) 为践行“绿水青山就是金山银山”的发展理念和提高生态环境的保护意识，高二年级准备成立一个环境保护兴趣小组. 该年级理科班有男生 400 人，女生 200 人；文科班有男生 100 人，女生 300 人. 现按男、女用分层抽样从理科生中抽取 6 人，按男、女分层抽样从文科生中抽取 4 人，组成环境保护兴趣小组，再从这 10 人的兴趣小组中抽出 4 人参加学校的环保知识竞赛.

(1) 设事件 A 为“选出的这 4 个人中要求有两个男生两个女生，而且这两个男生必须文、理科生都有”，求事件 A 发生的概率；

(2) 用 X 表示抽取的 4 人中文科女生的人数，求 X 的分布列和数学期望.

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点， x 轴的正半

轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 8 = 0$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 若点 P 是直线 l 的一点，过点 P 作曲线 C 的切线，切点为 Q ，求 $|PQ|$ 的最小值.

22. (10 分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐

标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 12$ ，且曲线 C 的左焦点 F 在直线 l 上.

(I) 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的参数方程；

(II) 求曲线 C 的内接矩形的周长的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由 $0 \leq x \leq 2\pi$ 求出 $\omega x + \frac{\pi}{5}$ 范围，结合正弦函数的图象零点特征，建立 ω 不等量关系，即可求解.

【详解】

当 $x \in [0, 2\pi]$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{5}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{5} \right]$,

$\because f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点，

$\therefore 5\pi \leq 2\omega\pi + \frac{\pi}{5} < 6\pi$ ， $\therefore \frac{12}{5} \leq \omega < \frac{29}{10}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查正弦型函数的性质，整体代换是解题的关键，属于基础题.

2、D

【解析】

由 $S_9 = 81$ 可求 $a_5 = 9$ ，再求公差，再求解即可.

【详解】

解：Q $\{a_n\}$ 是等差数列

$\therefore S_9 = 9a_5 = 81$

$\therefore a_5 = 9$ ，又Q $a_4 = 5$ ，

$\therefore$ 公差为 $d = 4$ ，

$\therefore a_{10} = a_4 + 6d = 29$ ，

故选：D

【点睛】

考查等差数列的有关性质、运算求解能力和推理论证能力，是基础题.

3、B

【解析】

通过列举法，列举出同学的朝向，然后即可求出需要向后转的次数.

【详解】

“正面朝南”“正面朝北”分别用“ $\wedge$ ”“ $\vee$ ”表示，

利用列举法，可得下表，

原始状态	第 1 次“向后转”	第 2 次“向后转”	第 3 次“向后转”	第 4 次“向后转”
$\wedge\wedge\wedge\wedge$	$\wedge\vee\vee\vee$	$\vee\vee\wedge\wedge$	$\wedge\wedge\wedge\vee$	$\vee\vee\vee\vee$

可知需要的次数为 4 次.

故选：B.

【点睛】

本题考查的是求最小推理次数，一般这类题型构造较为巧妙，可通过列举的方法直观感受，属于基础题.

4、C

【解析】

由已知先求出 $f(x)_{\max} = 2^{n-1}$ ，即 $a_n = 2^{n-1}$ ，进一步可得 $S_n = 2^n - 1$ ，再将所求问题转化为 $k \geq \frac{2n-9}{2^n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，设 $c_n = \frac{2n-9}{2^n}$ ，只需找到数列 $\{c_n\}$ 的最大值即可.

【详解】

当 $2n-2 \leq x < 2n$ 时，则 $0 \leq x+2-2n < 2$ ， $f(x+2-2n) = -(x+2-2n)(x-2n)$ ，

所以， $f(x) = 2^{n-1} f[x-2(n-1)] = -2^{n-1} (x+2-2n)(x-2n)$ ，显然当 $x = 2n-1$ 时，

$f(x)_{\max} = 2^{n-1}$ ，故 $a_n = 2^{n-1}$ ， $S_n = \frac{1 \times (1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$ ，若对于任意正整数 n 不等式

$k(S_n + 1) \geq 2n-9$ 恒成立，即 $k2^n \geq 2n-9$ 对于任意正整数 n 恒成立，即 $k \geq \frac{2n-9}{2^n}$ 对于任

意正整数 n 恒成立，设 $c_n = \frac{2n-9}{2^n}$ ， $c_{n+1} - c_n = \frac{11-2n}{2^{n+1}}$ ，令 $\frac{11-2n}{2^{n+1}} > 0$ ，解得 $n < \frac{11}{2}$ ，

令 $\frac{11-2n}{2^{n+1}} < 0$ ，解得 $n > \frac{11}{2}$ ，考虑到 $n \in N^*$ ，故有当 $n \leq 5$ 时， $\{c_n\}$ 单调递增，

当 $n \geq 6$ 时，有 $\{c_n\}$ 单调递减，故数列 $\{c_n\}$ 的最大值为 $c_6 = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$ ，

所以 $k \geq \frac{3}{64}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查数列中的不等式恒成立问题，涉及到求函数解析、等比数列前 n

项和、数列单调性的判断等知识，是一道较为综合的数列题.

5、B

【解析】

设 $z = x + yi$ ，根据复数的几何意义得到 x 、 y 的关系式，即可得解；

【详解】

解：设 $z = x + yi$

$$\because |z - 2i| = |z + 1|, \therefore x^2 + (y - 2)^2 = (x + 1)^2 + y^2, \text{解得 } 2x + 4y - 3 = 0.$$

故选：B

【点睛】

本题考查复数的几何意义的应用，属于基础题.

6、A

【解析】

设 $M(a, b)$ ，则 MF 的中点坐标为 $(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$ ，代入双曲线的方程可得 a, b, c 的关系，再转化成关于 a, c 的齐次方程，

求出 $\frac{c}{a}$ 的值，即可得答案.

【详解】

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 $A(a, 0)$ ，右焦点为 $F(c, 0)$ ，

M 所在直线为 $x = a$ ，不妨设 $M(a, b)$ ，

$$\therefore MF \text{ 的中点坐标为 } (\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}). \text{ 代入方程可得 } \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore \frac{(a+c)^2}{4a^2} = \frac{5}{4}, \therefore e^2 + 2e - 4 = 0, \therefore e = \sqrt{5} - 1 \text{ (负值舍去)}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意构造 a, c 的齐次方程.

7、A

【解析】

根据双曲线的焦距是虚轴长的 2 倍，可得出 $c = 2b$ ，结合 $c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2$ ，得出 $a^2 = 3b^2$

, 即可求出双曲线的渐近线方程.

【详解】

解: 由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 可知, 焦点在 x 轴上,

则双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{b}{a}x$,

由于焦距是虚轴长的 2 倍, 可得: $c = 2b$,

$$\therefore c^2 = 4b^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{即: } a^2 = 3b^2, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质, 以及双曲线的渐近线方程.

8、B

【解析】

由值域为 $[-5, 3]$ 确定 a, b 的值, 得 $g(x) = -5 - \cos 4x$, 利用对称中心列方程求解即可

【详解】

因为 $f(x) \in [b, 2a + b]$, 又依题意知 $f(x)$ 的值域为 $[-5, 3]$, 所以 $2a + b = 3$ 得 $a = 4$, $b = -5$,

所以 $g(x) = -5 - \cos 4x$, 令 $4x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$, 则 $g(x)$ 的图象的对称中心为

$$\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, -5 \right) (k \in \mathbb{Z}).$$

故选: B

【点睛】

本题考查三角函数 的图像及性质, 考查函数的对称中心, 重点考查值域的求解, 易错点是对称中心纵坐标错写为 0

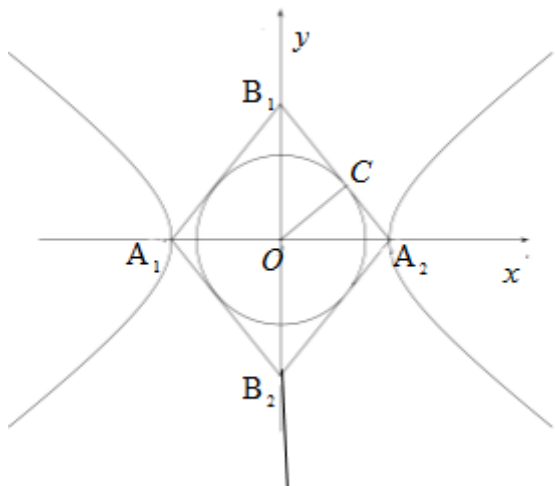
9、D

【解析】

根据题意画出几何关系, 由四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积求得半径, 结合四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 面积关系求得 c 与 ab 等量关系, 再根据基本不等式求得 c 的取值范围, 即可确定双曲线焦距的最小值.

【详解】

根据题意，画出几何关系如下图所示：



设四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆半径为 r ，双曲线半焦距为 c ，

$$\text{则 } |OA_2| = a, |OB_1| = b,$$

$$\text{所以 } |A_2B_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = c,$$

四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆面积为 18π ，

$$\text{则 } 18\pi = \pi r^2, \text{ 解得 } |OC| = r = 3\sqrt{2},$$

$$\text{则 } S_{\text{四边形} A_1B_1A_2B_2} = \frac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |B_1B_2| = 4 \times \frac{1}{2} \cdot |A_2B_1| \cdot |OC|,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4 \times \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3\sqrt{2}$$

$$\text{故由基本不等式可得 } c = \frac{ab}{3\sqrt{2}} \leq \frac{\frac{a^2 + b^2}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{c^2}{6\sqrt{2}}, \text{ 即 } c \geq 6\sqrt{2},$$

当且仅当 $a = b$ 时等号成立.

故焦距的最小值为 $12\sqrt{2}$.

故选：D

【点睛】

本题考查了双曲线的定义及其性质的简单应用，圆锥曲线与基本不等式综合应用，属于中档题.

10、A

【解析】

先求出平移后的函数解析式，结合图像的对称性和 $f(0) = 1$ 得到 A 和 φ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/916141055235010113>